

提高谐波参量测量精度的谱泄漏相消算法

张介秋^{1,2}, 梁昌洪¹, 陈砚圃³, 韩峰岩⁴

(1. 西安电子科技大学天线与微波国家重点实验室, 陕西西安 710071; 2. 空军工程大学理学院, 陕西西安 710051; 3. 西安通信学院计算机教研室, 陕西西安 710106; 4. 西安交通大学电子与信息工程学院, 陕西西安 710049)

摘 要: 提出一种能有效提高谐波参量测量精度的新算法. 该法通过两个采样起点约间隔半个信号周期的采样数据作加窗傅里叶变换, 并利用它们将谱泄漏抵消, 从而有效地改善谐波分析的精度. 所提出的方法适用于任何形式的对称窗函数. 理论分析与数值模拟结果均表明: 该算法可显著提高容易被强谐波所掩盖的弱谐波的谱分析精度从而提高谱分析的整体测量精度.

关键词: 谐波分析; 频谱泄漏; 测量误差; 误差分析; 同步误差

中图分类号: TM93 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2005) 09-1614-04

Spectral Leakage Canceling Algorithm for Improving Precision of Harmonic Analysis

ZHANG Jie-qiu^{1,2}, LIANG Chang-hong¹, CHEN Yan-pu³, HAN Feng-yan⁴

(1. National Key Laboratory of Antennas and Microwave Technology, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China; 2. College Science, Airforce Enginnering University, Xi'an, Shaanxi 710051, China; 3. Computer Section, Xi'an Communication Institute, Xi'an, Shaanxi 710106, China; 4. School of Electron & Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an, Shaanxi 710049, China)

Abstract: We propose a novel algorithm that can effectively reduce the errors of the harmonic parameters estimates of a periodic signal by counteracting the spectral leakage of the windowing FFT of two sampling data sequences, which stagger about half period. Proposed algorithm can be applied to any window function with central symmetry. Theory analysis and simulation results show that the algorithm can significantly improve the precision of harmonic parameter estimates.

Key words: harmonic analysis; spectral leakage; error analysis; measurement error; synchronous error

1 引言

加窗 FFT 已广泛应用于谐波测量. 由于实时性的需要或者信号周期(基频)的随机漂移, 采样序列的时窗宽度通常只有几个周期且采样频率很难取得刚好等于信号基频的整数倍从而出现所谓不同步采样现象. 窄窗及不同步采样的结果将导致各谐波间出现显著的频谱泄漏现象. 它是导致谐波参量测量误差的主要因素, 特别是较弱的谐波分量, 容易受到与之靠近的强谐波分量的掩蔽而无法测量. 对采样数据序列加窗^[1~7]是减少谱泄漏的有效手段. 但是对于短时平稳信号(假定采样序列的时长一定), 提高测量精度(减少谱泄漏)与增加频率分辨率两者是一对不可调和的矛盾, 要想提高测量精度, 通常以牺牲一定的频率分辨率为代价.

本文提出一种新算法, 该算法利用两段在时间上错开约半个信号周期、长度相同的采样序列, 分别对它们作加窗快速傅里叶变换(FFT), 把它们的部分关键的泄漏谱抵消, 从而大

大减少长程谱泄漏对谐波参量反演的影响而不影响频率分辨率. 所提出的这种新算法对于提高弱谐波分量的振幅与相位的测量精度效果特别明显. 由于弱谐波分量的测量精度是制约整个谐波测量精度提高的瓶颈, 因此该方法能够非常显著的提高谐波测量的整体精度.

2 谐波分析中的常用窗函数

2.1 矩形窗

宽度为 T_0 的矩形窗表示为:

$$w_1(t) = \frac{1}{T_0} \text{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right) = \begin{cases} 1/T_0, & |t/T_0| \leq 1/2 \\ 0, & |t/T_0| > 1/2 \end{cases} \quad (1)$$

其傅里叶变换为(记 $f_0 = 1/T_0$):

$$W_1(f) = \int_{-\infty}^{\infty} w_1(t) e^{-j2\pi f t} dt = \frac{\sin(\pi f/f_0)}{f/f_0} \quad (2)$$

2.2 p 项余弦窗函数

在谐波分析中, 一般都使用 p 项余弦窗. p 项组合余弦窗

可表示为(窗宽取为 pT_0)^[1,8]:

$$w(t) = \frac{1}{pT_0} \text{rect}\left(\frac{t}{pT_0}\right) \prod_{l=0}^{p-1} a_l \cos\left(\frac{2-lt}{pT_0}\right) \quad (5)$$

其傅里叶变换 $W(f)$ 可表示为:

$$W(f) = \text{sinc}(pf/f_0) \left[a_0 + \sum_{l=1}^{p-1} \frac{(-1)^l a_l (pf/f_0)^2}{(pf/f_0)^2 - l^2} \right] \quad (6)$$

不难证明它们的主瓣半宽及旁瓣宽度均为 f_0 .

2.3 p 阶卷积窗^[6,9,10]

设时域窗函数 $w_p(t)$ 是宽度为 T_0 (信号周期 T_s 的初估值) 的矩形窗的 p 重卷积:

$$w(t) = w_1(t) * w_1(t) * \dots * w_1(t) \quad (7)$$

根据卷积定理,其相应的傅里叶变换 $W_p(f)$ 为:

$$W(f) = [\text{sinc}(f/f_0)]^p = \left[\frac{\sin(\pi f/f_0)}{f/f_0} \right]^p \quad (8)$$

以上这些窗函数(p 项余弦窗和 p 阶卷积窗)的时域长度为 pT_0 ,但频域主瓣半宽均为 $f_0 = 1/T_0$,且在时域上均为实对称函数,从而保证其在频域上也是实对称函数.

3 周期信号的加窗傅里叶分析

3.1 周期信号及其傅里叶变换

设最高谐波次数为 M ,周期为 T_s (基频为 $f_s = 1/T_s$) 的周期信号为 $g(t)$ (为使写法简洁,假定 $t_0 = 0$):

$$g(t) = A_0 + \sum_{m=1}^M A_m \cos(2\pi m f_s t + \phi_m) = \sum_{m=0}^M \frac{A_m}{2} [e^{j(2\pi m f_s t + \phi_m)} + e^{-j(2\pi m f_s t + \phi_m)}] \quad (9)$$

记 $g(t)$ 的傅里叶变换为 $G(f)$,则有:

$$G(f) = \sum_{m=0}^M \frac{A_m}{2} [(f - m f_s) e^{j\phi_m} + (f + m f_s) e^{-j\phi_m}] \quad (10)$$

显然,周期信号的频谱为线状谱,除直流分量外,其余各次谐波均分为正、负频分量,大小为谐波幅值的一半, ϕ_m 为 $t = 0$ 时各谐波的相位.

3.2 加窗周期信号及其傅里叶变换

对于中心在 t_0 ,时间长度为 pT_0 的连续时间信号进行加窗处理.假定窗函数为实对称,记为 $w(t)$,其傅里叶变换记为 $W(f)$,加窗信号记为 $h(t, t_0)$:

$$h(t, t_0) = w(t - t_0) g(t) = w(t) g(t + t_0) \quad (11)$$

根据傅里叶变换位移定理, $g(t + t_0)$ 的傅里叶变换为: $G(f) \exp(j2\pi f t_0)$.再根据傅里叶变换的卷积定理,加窗信号 $h(t, t_0)$ 的傅里叶变换 $H(f, t_0)$ 为:

$$H(f, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} W(f - f') G(f') \exp(j2\pi f' t_0) df' = \sum_{m=0}^M \frac{A_m}{2} [W(f - m f_s) e^{j\phi_m} + W(f + m f_s) e^{-j\phi_m}] \quad (12)$$

其中 f_s 为信号基频, ϕ_m 为窗中心 t_0 处第 m 次谐波的相位:

$$\phi_m = 2\pi m f_s t_0 + \phi_m \quad (13)$$

式(12)为加窗周期信号的频谱的一般公式,对于任意窗函数均成立.当窗函数 $w(t)$ 为实对称函数时, $W(f)$ 也为实对称函数且与 t_0 无关.

3.3 频谱泄漏效应分析

快速傅里叶变换(FFT)能大大减少傅里叶变换的计算量,但由于栅栏效应,只能得到一组频率格点上的谱值,信号的各谐波频率真值一般都不在这些频率格点上.但若窗宽为 pT_0 (p 为整数),则 $f = k f_0$ (k 为整数)将落在这些频率格点上.为此将式(12)中的频率取为 $f = k f_0$,并利用 $f_s = (1+x) f_0$ 及窗谱的实对称性,可得到:

$$H(k f_0, t_0) = \frac{A_k}{2} W(x k f_0) e^{j\phi_k} + \frac{A_k}{2} W(2 k f_0 + x k f_0) e^{-j\phi_k} + \sum_{m=0, m \neq k}^M \frac{A_m}{2} [W(k f_0 - m f_s) e^{j\phi_m} + W(k f_0 + m f_s) e^{-j\phi_m}] \quad (14)$$

当 $k = 0$ 时,第一项是第 k 次谐波的正频部分的复振幅乘以代表短程谱泄漏(主瓣内泄漏)的实衰减因子 $W(x k f_0)$.

第二项为第 k 次谐波的负频部分在 $k f_0$ 处产生的长程谱泄漏.求和号里各项为其它谐波在 $k f_0$ 处产生的长程谱泄漏.当窗谱的旁瓣较低时,若忽略所有的长程谱泄漏,这时有:

$$H(k f_0, t_0) \begin{cases} A_0, & k = 0 \\ \frac{A_k}{2} W(x k f_0) e^{j2\pi k f_s t_0 + \phi_k}, & k \neq 0 \end{cases} \quad (15)$$

所略去的长程谱泄漏的大小既依赖于窗的形状,也依赖于信号的频谱结构,是泄漏谱的相干叠加.

4 谐波参量的反演公式

4.1 振幅与相位的传统反演算法

由式(15)可求得信号的各次谐波的振幅及相位:

$$\begin{cases} A_0 & H(0, t_0) \\ A_k & 2|H(k f_0, t_0)| / W(x k f_0) \\ \phi_k & 2\pi k f_s (1+x) t_0 + \phi_k = \arg[H(k f_0, t_0)] \end{cases} \quad (16)$$

这就是传统的谐波参量反演算法,其误差由长程谱泄漏的大小决定.对于与强谐波相邻的弱谐波,强谐波的谱泄漏有可能大于该弱谐波从而将其完全掩蔽而无法反演,或使其反演误差很大.提高谐波参量测量精度的难度在于弱谐波.强谐波的测量精度通常都是足够高的,因为它受弱谐波谱泄漏的影响很小.

4.2 振幅与相位的新反演算法

若将窗的中心向后移动半信号周期,即从 t_0 移至 $t_0 + T_s/2$,由式(14)不难得到:

$$(-1)^k H(k f_0, t_0 + T_s/2) = \frac{A_k}{2} W(x k f_0) e^{j\phi_k} + \frac{A_k}{2} W(2 k f_0 + x k f_0) e^{-j\phi_k} + \sum_{m=0, m \neq k}^M (-1)^{k-m} \frac{A_m}{2} [W(k f_0 - m f_s) e^{j\phi_m} + W(k f_0 + m f_s) e^{-j\phi_m}] \quad (17)$$

将式(14)和式(17)项加得:

$$H(k f_0, t_0) + (-1)^k H(k f_0, t_0 + T_s/2) = A_k W(x k f_0) e^{j\phi_k} + A_k W(2 k f_0 + x k f_0) e^{-j\phi_k} + \sum_{\substack{m=0, m \neq k \\ m-k=\text{偶数}}}^M (-1)^{k-m} \frac{A_m}{2} [W(k f_0 - m f_s) e^{j\phi_m} + W(k f_0 + m f_s) e^{-j\phi_m}] \quad (18)$$

可见这时与 k 次谐波相隔为奇数次的谐波的长程谱泄漏已



个周期,采样总点数为288,FFT的点数是256.用四项Blackman-Harris窗与四阶卷积窗的所得的相位误差(以角度数表示)和振幅相对误差的模拟结果如图3、4所示.在相对频偏为1%(即基频频偏 $\pm 0.5\text{Hz}$)时,新算法的最大振幅及相位测量误差均可比原算法减少1~2个量级.

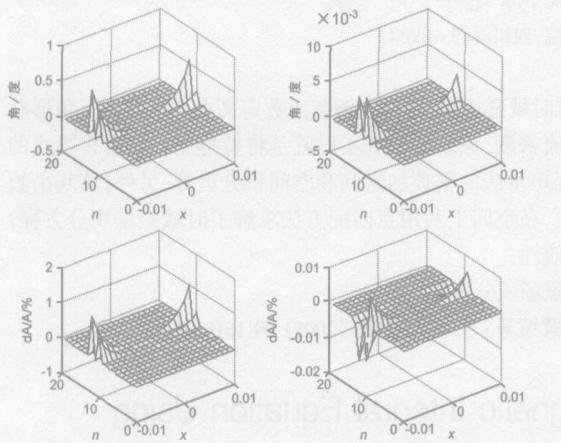


图4 原算法(左)、新算法(右)的对比.用四阶卷积窗

我们还特别注意到:对于本文的模拟信号,用二阶卷积窗+新算法的测量精度(见图2右)甚至比Blackman-Harris窗+旧算法的测量精度(见图3左)还高.而短窗对于短时平稳信号的分析是至关重要的.

6 结论

本文提出一种基于泄漏谱相干相消的周期信号谐波分析新算法,在不影响频率分辨率的前提下能极为有效地减少长程谱泄漏的影响,从而提高谐波分析的精度.数值模拟结果表明:对本文所给出的模拟信号,在同步偏差为1%的情况下,最大相位误差及最大振幅相对误差一般可减少1~2个量级.当然减少的程度依赖于信号的谱振幅分布.该法的代价是增加了一次傅里叶变换.所提出的算法适合于任何具有中心对称性的窗函数,但卷积窗的相消效果要好于多项余弦窗.

参考文献:

- [1] Harris F.J. On the use of windows for harmonic analysis with the discrete Fourier transform[J]. Proc IEEE, 1978, 66(1): 51 - 83.
- [2] Offelli C, Petri D. The influence of windowing on the accuracy of multi-frequency signal parameter estimation[J]. IEEE Trans. 1992. IM - 41 (4): 256 - 261.
- [3] Grandke T. Interpolation algorithms for discrete Fourier transforms of weighted signals[J]. IEEE Trans on Instrum Meas., 1983, 32(6): 350 - 355.
- [4] Andria G, Savino M, Tiotta A. Windows and interpolation algorithms to improve electrical measurement accuracy[J]. IEEE Trans on Instrum Meas, 1989, 38(4): 856 - 863.
- [5] 潘文, 钱俞寿, 周鸢. 基于加窗插值FFT的电力谐波测量理论窗函数研究[J]. 电工技术学报, 1994, 9(1): 50 - 54.
Pan Wen, Qian Yushou, Zhou E. Power harmonics measurement based on windows and interpolated FFT. Study of Windows[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 1994, 9(1): 50 - 54. (Chinese Source)
- [6] Zhang Jie-qiu, Liang Chang-hong, Chen Yan-pu. A new family of windows—convolution windows and their applications[J]. 2005, Science in China (Series E), 48(4): 468 - 480.
- [7] 赵文春, 马伟明, 胡安. 电机测试中谐波分析的高精度FFT算法[J]. 中国电机工程学报, 2001, 21(12): 83 - 92.
Zhao Wenchun, Ma Weiming, Hu An. FFT Algorithms with high accuracy for harmonic analysis in the electric machine[J]. Proceedings of the CSEE, 2001, 21(12): 83 - 92. (Chinese Source)
- [8] Nuttall A. Some windows with very side-lobe behavior[J]. IEEE Trans., 1981, ASSP-29(1): 84 - 91.
- [9] 张介秋, 梁昌洪, 陈砚圃. 卷积窗及其在电力系统参量估计中的应用[J]. 电子学报, 2004, 32(12): 2013 - 2016.
Zhang Jie-qiu, Liang Chang-hong, Chen Yan-pu. Convolution window and application in ac electrical parameters estimation[J]. Acta Electronica Sinica, 2004, 32(12): 2013 - 2016. (Chinese Source)
- [10] 张介秋, 梁昌洪, 陈砚圃. 基于卷积窗的电力系统谐波理论与算法[J]. 中国电机工程学报, 2004, 24(11): 48 - 52.
Zhang Jie-qiu, Liang Chang-hong, Chen Yan-pu. Power system harmonic theory analysis and algorithm based on convolution windows[J]. Proceeding of the CSEE, 2004, 24(11): 48 - 52. (Chinese Source)

作者简介:



张介秋 男, 1962年生于广东汕头, 现为空军工程大学副教授, 硕士生导师, 研究方向为信号与信息处理, 电磁场与微波技术。
E-mail: zhangjiq@163.com.



梁昌洪 男, 1943年生于上海, 教授, 博士生导师, IEEE高级会员, 研究方向为电磁场与微波技术、计算电磁学、电磁兼容等. 首届全国“国家级教学名师奖”获得者.

陈砚圃 男, 1963年生于河北元氏, 教授, 博士, 研究方向为语音信号处理.