表面电流可用每一个曲边三角形贴片上电流的叠加来表示,

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)=\sum_{p=1}^{P}\boldsymbol{J}_p(\boldsymbol{r},t) \tag{9}$$

其中, P 为模拟目标表面的所有曲边三角形贴片总数, $\boldsymbol{J}_p(\boldsymbol{r},t)$ 表示第 p 个贴片上的电流. $\boldsymbol{r}$ 空间中的任意曲边三角形贴片均可以映射到参数坐标空间 (u,v) 中的单位直角三角形(如图 1), 而表面电流 $\boldsymbol{J}_p(\boldsymbol{r},t)$ 仅有两个自由度, 因此任意表面电流在 (u,v) 空间中可表示成

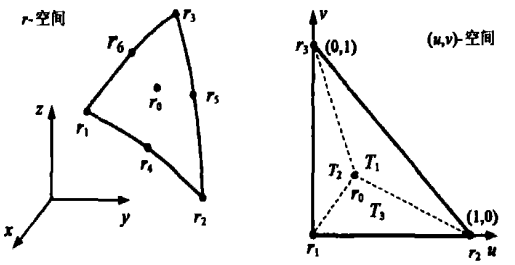

图 1 在 r 空间坐标系中六个结点的曲边三角形贴片映射到参数空间坐标系(u,v)中的直角三角形。

$$\boldsymbol{J}_p(\boldsymbol{r},t)=\frac{I_p^u(t)\,\boldsymbol{u}+I_p^v(t)\,\boldsymbol{v}}{J_s(u,v)} \tag{10}$$

其中, $\boldsymbol{u}=\partial\boldsymbol{r}/\partial u$ 和 $\boldsymbol{v}=\partial\boldsymbol{r}/\partial v$ 为单位协变矢量, 且 $J_s(u,v)=|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}|$ 为曲边三角形贴片的雅可比因子. 利用式(4)对式(10)中的 $I_p^u(t)$ 和 $I_p^v(t)$ 进行插值后, 第 p 个曲边三角形贴片上的表面电流 $\boldsymbol{J}_p(\boldsymbol{r},t)$ 可以表示为

$$\boldsymbol{J}_p=\sum_{i=1}^{I_p}\frac{L_{(i,p)}(u,v)}{J_s(u,v)}[I_{(i,p)}^u(t)\,\boldsymbol{u}+I_{(i,p)}^v(t)\,\boldsymbol{v}] \tag{11}$$

通过适当的推导, 可以将式(11)等价地表示成为

$$\boldsymbol{J}_p(\boldsymbol{r},t)=\sum_{i=1}^{I_p}\bar{\boldsymbol{L}}_{(i,p)}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{J}_p(\boldsymbol{r}_i,t) \tag{12}$$

其中 $\boldsymbol{r}_i(i=1,2,\cdots,I_p)$ 为插值点的空间坐标; 而拉格朗日插值算子 $\bar{L}_{(i,p)}(\boldsymbol{r})$ 具有特性,

$$\bar{\boldsymbol{L}}_{(i,p)}(\boldsymbol{r}_j)=\bar{\boldsymbol{I}}\delta_{ij} \tag{13}$$

其中 $\bar{\boldsymbol{I}}$ 为单位并矢. 实际上, 式(12)可以看做是电流 $\boldsymbol{J}_p(\boldsymbol{r})$ 的展开式: 将 $\bar{\boldsymbol{L}}_{(i,p)}(\boldsymbol{r})$ 作为基函数, 而将 $\boldsymbol{J}_p(\boldsymbol{r}_i,t)$ 作为待求的展开系数. 由于插值算子 $\bar{\boldsymbol{L}}_{(i,p)}(\boldsymbol{r})$ 具有式(13)的特性, 使得矩量法中表面积分的运算得以大大简化. 例如, 考虑曲边三角形贴片上的积分:

$$\int_{\Delta_p}f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\,\bar{\boldsymbol{L}}_{(i,p)}(\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{J}_p(\boldsymbol{r}_i,t)\,ds' \tag{14}$$

其中 $f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 为积分核函数. 若场点 $\boldsymbol{r}$ 不在三角形贴片 p 的附近, 利用高斯积分法可得,

$$\sum_{s=1}^{I_G}w_s f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_s)\,\bar{\boldsymbol{L}}_{(i,p)}(\boldsymbol{r}_s)\cdot\boldsymbol{J}_p(\boldsymbol{r}_i,t) \tag{15}$$

其中 I_G 为高斯积分结点个数; w_s 为高斯积分的加权系数; $\boldsymbol{r}_s$ 为高斯积分结点的空间坐标. 当高斯积分结点 $\boldsymbol{r}_s$ 选为拉格朗日多项式的插值点 $\boldsymbol{r}_i$ 时, 利用式(13), 积分式(15)可以写成

$$w_s f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_i)\,\boldsymbol{J}_p(\boldsymbol{r}_i,t) \tag{16}$$

这样, 式(16)就极大地简化了积分运算、降低了计算量.

3 时域磁场积分方程及其时间步进算法求解

假设任意形状金属导体的表面为 S、入射磁场为 $\boldsymbol{H}^{\mathrm{inc}}(\boldsymbol{r},t)$, 该磁场在导体表面 S 上所产生的感应电流为 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)$, 则表面电流所产生的散射场 $\boldsymbol{H}^{\mathrm{scat}}(\boldsymbol{r},t)$ 可以写成

$$\boldsymbol{H}^{\mathrm{scat}}(\boldsymbol{r},t)=\nabla\times\int_S\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}',\tau)}{4\pi R}dS' \tag{17}$$

其中, 场点与源点间的距离 $R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$, 推迟时间 $\tau=t-R/c$. 由金属导体表面上的磁场所满足的边界条件: $\hat{\boldsymbol{n}}\times[\boldsymbol{H}^{\mathrm{scat}}(\boldsymbol{r},t)+\boldsymbol{H}^{\mathrm{inc}}(\boldsymbol{r},t)]=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)$, 则式(17)可写成

$$\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)}{2}-\hat{\boldsymbol{n}}\times\int_S\left(1+\frac{R\partial\boldsymbol{J}}{c\partial t}\right)\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}',\tau)\times\frac{\boldsymbol{R}}{4\pi R^2}dS'=\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}^{\mathrm{inc}}(\boldsymbol{r},t) \tag{18}$$

其中, $\hat{\boldsymbol{n}}$ 是指散射体表面 S 的单位法向矢量, 波的传播速度 $c=1/\sqrt{\mu\varepsilon}$.

利用式(9)和(11)以及时间插值基函数 $T_l(t)=T(t-l\Delta t)$(Δt 为时间步长), 可以将时域表面电流 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)$ 展开为

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)=\sum_{l=1}^{N_t}\sum_{p=1}^{P}\sum_{m=1}^{I_p}\frac{L_{(m,p)}(u,v)}{J_s(u,v)}\cdot[I_{(m,p)}^{u,l}\,\boldsymbol{u}+I_{(m,p)}^{v,l}\,\boldsymbol{v}]T_l(t) \tag{19}$$

其中, $I_{(m,p)}^{u,l}$ 和 $I_{(m,p)}^{v,l}$ 为时刻 $l\Delta t$ 表面电流在第 p 个单元上第 m 个插值点处的两个切向分量的待求系数; N_t 为时间迭代步数.

将电流的展开式(19)代入时域磁场积分式(18), 并且在时刻 $t=t_k=k\Delta t$ 上和在空间高斯插值点 $\boldsymbol{r}_{(n,q)}$ 上均采用点匹配方法, 可以得到

$$\boldsymbol{M}_0\cdot\boldsymbol{J}_k=\boldsymbol{F}_k^{\mathrm{inc}}-\sum_{l=1}^{k-1}\boldsymbol{M}_l\cdot\boldsymbol{J}_{k-l} \tag{20}$$

其中 $\boldsymbol{F}_k^{\mathrm{inc}}$ 和 $\boldsymbol{J}_k(k=1,2,\cdots,N_t)$ 为 $N_d=2P\times I_p$ 维的矢量, 其对应的元素为

$$\left(\boldsymbol{F}_k^{\mathrm{inc}}\right)_\alpha=4\pi\alpha_{(n,q)}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_{(n,q)}\times\boldsymbol{H}^{\mathrm{inc}}(\boldsymbol{r}_{(n,q)},t_k),\ \alpha=\boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \tag{21}$$

$$\left(\boldsymbol{J}_k\right)_\alpha=I_{(m,p)}^{\alpha,k},\ \alpha=u,v \tag{22}$$

而 $M_l(l=0,1,\cdots)$ 为 $N_d\times N_d$ 维矩阵, 且有

$$\boldsymbol{M}_l\cdot\boldsymbol{J}_{k-1}=\sum_{p=1}^{P}\sum_{m=1}^{I_p}\begin{bmatrix}B_{l,uu} & B_{l,uv}\\ B_{l,vu} & B_{l,vv}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_{(m,p)}^{u,k-1}\\ I_{(m,p)}^{v,k-1}\end{bmatrix} \tag{23}$$

其对应的元素为

$$B_{l,\alpha\beta}=2\pi\alpha_{(n,q)}\cdot\beta_{(m,p)}J_{s(m,p)}^{-1}\delta_{mn}\delta_{pq}\cdot T(l\Delta t)-\alpha_{(n,q)}\cdot\int_{S_p}dS'$$

$$L_{(m,p)}(\boldsymbol{r}')\cdot\frac{\hat{\boldsymbol{n}}_{(n,q)}\times\beta\times\boldsymbol{R}}{J_s(\boldsymbol{r}')R^2}\left(T(\tau_l)-\frac{R\partial T(\tau_l)}{c\partial t}\right) \tag{24}$$

其中 $\beta=\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 且 $\tau_l=l\Delta t-R/c$. 当场点单元 q 离源点单元 p 较远时, 利用高斯积分法有

$$B_{l,\alpha\beta}=-w_{(m,p)}\left(T-\frac{R_{nm}\partial T}{c\partial t}\right)(\tau_{l,nm})\cdot\alpha_{(n,q)}\cdot\frac{\hat{\boldsymbol{n}}_{(n,q)}\times\beta_{(m,p)}\times\boldsymbol{R}_{nm}}{R_{nm}^2} \tag{25}$$

其中 $R_{nm}=|\boldsymbol{r}_{(n,q)}-\boldsymbol{r}_{(m,p)}|$ 且 $\tau_{l,nm}=l\Delta t-R_{nm}/c$; 由式(25)可以看出, 时域阻抗矩阵元素的计算非常简单和快速, 避免了繁琐的时空积分. 当单元 q 与 p 相离较近时, 应用更高阶的高

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

斯积分法计算积分式(24); 若 $q=p$ 时, 积分式(24)的第二项为奇异性积分, 并包含

$$\frac{\hat{\boldsymbol{n}}\times\beta\times\boldsymbol{R}}{R^2}=\frac{(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{R})\beta-(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\beta)\boldsymbol{R}}{R^2} \tag{26}$$

由于 $R\to 0$ 时 $\boldsymbol{R}$ 和 β 均与 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 垂直, 因此 $\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{R}\to 0$ 且 $\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\beta\to 0$. 这样, 积分式(26)仅具有 $1/R$ 的奇异性, 因此可以采用 Duffy 坐标变换来消除奇异性.

4　数值结果及讨论

在本节中, 利用数值计算实例来证明采用上述高阶矢量空间基函数求解时域磁场积分方程的精确性和高效性, 将该高阶基函数的求解结果与解析结果进行了对比, 同时也对比了采用 RWG 基函数时的计算结果和计算时间. 假定所采用的入射波的电场为高斯平面波,

$$\boldsymbol{H}^{\mathrm{inc}}(\boldsymbol{r},t)=-\frac{4\hat{\boldsymbol{y}}}{\eta\sqrt{\pi}T}\exp(-\gamma^2) \tag{27}$$

其中 $\gamma=4(ct-ct_0-\boldsymbol{r}\cdot\hat{\boldsymbol{k}})/T$, $\eta=\sqrt{\mu/\varepsilon}$, $ct_0=6\mathrm{m}$, $T=4\mathrm{m}$, 且入射波的入射方向为 $\varphi=0°$、$\theta=180°$.

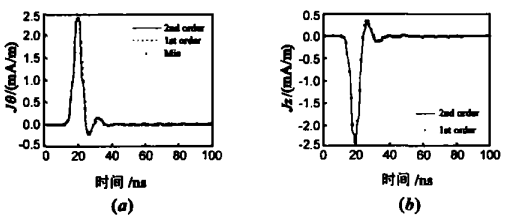

图 2　半径为 1m 球心位于原点的理想导体球电流密度随时间的变化关系, (a) 观察点(1m, 0°, 90°)处的电流密度的 θ 分量; (b) 在同一个观察点处采用一阶和二阶矢量基函数计算结果的比较

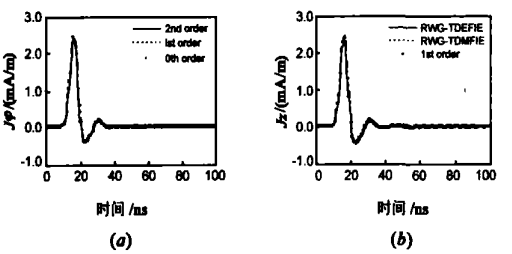

图 3　边长为 1.0m 中心位于坐标原点的理想导电立方体电流密度随时间的变化关系: 观察点为上顶面(0.5833, 0.5833, 0.5)m 处电流密度, (a) 采用不同阶数的矢量基函数求解结果的比较; (b) RWG 矢量基函数与一阶矢量基函数的计算结果对比

第一个例子计算了半径为 1.0m、中心位于原点的理想导体球的时域散射. 采用自动剖分软件将球的表面剖分成 92 个曲边三角形单元. 图 2(a)给出了观察点(1.0m, 0°, 90°)处感应电流密度的分量: 采用本文的一阶矢量基函数以及采用 MIE 级数解和逆傅立叶变换(IDFT)得到的计算结果, 从图 2(a)可以看到, 两者吻合得非常好; 同时, 在图 2(b)中给出球面上另外一个观察点处分别采用一阶矢量基函数和二阶矢量基函数时的计算结果, 两者也吻合得非常好.

第二个例子的散射体设为边长为 1m、中心位于坐标原点的理想导电立方体. 采用本文的矢量基函数时, 将立方体剖分成 48 个曲边三角形单元(实际上是平面三角形单元), 分别采用文中的零阶(96 个未知数)、一阶(288 个未知数)和二阶(576 个未知数)矢量基函数. 图 3(a)给出了观察点为上顶面的(0.5833, 0.5833, 0.5)m 处感应电流密度的分量随时间的变化关系, 从图中 3(a)可以看出, 此时三者的计算结果吻合得较好. 为了比较, 将立方体的六个面总共被分成 224 个平面三角形单元并采用 RWG 基函数[15], 此时共 336 个未知电流, 其计算结果如图 3(b)所示. 从图 3(b)可以看到, 采用本文的基函数和采用传统的 RWG 基函数的计算结果非常接近; 然而, 采用本文矢量基函数与低阶的 RWG 基函数相比, 填充时域阻抗矩阵元素的计算量要少得多; 未知量数目也可以更少, 其计算效率大为提高, 表 1 比较了采用两种基函数的计算时间.

表 1　采用 RWG 基函数和高阶矢量基函数时计算时间对比

	RWG 基函数	高阶矢量基函数		
		0 阶基函数	1 阶基函数	2 阶基函数
剖分单元总数	224	48	48	48
未知量总数	336	96	288	576
时域阻抗矩阵的填充时间(s)	14.1	0.5	2.3	7.8
迭代 100 个时间步后的总时间(s)	49.4	10.2	18.4	83.3

5　结束语

本文利用一种新的高阶矢量基函数求解了三维时域磁场积分方程, 该基函数定义在一个曲边三角形贴片上并用拉格朗日插值多项式来表示每一个贴片内的未知电流密度. 若将拉格朗日插值多项式的插值点选为高斯积分结点, 极大地简化和加快了时域积分方程矩量法的繁琐的时间和空间积分运算. 本文利用空间上和时间上的点匹配方法求解了时域磁场积分方程, 数值计算结果表明了该方法求解时域磁场积分方程的精确性和高效性. 以后将进一步研究该矢量高阶基函数在求解时域电场和时域混合场积分方程中的应用.

参考文献:

[1] Vechinski D, Rao S M. A stable procedure to calculate the transient scattering by conducting surfaces of arbitrary shape[J]. IEEE Trans Antennas and Propagat, 1992, 40(6): 661-665.

[2] Davies P J, Duncan D B. Averaging techniques for time-matching schemes for retarded potential integral equations[J]. Appl Numer Math, 1997, 23: 291-310.

[3] Shanker B, et al. Analysis of transient electromagnetic scattering from closed surfaces using a combined field Integral Equation[J]. IEEE Trans Antennas and Propagat, 2000, 48(7): 1064-1074.

[4] Lu M, Michielsson E. Closed Form Evaluation of Time Domain Fields Due to Raw Wilton Glisson Sources for Use in Matching-on-in Time Based EFIE Solvers[EB/OL]. http://ieeexplore.ieee.org/ie15/7931/

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

21870/0106254.pdf, 2002.

[5] Manara G, et al. A space-time discretization criterion for a stable time-matching solution of the electric field integral equation[J]. IEEE Trans Antennas and Propagat, 1997, 45(3): 527-532.

[6] Bluck M J, et al. Time-domain BIE analysis of large three-dimensional electromagnetic scattering problems[J]. IEEE Trans Antennas and Propagat, 1997, 45(5): 894-901.

[7] Weile D S, et al. A novel schemes for the solution of the time domain integral equations of electromagnetics[J]. IEEE Trans Antennas and Propagat, 2004, 52(1): 283-295.

[8] Shanker B, et al. Analysis of transient electromagnetic scattering phenomena using a two-level plane wave time-domain algorithm[J]. IEEE Trans Antennas and Propagat, 2000, 48(4): 510-523.

[9] Shanker B, et al. Fast analysis of transient electromagnetic scattering phenomena using the multilevel plane wave time domain algorithm[J]. IEEE Trans Antennas and Propagat, 2003, 51(3): 628-641.

[10] Wandzura S. Electric current basis functions for curved surfaces[J]. Electromag, 1992, 12: 77-91.

[11] Graglia R D, Wilton D R, Peterson A F. High order interpolatory vector bases for computational electromagnetics[J]. IEEE Trans Antennas and Propagat, 1997, 45(3): 329-342.

[12] Canino L S, Ottusch J J, Stalzer M A, Visher J L, Wandzura S. Numerical solution of the Helmholtz equation in 2D and 3D using a high-order Nystrom discritization[J]. J Comput Phys, 1998, 146: 627-633.

[13] Kang Gang, et al. A novel grid-robust higher order vector basis function for the method of moments[J]. IEEE Trans Antennas and Propagat, 2001, 49(6): 908-915.

[14] Rao S M, Wilton D R, Glisson A W. Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape[J]. IEEE Trans Antennas and Propagat, 1982, 30(3): 409-418.

作者简介:

赵延文 男, 1965 生于四川武胜, 副教授, 博士, 1998 年至 1999 年曾在香港城市大学电子工程系作访问学者, 已在国内外发表学术论文 50 余篇, 获国家科技进步二等奖和四川省科技进步一等奖各一项, 主要从事计算电磁学、非均匀介质中的场与波及其在石油电测井中的应用、电磁散射与逆散射及其在生物医学中的应用、时域超宽带电磁场理论及其应用等的研究. E-mail: ywzhao@uestc.edu.cn.

聂在平 男, 1946 生于陕西西安, 教授, 博士生导师, 1987~1989 年曾在美国伊利诺依大学电磁实验室从事研究工作, 近年来主持并完成 20 余项科研项目, 先后获国家科技进步二等一项, 省、部级科技一、二、三等进步奖六项, 在国内外发表学术论文 200 余篇, 主要研究兴趣: 计算电磁学、电磁散射与逆散射、非均匀介质中的场与波、移动通信中的智能天线技术等. E-mail: zpnie@uestc.edu.cn.

武胜波 男, 1980 生于河南南阳, 硕士研究生, 主要研究兴趣: 时域计算电磁学.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net