

关于 Tau 变分法研究电子光学成像系统的时间像差理论

周立伟¹, M A Monastyrski², M Ya Schelev², 张智铨³, 李 元¹

(1 北京理工大学信息科学技术学院, 北京 100081;

2 俄罗斯科学院普罗霍洛夫普通物理研究所, 莫斯科 119991;

3 装甲兵工程学院, 北京 100072)

摘 要: 本文采用新的时间像差定义, 考察了“Tau 变分法”研究电子光学成像系统的时间像差理论。本文表明, “Tau 变分法”所给出的以微分方程形式表示的几何时间像差系数, 亦可获得积分形式的表示式, 证明了“直接积分法”与“Tau 变分法”这两条途径殊途同归。

关键词: 电子光学成像系统; 阴极透镜; 动态电子光学; 时间像差理论; 时间渡越弥散

中图分类号: O463 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2006) 02-0193-05

On the Temporal Aberration Theory of Electron Optical Imaging Systems by Tau-Variation Method

ZHOU Liwei¹, M A Monastyrski², M Ya Schelev², ZHANG Zhi-quan³, LI Yuan¹

(1. School of Information Science and Technology, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China;

2. A. M. Prokhorov General Institute of Physics, Russian Academy of Sciences, Moscow 119991, Russia;

3. Academy of Armored Force Engineering, Beijing 100072, China)

Abstract By the use of a novel definition of temporal aberrations, the temporal aberration theory of electron optical imaging system was again investigated by the “Tau-Variation Method”. Results show that the expressions in integral form can also be obtained by the “Tau-Variation Method” which usually needs to solve the differential equations for the three of geometrical temporal aberration coefficients of second order. It also proves that the “Direct Integral Method” and “Tau-Variation Method” reach the same goal by different ways.

Key words electron optical imaging systems; cathode lenses; dynamic electron optics; theory of temporal aberrations

1 引言

1980年, Monastyrski M. A. 和 Schelev M. Ya 首先提出“t 变分法”^[3]探讨电子光学成像系统的时间像差理论, 其核心是以变分方法考察电子光学成像系统的时间像差, 该文以轴向初能量 $\varepsilon_z = 0$ 的电子作为基准给出了计算电子光学成像系统一级和二级时间像差系数的途径, 但导得的几何时间像差系数的表示式涉及微分方程的求解。文献[3]的工作使得有可能在高速摄影变像管和条纹管的设计与计算中考虑二级时间像差项对时间分辨率的影响。

本文的目的是由所给出的时间像差定义^[1,2]进一步考察 t 变分法^[3]研究电子光学成像系统的时间像差理论, 并证明由变分法出发亦可获得以积分形式表示的二级几何时间像差系数表达式。

2 时间像差的定义^[1]

文献[1]给出的时间像差的定义如下:

$$\begin{aligned}\Delta t &= t(z, \varepsilon_z^{1/2}, \varepsilon_r^{1/2}, r_0) - t^*(z, \varepsilon_{z1}^{1/2}) \\ &= \Delta\Gamma(z, \varepsilon_z^{1/2}, \varepsilon_r^{1/2}) + \Delta t(z, \varepsilon_z^{1/2}, \varepsilon_r^{1/2}, r_0) \\ &= \Delta\Gamma + \Delta t\end{aligned}\quad (1)$$

这里, t, t^* 分别表示由光阴极发射的实际电子轨迹和近轴电子轨迹所经历的时间, $\varepsilon_z, \varepsilon_r$ 分别为电子从光阴极发射时的轴向初能量和径向初能量, ε_{z1} 为作为比较基准的近轴电子轨迹的轴向初能。取圆柱坐标系 (z, r) , 轴向坐标 z 自阴极面 $z_0 = 0$ 算起, r_0 为电子出射的径向初始矢量。

按式(1)的定义, 总的时间像差可分为近轴时间像差(或称时间色差)和几何时间像差两部分。近轴时间像差 $\Delta\Gamma$ 可表为:

$$\Delta t = t^*(z, \xi_z^{1/2}) - t^*(z, \xi_{z1}^{1/2}) = a_2(\xi_z^{1/2} - \xi_{z1}^{1/2}) + A_{22}(\xi_z - \xi_{z1}) \quad (2)$$

几何时间像差 Δt 可表为:

$$\Delta t = t(z, \xi_r^{1/2}, \xi_z^{1/2}, r_0) - t^*(z, \xi_z^{1/2}) \\ = A_{11}\xi_r + 2A_{13}\xi_r^{1/2}r_0 + A_{33}r_0^2 \quad (3)$$

式(2)表明,近轴时间像差 Δt 乃是 ξ_z 与 ξ_{z1} 两条不同的近轴轨迹在同一轴向位置 z 处的时间差异。式(3)表明,几何时间像差 Δt 乃是在相同的 ξ_z 下实际轨迹与近轴轨迹在同一轴向位置 z 处的时间差异。

于是,由式(1),总的时间像差可表为:

$$\Delta t = a_2(\xi_z^{1/2} - \xi_{z1}^{1/2}) + A_{22}(\xi_z - \xi_{z1}) + A_{11}\xi_r \\ + 2A_{13}\xi_r^{1/2}r_0 + A_{33}r_0^2 \quad (4)$$

这里 a_2 为一级近轴时间像差系数, A_{22} 为二级近轴时间像差系数; A_{11} 为二级几何时间球差系数, A_{33} 为二级几何时间畸变系数, A_{13} 为二级几何时间场曲系数。

3 t 变分法求时间像差系数的理论

如图1所示,电子自阴极平面 M_0 点发射的初始位置矢量为 r_0 , 方向角为 θ_0 , 初始电子的逸出角为 α_0 , 方位角为 β_0 , 电子逸出的初速度为 v_0 , $v_0 = \sqrt{\frac{2e}{m_0}}\xi_0$, $\xi_z^{1/2} = \xi_0^{1/2} \cos \alpha_0$, $\xi_r^{1/2} = \xi_0^{1/2} \sin \alpha_0$ 。

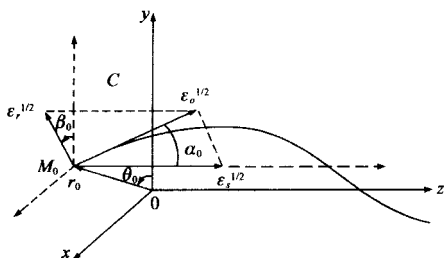


图1 电子自阴极面发射的初始状态

如所周知,电子在轴对称静电场中的运动由 Lorentz 方程描述:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e}{m_0} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}} \quad (5)$$

$$\ddot{z} = \frac{e}{m_0} \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

这里, $\Phi = \Phi(z, r)$ 为空间电位分布, 将位置矢量 r 以复数形式表示, $r = x + iy$. 空间电位分布便可表为

$$\Phi(z, r) = \phi(z) - \frac{r \cdot r^*}{4} \phi''(z) + \frac{(r \cdot r^*)^2}{64} \phi^{(4)}(z) - \dots \quad (6)$$

式中 $\phi = \phi(z)$ 为轴上电位分布, $\phi'' = \phi''(z)$, $\phi^{(4)} = \phi^{(4)}(z)$ 分别为轴上电位分布的二阶和四阶导数。

求解式(5)的初条件为

$$r(0) = r_0 e^{i\theta_0} \quad \dot{r}(0) = \sqrt{\frac{2e}{m_0}} \xi_r^{1/2} e^{i\beta_0}, \quad \theta_0 = \arg(r_0); \quad (7)$$

$$z(0) = 0 \quad \dot{z}(0) = \sqrt{\frac{2e}{m_0}} \xi_z^{1/2}$$

于是,式(5)的解可表为

$$r = r(t, \xi_r^{1/2}, \xi_z^{1/2}, r_0) \quad (8)$$

$$z = z(t, \xi_r^{1/2}, \xi_z^{1/2}, r_0)$$

如果已知电位分布 Φ 的同时, 给出了参数 $\xi_r^{1/2}$, $\xi_z^{1/2}$, r_0 值, 则在时间 t 的任一时刻唯一地确定了带电粒子的轨迹。参数 $\xi_r^{1/2}$, $\xi_z^{1/2}$, r_0 在我们考察的情况下被认为是一级小量。

由函数 $t = t(z_1, \xi_r^{1/2}, \xi_z^{1/2}, r_0)$ 的定义, 可得对任一固定的 $z_1 > 0$

$$z[t(z_1, \xi_r^{1/2}, \xi_z^{1/2}, r_0), \xi_r^{1/2}, \xi_z^{1/2}, r_0] = z_1 \quad (9)$$

此式对于所有参数 $\xi_r^{1/2}$, $\xi_z^{1/2}$, r_0 值都是成立的。由于 z_1 坐标的任意性, 故下标 1 我们有时便略去。

由于 t 变分法并不为从事电子光学工作者所熟悉, 故这里较为详细介绍其在求解时间像差表达式中的各阶像差系数中的应用。

现引入矢量符号 α ($\alpha_1 = \xi_r^{1/2}$, $\alpha_2 = \xi_z^{1/2}$, $\alpha_3 = r_0$), 将式(8)简写为如下形式:

$$z[t(z_1, \alpha), \alpha] = z_1 \quad (10)$$

将式(10)对 α_i 进行微分, 可得:

$$\frac{dz}{d\alpha_i} = \frac{\partial z}{\partial \alpha_i} \frac{\partial t}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial z}{\partial \alpha_i} = z t \alpha_i + z \alpha_i = 0 \quad (11)$$

$$\frac{d}{d\alpha_j} [z t \alpha_i + z \alpha_i] = (\dot{z} t \alpha_j + \dot{z} \alpha_j) t \alpha_i + \dot{z} \alpha_i \alpha_j + \dot{z} \alpha_i t \alpha_j + z \alpha_i \alpha_j = 0 \quad (12)$$

在式(12)的推导中我们应用了关系式 $z \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_j} \right) t \alpha_i = 0$

由式(11)、(12)可解得

$$t \alpha_i = -\frac{z \alpha_i}{z} \quad (13)$$

$$t \alpha_i \alpha_j = -\frac{\dot{z}}{z^2} z \alpha_i z \alpha_j + \frac{z \alpha_i \dot{z} \alpha_j + \dot{z} \alpha_i z \alpha_j}{z^2} - \frac{z \alpha_i \alpha_j}{z} \quad (14)$$

$$\text{由式(4)可得} \quad a_2 = \frac{\dot{z}}{\partial \alpha_2} = t \alpha_2 \quad (15)$$

$$A_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 t}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = \frac{1}{2} t \alpha_i \alpha_j \quad (16)$$

式中 $(ij) = (11), (13), (33), (22)$ 。

这样, 求时间像差系数 a_2, A_{ij} 实际归结于计算式(13)

(14)的右端项。我们现在就对它进行分析。

由电子运动方程式(5)的第一式, 利用关系式(6), 取其一阶项, 可以得到

$$\ddot{z} - \frac{e}{m_0} \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \ddot{z} - \frac{e}{m_0} \phi' = 0 \quad (17)$$

于是

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left[\ddot{z} - \frac{e}{m_0} \phi' \right] = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} (\ddot{z}) - \frac{e}{m_0} \frac{d\phi'}{dz} \frac{\partial z}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (18)$$

此即一阶偏导数(变分)的方程, 它具有如下形式:

$$T^{(1)}[z \alpha_i] = \ddot{z} \alpha_i - \frac{e}{m_0} \phi'' z \alpha_i = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (19)$$

这里, $T^{(1)}$ 为二阶微分算符, 它与时间 t 相关, $T^{(1)}$ 可表为

$$T^{(1)} = \frac{d^2}{dt^2} - \frac{e}{m_0} \phi'' \quad (20)$$

同样, 求二阶偏导数 (变分) 方程时, 需要考虑式 (6) 的二阶项, 则有

$$\ddot{z} - \frac{e}{m_0} \frac{\partial \phi}{\partial z} = \ddot{z} - \frac{e}{m_0} \phi' + \frac{e}{m_0} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^*}{4} \phi'''(z) = 0 \quad (21)$$

于是

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left[\ddot{z} - \frac{e}{m_0} \phi' + \frac{e}{m_0} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^*}{4} \phi'''(z) \right] = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} (\dot{z}) - \frac{e}{m_0} \frac{d\phi'}{dz} \frac{\partial z}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{4m_0} \phi''' (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_{\alpha_i}^* + \mathbf{r}^* \cdot \mathbf{r}_{\alpha_i}^*) = 0$$

$$\text{即 } \ddot{z}_{\alpha_i} - \frac{e}{m_0} \phi'' z_{\alpha_i} + \frac{1}{4m_0} \phi''' (\mathbf{r}^* \cdot \mathbf{r}_{\alpha_i} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_{\alpha_i}^*) = 0 \quad (22)$$

再对上述方程求偏导数

$$\ddot{z}_{\alpha_i \alpha_j} - \frac{e}{m_0} \phi'' z_{\alpha_i \alpha_j} - \frac{e}{m_0} \phi''' z_{\alpha_i} z_{\alpha_j} + \frac{1}{4m_0} \phi''' (\mathbf{r}_{\alpha_i} \mathbf{r}_{\alpha_j}^* + \mathbf{r}_{\alpha_i}^* \mathbf{r}_{\alpha_j}) = 0$$

因此

$$T^{(1)} [z_{\alpha_i}, \alpha_j] = \ddot{z}_{\alpha_i \alpha_j} - \frac{e}{m_0} \phi'' z_{\alpha_i \alpha_j} = \frac{e}{m_0} \phi''' \left[z_{\alpha_i} z_{\alpha_j} - \frac{1}{4} (\mathbf{r}_{\alpha_i} \mathbf{r}_{\alpha_j}^* + \mathbf{r}_{\alpha_i}^* \mathbf{r}_{\alpha_j}) \right] \quad (23)$$

这里, 电子轨迹 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(z)$ 应满足轴对称电子光学成像系统的近轴轨迹方程:

$$\phi_e(z) \mathbf{r}'' + \frac{1}{2} \phi_e'(z) \mathbf{r}' + \frac{1}{4} \phi_e''(z) \mathbf{r} = 0 \quad (24)$$

式中, $\phi_e(z) = \phi(z) + \varepsilon_z$. 式 (24) 的通解可表为

$$\mathbf{r}(z) = r_0 \mathbf{w}(z) + \frac{\sqrt{m_0}}{\sqrt{2e}} r_0 \mathbf{v}(z) \quad (25)$$

这里, 特解 $\mathbf{v} = \mathbf{v}(z)$, $\mathbf{w} = \mathbf{w}(z)$ 满足如下初条件^[4]:

$$\mathbf{v}(z_0 = 0) = 0, \quad \mathbf{v}'(z_0 = 0) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_z}} \quad (26)$$

$$\mathbf{w}(z_0 = 0) = 1, \quad \mathbf{w}'(z_0 = 0) = 0$$

现利用能量关系式:

$$\frac{m_0}{2} \dot{z}^2 = e \phi_e \quad (27)$$

将式 (19) 的 $T^{(1)} [z_{\alpha_i}]$ 中的 \dot{z}_{α_i} 展开为

$$\begin{aligned} \dot{z}_{\alpha_i} &= \frac{d^2}{dt^2} (z_{\alpha_i}) = \frac{d}{dz} \left(\frac{dz_{\alpha_i}}{dz} \frac{dz}{dt} \right) \frac{dz}{dt} \\ &= \frac{2e}{m_0} \phi_e \frac{d^2}{dz^2} (z_{\alpha_i}) + \frac{d}{dz} (z_{\alpha_i}) \frac{e}{m_0} \phi_e' \end{aligned} \quad (28)$$

将它代入式 (19), 可得

$$\phi_e \frac{d^2}{dz^2} (z_{\alpha_i}) + \frac{1}{2} \phi_e' \frac{d}{dz} (z_{\alpha_i}) - \frac{1}{2} \phi_e'' z_{\alpha_i} = 0 \quad (29)$$

令 $T^{(2)}$ 表示二阶线性微分算符

$$T^{(2)} = \phi_e \frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{2} \phi_e' \frac{d}{dz} - \frac{1}{2} \phi_e'' \quad (30)$$

于是有

$$T^{(2)} [z_{\alpha_i}] = 0 \quad (31)$$

同样, 可将式 (23) 的 $T^{(1)} [z_{\alpha_i \alpha_j}]$ 中的 $\dot{z}_{\alpha_i \alpha_j}$ 展开为

$$\dot{z}_{\alpha_i \alpha_j} = \frac{d}{dt^2} (z_{\alpha_i \alpha_j}) = \frac{2e}{m_0} \left[\phi_e \frac{d^2}{dz^2} (z_{\alpha_i \alpha_j}) + \frac{1}{2} \phi_e' \frac{d}{dz} (z_{\alpha_i \alpha_j}) \right] \quad (32)$$

故有

$$\begin{aligned} \dot{z}_{\alpha_i \alpha_j} - \frac{e}{m_0} \phi'' z_{\alpha_i \alpha_j} &= \frac{2e}{m_0} \left[\phi_e \frac{d^2}{dz^2} (z_{\alpha_i \alpha_j}) + \frac{1}{2} \phi_e' \frac{d}{dz} (z_{\alpha_i \alpha_j}) - \frac{1}{2} \phi_e' \frac{d}{dz} (z_{\alpha_i \alpha_j}) \right] \\ &= \frac{2e}{m_0} T^{(2)} (z_{\alpha_i \alpha_j}) \end{aligned} \quad (33)$$

故由式 (23) 可得

$$T^{(2)} (z_{\alpha_i \alpha_j}) = \frac{1}{2} \phi_e'' \left[z_{\alpha_i \alpha_j} - \frac{1}{4} (\mathbf{r}_{\alpha_i} \mathbf{r}_{\alpha_j}^* + \mathbf{r}_{\alpha_i}^* \mathbf{r}_{\alpha_j}) \right] \quad (34)$$

4 一级近轴时间像差系数的求解

现在我们求齐次方程 (31) $T^{(2)} [z_{\alpha_i}] = 0$ 在 ($i = 1, 2, 3$) 的解. 如文献 [1] 所述, $\varepsilon_z^{1/2}$ 和 r_0 并不引入近轴运动方程中, 故

$$z_{\alpha_i} = 0 \quad i = 1, 3 \quad (35)$$

因之, 由式 (13), $t_{\alpha_i} = 0$ ($i = 1, 3$) 于是 $a_1 = 0$, $a_3 = 0$ 故像差公式中不出现 a_1, a_3 系数项.

对 $i = 2$ 则 $\alpha_2 = \varepsilon_z^{1/2}$. 不难证明, 满足条件 $\dot{z}(0) = \frac{\sqrt{2e}}{\sqrt{m_0}}$ $\varepsilon_z^{1/2}$ 下方程 (31) 的解为

$$z_{\alpha_2} = \frac{2}{\phi_e'} \sqrt{\phi_e} \quad (36)$$

其初条件可表为

$$z_{\alpha_2} |_{z=0} = \frac{2}{\phi_e'} \sqrt{\varepsilon_z}, \quad \dot{z}_{\alpha_2} |_{z=0} = \frac{\sqrt{2e}}{\sqrt{m_0}} \quad (37)$$

这里 $\phi_e' = \phi_e'(0)$ 乃是阴极面中心的电位梯度, 令 $E_c = -\phi_e'$ 为阴极面中心的场强, 取负值. 由式 (13) 一级近轴时间像差系数或称一级时间色差系数可表为:

$$\begin{aligned} a_2 = t_{\alpha_2} &= \frac{\partial t}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial z}{\partial \alpha_2} \frac{1}{\frac{dz}{dt}} = \frac{-z_{\alpha_2}}{\dot{z}} = \frac{-\frac{2}{\phi_e'} \sqrt{\phi_e}}{\frac{\sqrt{2e}}{\sqrt{m_0}}} \\ &= -\frac{1}{\phi_e'} \sqrt{\frac{2m_0}{e}} = \frac{1}{E_c} \sqrt{\frac{2m_0}{e}} \end{aligned} \quad (38)$$

式 (38) 表明系数 a_2 将取负值, 其物理意义是: 具有某一轴向初速 $\varepsilon_z^{1/2} \neq 0$ 的带电粒子到达 z_1 位置的时间较另一轴向初速 $\varepsilon_z^{1/2} = 0$ 的带电粒子要短一些. 式 (38) 与文献 [5, 6] 中获得的阴极透镜时间渡越弥散公式相一致.

5 二级几何时间像差系数的求解

现在我们转到分析具有二级变分值的方程 (34) 的右端项, $r_{\alpha_i}^{(z)}$ 值按初始条件 (7) 及特解 (25), 便有

$$r_{\alpha_i}^{(z)} = \begin{cases} ve^{\beta_0}, & i=1 \\ 0, & i=2 \\ we^{\beta_0}, & i=3 \end{cases} \quad (39)$$

利用式 (39) 及式 (35) (36) 所有可能的组合, 便可将式 (34) 写成三阶矩阵的形式:

$$F = \begin{vmatrix} -\frac{1}{4}\phi''_v{}^2 & 0 & -\frac{1}{4}\phi'''_{vw} \cos(\theta_0 - \beta_0) \\ 0 & \frac{2}{\phi_0^2}\phi''_{\phi_*} & 0 \\ -\frac{1}{4}\phi'''_{vw} \cos(\theta_0 - \beta_0) & 0 & -\frac{1}{4}\phi'''_w{}^2 \end{vmatrix} \quad (40)$$

由于式 (7) 的初条件对于 $\varepsilon^{1/2}$, $\varepsilon_z^{1/2}$, r_0 的线性关系, 故变分形式的方程的初始条件都等于零, 对于 $(i, j) = (1, 3)$ 情况:

$$z_{\alpha_i} \alpha_j \big|_{z=0} = 0 \quad \dot{z}_{\alpha_i} \alpha_j \big|_{z=0} = 0 \quad (41)$$

由式 (34) 与式 (40), 便可得函数 $z_{\alpha_1 \alpha_3}$ 满足方程

$$T^{(z)} [z_{\alpha_1 \alpha_3}] = -\frac{1}{4}\phi'''_{vw} \cos(\theta_0 - \beta_0) \quad (42)$$

应用罗彼得法则, 得初条件

$$z_{\alpha_1 \alpha_3} \big|_{z=0} = 0 \quad z'_{\alpha_1 \alpha_3} \big|_{z=0} = 0 \quad (43)$$

将下列的关系式:

$$\frac{d}{dz} [v'w' \phi_* + \frac{1}{4}\phi''_{vw}] = \frac{1}{4}\phi'''_{vw} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} [\phi_* z'_{\alpha_1 \alpha_3} - \frac{1}{2}\phi'_{\alpha_1 \alpha_3}] &= \phi_* z''_{\alpha_1 \alpha_3} + \frac{1}{2}\phi' z'_{\alpha_1 \alpha_3} \\ &- \frac{1}{2}\phi'' z_{\alpha_1 \alpha_3} = T^{(z)} [z_{\alpha_1 \alpha_3}] \end{aligned} \quad (45)$$

置换式 (42) 的两端, 并进行积分,

$$\begin{aligned} \phi_* z'_{\alpha_1 \alpha_3} - \frac{1}{2}\phi' z_{\alpha_1 \alpha_3} &= -\cos(\theta_0 - \beta_0) (v'w' \phi_* \\ &+ \frac{1}{4}\phi''_{vw}) + C_1 \end{aligned}$$

由式 (43) 的初条件及特解初条件 (26), 可得 $C_1 = 0$ 于是

$$\phi_* z'_{\alpha_1 \alpha_3} - \frac{1}{2}\phi' z_{\alpha_1 \alpha_3} = -\cos(\theta_0 - \beta_0) (v'w' \phi_* + \frac{1}{4}\phi''_{vw}) \quad (46)$$

引入线性微分算符:

$$R^{(z)} = \phi_* \frac{d}{dz} - \frac{1}{2}\phi' \quad (47)$$

可将方程 (46) 表达成以下形式:

$$R^{(z)} [z_{\alpha_1 \alpha_3}] = - (v'w' \phi_* + \frac{1}{4}\phi''_{vw}) \cos(\theta_0 - \beta_0) \quad (48)$$

对于 $(i, j) = (1, 1)$ 情况, 由式 (34) 与式 (40), 便可得函数

$$z_{\alpha_1 \alpha_1} \text{ 满足方程 } T^{(z)} [z_{\alpha_1 \alpha_1}] = -\frac{1}{4}\phi'''_v{}^2 \quad (49)$$

仿照式 (44) (45) 的处理, 积分得

$$\phi_* z'_{\alpha_1 \alpha_1} - \frac{1}{2}\phi' z_{\alpha_1 \alpha_1} = - (v'^2 \phi_* + \frac{1}{4}\phi''_v{}^2) + C_2$$

常数 C_2 可由特解 v 的初条件求得: $C_2 = 1$

$$\text{最后可得 } R^{(z)} [z_{\alpha_1 \alpha_1}] = -v'^2 \phi_* - \frac{1}{4}\phi''_v{}^2 + 1 \quad (50)$$

对于 $(i, j) = (3, 3)$ 情况, 仿照上述, 将 $v \rightarrow w$ 下标 $1 \rightarrow 3$ 作相应的置换, 可得

$$\phi_* z'_{\alpha_3 \alpha_3} - \frac{1}{2}\phi' z_{\alpha_3 \alpha_3} = - (w'^2 \phi_* + \frac{1}{4}\phi''_w{}^2) + C_3$$

常数 C_3 可由特解 w 的初条件求得: $C_3 = \frac{1}{4}\phi''_0$

$$R^{(z)} [z_{\alpha_3 \alpha_3}] = -w'^2 \phi_* - \frac{1}{4}\phi''_w{}^2 + \frac{1}{4}\phi''_0 \quad (51)$$

将式 (48)、(50)、(51) 求得的 $z_{\alpha_i \alpha_j}$ 代入式 (14), 并考虑式 (35): $z_{\alpha_1} = 0$, $z_{\alpha_3} = 0$, $\dot{z}_{\alpha_1} = 0$, $\dot{z}_{\alpha_3} = 0$ 则由式 (14) 可得时间像差系数 A_{ij} 表达式如下:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \frac{1}{2} t_{\alpha_i \alpha_j} = \frac{1}{2} \left[-\frac{z_{\alpha_i \alpha_j}}{z} \right] = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{2n_0}{e}} \frac{z_{\alpha_i \alpha_j}}{\sqrt{\phi_*}} \\ &(i=1, j=3), (i=1, j=1), (i=3, j=3) \end{aligned} \quad (52)$$

由此可见, 式 (52) 的 A_{ij} 值是通过求解 (48)、(50)、(51) 的微分方程的 $z_{\alpha_i \alpha_j}$ 求得. 这是比较繁复的. 我们现在把它化为积分形式.

$$\text{若令 } z_{\alpha_i \alpha_j} = \sqrt{\phi_*} y_{ij}(z) \quad (53)$$

则式 (48) 变形为:

$$\phi_*^{3/2} y'_{13}(z) = -\cos(\theta_0 - \beta_0) (v'w' \phi_* + \frac{1}{4}\phi''_{vw}) \quad (54)$$

由此可解得:

$$\begin{aligned} y_{13}(z) &= -\int_0^z \frac{1}{[f(\phi(z) + \varepsilon_z)]^{3/2}} \cos(\theta_0 - \beta_0) \\ &\cdot \left[v'w' \phi_* + \frac{1}{4}\phi''_{vw} \right] dz \end{aligned} \quad (55)$$

于是, 由式 (52), 便得到 A_{13} 的积分表示式:

$$\begin{aligned} A_{13} &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2n_0}{e}} \int_0^z \frac{1}{[f(\phi(z) + \varepsilon_z)]^{3/2}} \cos(\theta_0 - \beta_0) \\ &\left[v'w' \phi_* + \frac{1}{4}\phi''_{vw} \right] dz \end{aligned} \quad (56)$$

与此完全类似, 利用式 (53) 的转换, 由方程 (50)、(51) 分别可解得:

$$y_{11}(z) = \int_0^z \frac{1}{[f(\phi(z) + \varepsilon_z)]^{3/2}} \left[- (v'^2 \phi_* + \frac{1}{4}\phi''_v{}^2) + 1 \right] dz \quad (57)$$

$$y_{33}(z) = \int_0^z \frac{1}{[f(\phi(z) + \varepsilon_z)]^{3/2}} \left[- (w'^2 \phi_* + \frac{1}{4}\phi''_w{}^2) + \frac{1}{4}\phi''_0 \right] dz \quad (58)$$

于是, 由式 (52), 便得到 A_{11} 和 A_{33} 的积分表示式:

$$A_{11} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2n_0}{e}} \int_0^z \frac{1}{[f(\phi(z) + \varepsilon_z)]^{3/2}} \left[(v'^2 \phi_* + \frac{1}{4}\phi''_v{}^2) - 1 \right] dz \quad (59)$$

$$A_{33} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2n_0}{e}} \int_0^z \frac{1}{[\phi(z) + \varepsilon_z]^{3/2}} \cdot \left[w'^2 \phi_* + \frac{1}{4} \phi'' w'^2 - \frac{1}{4} \phi''_0 \right] dz \quad (60)$$

式 (56)、(59) 和 (60) 所表示的二级几何时间像差系数表达式与“直接积分法”^[11]所导出的公式完全一致。

6 二级近轴时间像差系数的求解

对于 $(i, j) = (2, 2)$ 情况, 由式 (34) 与式 (40), 便可得函数 $z_{\alpha_2 \alpha_2}$ 满足方程

$$T^{(2)}[z_{\alpha_2 \alpha_2}] = \frac{2}{\phi_0^2} \phi''' \phi_* \quad (61)$$

它在初条件 $z_{\alpha_2 \alpha_2}|_{z=0} = 0$, $z'_{\alpha_2 \alpha_2}|_{z=0} = \frac{2}{\phi_0^2} \phi''_0$

下积分可得

$$\phi_* z'_{\alpha_2 \alpha_2} - \frac{1}{2} \phi' z_{\alpha_2 \alpha_2} = \frac{2}{\phi_0^2} (\phi_* \phi'' - \frac{1}{2} \phi'^2) + C_4 \quad (62)$$

由初条件得 $C_4 = 1$

$$\phi_* z'_{\alpha_2 \alpha_2} - \frac{1}{2} \phi' z_{\alpha_2 \alpha_2} = \frac{2}{\phi_0^2} (\phi_* \phi'' - \frac{1}{2} \phi'^2) + 1 \quad (63)$$

$$\text{即 } R^{(2)}[z_{\alpha_2 \alpha_2}] = \frac{2}{\phi_0^2} (\phi_* \phi'' - \frac{1}{2} \phi'^2) + 1 \quad (64)$$

其解便是 $z_{\alpha_2 \alpha_2}$, 其初始条件应满足式 (62)。

由式 (14) 的 $t_{\alpha_i \alpha_j}$ 表达式, 令 $i = 2, j = 2$ 代入 $z_{\alpha_2 \alpha_2}$ 及

$$\ddot{z} = \frac{e}{m_0} \phi', \dot{z} = \sqrt{\frac{2e}{n_0}} \phi_*, z_{\alpha_2} = \frac{2}{\phi_0'} \sqrt{\phi_*}$$

$$\dot{z}_{\alpha_2} = \frac{d}{dt}(z_{\alpha_2}) = \frac{dz}{dt} \frac{dt}{dz} \left(\frac{2}{\phi_0'} \sqrt{\phi_*} \right) = \sqrt{\frac{2e}{n_0}} \frac{\phi'}{\phi_0'}$$

各式, 并利用式 (16) 的 A_{ij} 表达式, 可以求得

$$A_{22} = \frac{1}{2} t_{\alpha_2 \alpha_2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2n_0}{e}} \left[\frac{\phi'}{\sqrt{\phi_*} \phi_0'^2} - \frac{z_{\alpha_2 \alpha_2}}{2 \sqrt{\phi_*}} \right] \quad (65)$$

$$\text{若令 } z_{\alpha_2 \alpha_2} = \frac{2\phi'}{\phi_0'^2} - y_{22} \quad (66)$$

代入式 (63), 得到

$$\phi_* \frac{2\phi''}{\phi_0'^2} - \phi_* y'_{22} - \frac{1}{2} \frac{2\phi'^2}{\phi_0'^2} + \frac{1}{2} \phi' y_{22} = \frac{2}{\phi_0'^2} (\phi_* \phi'' - \frac{1}{2} \phi'^2) + 1$$

$$\text{由此可得 } \phi_* y'_{22} - \frac{1}{2} \phi' y_{22} + 1 = 0 \quad (67)$$

$$\text{其解为 } y_{22}(z) = \frac{2}{\phi'} + 2 \sqrt{\phi_*} \int_0^z \frac{\phi''}{\sqrt{\phi_*} \phi'^2} dz \quad (68)$$

将式 (68) 代入式 (66), 便可证明 $z'_{\alpha_2 \alpha_2}$ 确实满足式 (62)。

我们便可把式 (65) 写成如下形式:

$$A_{22} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2n_0}{e}} \frac{1}{\sqrt{\phi_*}} \left\{ \frac{2}{\phi'} + 2 \sqrt{\phi_*} \int_0^z \frac{\phi''}{\sqrt{\phi_*} \phi'^2} dz \right\} \quad (69)$$

为了避免 A_{22} 的计算当 $\varepsilon_z = 0$ 时式 (69) 在表面上似乎趋于无穷大的困难, 文献 [1] 提出了足以精确描述式式 (69) 的如下表示式:

$$A_{22} = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{2n_0}{e}} \int \frac{1}{\phi(z)^{3/2}} dz \quad (70)$$

7 结束语

本文由时间像差的定义出发, 以轴向电子初能为 ε_{z1} ($0 \leq \varepsilon_{z1} \leq \varepsilon_{0max}$) 作为参考基准, 用变分法导出了一级近轴时间像差公式、二级近轴时间像差系数的积分表达式和以微分方程形式表示的二级几何时间像差系数表达式。本文推广了文献 [3] 的应用范围, 并将 t 变分法以微分方程形式表示二级几何时间像差系数表达式转换为积分形式。本文证明, 尽管直接积分法与 t 变分法在数学处理上有很大的差异, 但殊途同归, 其时间像差系数的表达式实质是完全一致的。

参考文献:

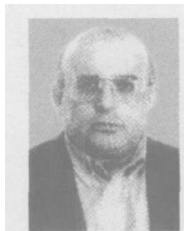
- [1] 周立伟, 李元, 张智铨, M A Monastyrskii M Ya Schelev 直接积分法研究电子光学成像系统的时间像差理论 [J]. 物理学报, 2005, 54(8): 3591-3596
- [2] 周立伟, 李元, 张智铨, M A Monastyrskii M Ya Schelev 静电聚焦同心球系统验证电子光学成像系统的时间像差理论 [J]. 物理学报, 2005, 54(8): 3597-3603
- [3] Monastyrskii M A, Schelev M Ya Theory of temporal aberrations of cathode lenses [R]. Lebedev Institute of Physics Moscow, 1980
- [4] 周立伟. 宽束电子光学 [M]. 北京: 北京理工大学出版社, 1993
- [5] Savoisky Y K, Fanchenko S D. Physical basis of electron optical chronograph [J]. Report of Academy of Sciences USSR, 1956 108(2): 218-221 (in Russian)
- [6] LW Chou Electron optics of concentric spherical electromagnetic focusing systems [J]. Advances in Electronics and Electron Physics 1979 52 119-132

作者简介:



周立伟 男, 汉族, 1932年9月生于上海, 浙江省诸暨市人, 中国工程院院士、北京理工大学教授、首席专家、博士生导师, 长期在宽束电子光学、夜视技术和光电子成像领域从事教学与科研工作, 研究方向为静态和动态宽束电子光学的理论与计算、变像管和像增强器计算机辅助设计与光电子成像技术。

E-mail: zhoulw@vip.sina.com



莫纳斯武尔斯基 (Mkhail A. Monastyrskii) 教授, 1950年7月生。俄罗斯科学院普通物理研究所光子部“飞秒衍射计的数学方法”实验室主任, 俄罗斯“应用物理”学报编委, 1980年获物理数学副博士 (Ph D) 学位, 1992年在俄罗斯科学院普通物理研究所获物理数学博士 (D. Sc) 学位。主要研究方向为电子光学理论与设计, 发表了 120 余篇论文和三部专著。E-mail: monas@ram.gpi.ru