

# 一种加权广义预测自适应递推优化控制算法

郑德忠, 何 群

(燕山大学电气工程学院, 河北秦皇岛 066004)

**摘 要:** 文章给出了一种时变遗忘因子递推最小二乘 $\alpha$ 递推增广最小二乘(RLS) RELS)的性能指标加权的广义预测自适应的优化控制算法, 解决了模型反馈校正中控制参数与噪声干扰紧耦合情况下参数估值变慢的问题, 通过在线递推估计参数, 提高了系统计算速度, 并且在优化控制量过程中给出一种简便收敛递推算法, 避免了逆阵的计算, 提高了效率和精度, 增强了鲁棒性, 仿真效果表明了该算法优于传统的广义预测控制算法。

**关键词:** 鲁棒性; 反馈校正; 参数估计; 广义预测控制

**中图分类号:** TP273 **文献标识码:** A **文章编号:** 037222112 (2005) 082144204

## A Kind of Adaptive Recursive Optimization Control Algorithm of Weighted Generalized Predictive Control

ZHENG Dezhong, HE Qun

(Electric engineering college, Yanshan University, Qinhuangdao, Hebei 066004, China)

**Abstract:** This paper presents a generalized predictive adaptive optimization control algorithm with the property of a time-varying forgetting factor recursive extended RLS $\alpha$ RELS weighted. It solves the problem that parameters estimation will become slow when the control parameters and noise are tightly coupled in the model feedback correction. Through  $\alpha$ 2line recursive estimating parameters, the systematic stability is improved. In the process of optimization control, a simple convergent recursive algorithm is given. It avoids matrix calculation, improves efficiency and precision, and enhances the robustness. The simulation result shows that this algorithm excels traditional GPC algorithm.

**Key words:** robustness; feedback correction; parameters estimation; generalized

## 1 引言

上世纪 70 年代后期出现的一类新型计算机控制算法, 如动态矩阵控制(DMC)、模型算法控制(MAC)。这类算法以系统的阶跃或脉冲响应为模型, 采用滚动推移方法在线地对过程实施优化控制, 在复杂工业过程控制中表现了良好控制性能。1978 年, 理查勒特(Richalet)等首次详细地阐述了这类算法的动因, 提出 MPHC (Model Predictive Heuristic Control) 控制算法, 从此, 预测控制(Predictive Control)作为这类新型算法的统一名称, 便开始出现在控制领域中。80 年代中期 Clarke<sup>[1]</sup>等人在保持最小方差自校正控制的在线辨识、输出预测、最小方差控制的基础上, 吸收了 DMC 和 MAC 中滚动优化的策略, 提出了广义预测控制算法(GPC)。GPC 基于参数模型、引入了不相等的预测和控制水平, 使系统设计更灵活。GPC 这种新型计算机控制方法, 是一种具有鲁棒性强的先进控制算法。它在电力、炼油、化工和造纸等领域获得了广泛的应用, 并形成了相当规模的先进控制产业。

但是这种控制算法的计算量太大, 尤其是需求逆阵, 不仅限制了预测及控制时域的选取, 而且占用大量的内存, 尽管国内外学者提出了许多改进的算法<sup>[2~5]</sup>, 但一般还是需要求逆阵, 并且在模型反馈校正中控制参数与噪声干扰紧耦合情况下参数估值变慢。本文采用指标加权变遗忘因子广义预测自适应的优化控制算法, 通过在线递推估计参数, 提高了系统的辨识速度, 并且在优化控制量的过程中给出一种简便递推优化快速算法, 不必求逆阵, 大大的减少了计算量、存储量。

## 2 模型的建立

广义预测控制采用如下的 CARIMA (Controlled AutoRegressive Integrated Moving Average) 模型描述被控对象:

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t-d) + D(z^{-1})v(t-d) + C(z^{-1})F(t)/S \quad (1)$$

其中:  $d$  表示被控对象时滞,  $A(z^{-1})$ 、 $B(z^{-1})$ 、 $C(z^{-1})$  和  $D(z^{-1})$  是后移算子的多项式。

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_nz^{-n}$$

$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}$$

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_n z^{-n}$$

$$D(z^{-1}) = 1 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2} + \dots + d_n z^{-n}$$

差分算子  $\nabla = 1 - z^{-1}$

$y(t), u(t), v(t), F(t)$  分别表示被控对象的输出、输入、可测扰动和不可测扰动信号,  $n_a, n_b, n_c, n_d$  为模型的阶。

### 3 模型反馈校正

模型反馈校正是预测控制中必不可少的一步, 它可及时修正模型误差, 以提高预测精度, 保证控制效果最佳。在 GPC 控制中, 采用变遗忘因子递推最小二乘在线辨识法进行模型校正。其基本思想是随着系统动态特征的变化自动调整遗忘因子, 当系统有突然变化时, 则选择较小的遗忘因子来提高灵敏度, 直到调整到参数的估计误差较小。当系统趋于稳定时, 选择较大的遗忘因子, 增长记忆长度。总之, 通过修正遗忘因子, 使得记忆的数据始终保持统一的信息。

#### 3.1 预测模型

将式(1)两端同乘以  $\nabla / T(z^{-1})$ , 得到

$$A(z^{-1})\nabla y_f(t) = B(z^{-1})\nabla u_f(t-1) + D(z^{-1})\nabla v_f(t-1) + C(z^{-1})F_f(t) \quad (2)$$

其中:  $F_f(t) = F(t)/T(z^{-1})$ ;  $\nabla y_f(t) = \nabla y(t)/T(z^{-1})$ ;  $\nabla u_f(t) = \nabla u(t)/T(z^{-1})$ ;  $\nabla v_f(t) = \nabla v(t)/T(z^{-1})$ ;  $T(z^{-1}) = 1 + t_1 z^{-1} + t_2 z^{-2} + \dots + t_n z^{-n}$  为滤波器。

设模型中的多项式  $A(z^{-1}), B(z^{-1}), C(z^{-1}), D(z^{-1})$  的阶次为已知的  $n_a, n_b, n_c, n_d$  (其阶次可根据实际模型而定), 但参数  $a_i, i = 0, 1, \dots, n_b; b_i, i = 0, 1, \dots, n_b; c_i, i = 0, 1, \dots, n_c; d_i, i = 0, 1, \dots, n_d$  (这里  $a_0 = 1, c_0 = 1$ ) 及方差  $R_{F_f}^2$  未知。

#### 3.1.2 时变遗忘因子递推增广最小二乘法

由式(2)有 LS 结构:

$$\nabla y_f = 5^T(t-1)\nabla H(t) + F_f(t) \quad (3)$$

其中

$$5^T(t-1) = [-\nabla y_f(t-1), \dots, -\nabla y_f(t-n_a), \nabla u_f(t-1), \nabla u_f(t-2), \dots, \nabla u_f(t-n_b-1), \nabla v_f(t-1), \dots, \nabla v_f(t-n_d-1), F_f(t-1), \dots, F_f(t-n_c)] \quad (4)$$

$$\nabla H(t) = [\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n, \hat{b}_0, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_n, \hat{d}_0, \dots, \hat{d}_n, \hat{c}_1, \dots, \hat{c}_n]^T$$

则时变遗忘因子递推增广最小二乘法为

$$N(t) = 1 + \frac{1 + 5^T(t-1)p(t-1)5(t-1)}{[\nabla y_f(t) - 5^T(t-1)\nabla H(t-1)]} \quad (5)$$

$$B(t) = 1 - 1/N(t) \quad (6)$$

$$\nabla H(t) = \nabla H(t-1) + \frac{p(t-1)5(t-1)[\nabla y_f(t) - 5^T(t-1)\nabla H(t-1)]}{B(t) + 5^T(t-1)p(t-1)5(t-1)} \quad (7)$$

引进

$$\nabla \gamma(t) = p(t-1) - \frac{p(t-1)5(t-1)5^T(t-1)p(t-1)}{1 + 5^T(t-1)p(t-1)5(t-1)} \quad (8)$$

如果  $\text{trace}[\nabla \gamma(t)]/B(t) \ll B(t)$

$$\text{则 } p(t) = \nabla \gamma(t)/B(t) \quad (9)$$

否则  $p(t) = \nabla \gamma(t)$

参数  $\nabla \gamma(t)$  与  $Q$  的选择如下:

$$\begin{aligned} G(t) &= mG_R(t) \\ B &> A^2 \end{aligned} \quad (10)$$

式(10)中,  $m$  是记忆长度, 一般可取为 1000 及以上,  $G_R$  是  $\nabla \gamma(t)$  的均方差,  $A^2$  是初始协方差矩阵  $p(0) = A^2 I$  中的取值 ( $I$  为单位阵),  $\nabla H(0) = \nabla H$  ( $A$  为尽可能大的数, 一般可取 100 以上,  $E$  为充分小的实向量)

$$\text{一般取} \begin{cases} \nabla H = 0 \\ p(0) = A^2 I \end{cases}$$

$\text{trace}[\nabla \gamma(t)]$  是矩阵  $\nabla \gamma(t)$  的迹。

$5^T(t-1)$  中的  $F_f(j), j = t-1, \dots, t-n_c$ , 由下式计算:

$$F_f(j) = \nabla y_f(j) - 5^T(j)\nabla H(j-1), j = t-1, \dots, t-n_c \quad (11)$$

$$\text{或 } F_f(j) = \nabla y_f(j) - 5^T(j)\nabla H(t), j = t-1, \dots, t-n_c \quad (12)$$

$$\text{在时刻 } t \text{ 处 } R_{F_f}^2 = \frac{1}{t} \sum_{j=1}^t F_f^2(j)$$

$$F_f(j) = y(j) - 5^T(j)\nabla H(j), j = 1, 2, \dots, t$$

由式(12)可引出递推公式:

$$R_{F_f}^2(t) = R_{F_f}^2(t-1) + \frac{1}{t} \left( R_{F_f}^2(t) - R_{F_f}^2(t-1) \right) \quad (13)$$

注1: 在上述改进的时变遗忘因子递推最小二乘法中, 给出了白噪声  $F(t)$  的较高度量的估值。

注2: 采用改进的时变遗忘因子  $B(t)$  的递推最小二乘法在线辨识参数时可保证辨识参数既能适应系统的缓慢变化, 又不会发生辨识发散现象。

注3: 循环) 递推增广最小二乘法, 当数据长度  $N$  较短时, 基于  $N$  个观测数据所得的参数估值常常不能令人满意, 为了改进参数估值精度, 可循环应用已知的  $N$  个数据。取第一个循环最后时刻估值  $\nabla H(N)$  及  $P(N)$  作为第二个循环的初值  $\nabla H(0)$  和  $P(0)$ , 即取  $\nabla H(0) = \nabla H(N), P(0) = P(N)$ , 用这种循环算法可充分利用已知信息改进估值程度。

注4: 时变遗忘因子递推增广最小二乘法的缺点是 ARMA 模型的 MA 参数估值收敛转慢, 这是因为白噪声估值  $F_f(t)$  与参数估值  $\nabla H(t)$  通过式(5)~(9)与式(11)或式(12)有相互耦合作用, 因此给出下列改进的时变遗忘因子增广最小二乘法即改进的两段 RLS) RELS 参数估计算法。

#### 3.1.3 改进的时变遗忘因子递推增广最小二乘法

预测模型同式(2), 设  $A(z^{-1})$  和  $C(z^{-1})$  是稳定的。

定理 1 若  $A(z^{-1})$  和  $C(z^{-1})$  是稳定的, 则预测模型(2)可用如下高阶 CAR 模型近似代替

$$F_f(t) = \sum_{j=0}^{n_0} A_j \nabla y_f(t-j) - \sum_{j=0}^{n_0} B_j \nabla u_f(t-j) - \sum_{j=0}^{n_0} C_j \nabla v_f(t-j) \quad (14)$$

其中  $A_0 = 1, B_0 = C_0 = 0$ , 它有 LS 结构

$$\nabla y_f = 5_f^T(t-1)H_1 + F_f(t)$$

其中

$$5_f^T(t-1) = [-\nabla y_f(t-1), \dots, -\nabla y_f(t-n_0), \nabla u_f(t-1), \dots, \nabla u_f(t-n_0), \nabla v_f(t-1), \dots, \nabla v_f(t-n_0)]$$

$$H_1 = [A_1, \dots, A_{n_0}, B_1, \dots, B_{n_0}, C_1, \dots, C_{n_0}]^T$$

于是用下面改进的 RLS 算法可得  $H_1$  的 LS 估值  $\nabla H_1(t)$

$$\nabla H_1(t) = \nabla H_1(t-1)$$

$$+ \frac{P(t-1)5^T(t-1)[\$y_f(t)-5^T(t-1)\mathbf{H}(t-1)]}{B(t)+5^T(t-1)P(t-1)5^T(t-1)} \quad (15)$$

$$B(t)=1-1/N(t) \quad (16)$$

$$N(t)=1+\frac{1+5^T(t-1)P(t-1)5^T(t-1)}{[\$y_f(t)-5^T(t-1)\mathbf{H}(t-1)]^2} \quad (17)$$

记

$$\gamma(t)=P(t-1)-\frac{P(t-1)5^T(t-1)5^T(t-1)P(t-1)}{1+5^T(t-1)P(t-1)5^T(t-1)} \quad (18)$$

$$\text{如果 } \text{trace}[\gamma(t)]/B(t) \leq Q \quad (19)$$

$$\text{则 } P(t)=\gamma(t)/B(t) \quad (20)$$

$$\text{否则 } P(t)=\gamma(t) \quad (21)$$

参数  $Q(t)$  与  $Q$  的选择同上, 初值  $P(0)$  及  $\mathbf{H}(0)$  选法同上, 从而可得  $F_f(j)$  的平滑估值.

$$F_f(j)=\$y_f(j)-5^T(j)\mathbf{H}(t+1), j=t-1, \dots, t-n_c \quad (22)$$

$$\mathbf{R}_f^2=\mathbf{R}_f^2(t-1)+\frac{1}{t}[\mathbf{F}_f^2(t)-\mathbf{R}_f^2(t-1)] \quad (23)$$

将由式(22)计算的平滑估值  $F_f(t-1), \dots, F_f(t-n_c)$  代入式(4)  $5^T(t-1)$  中, 用时变遗忘因子递推增广最小二乘法式(5)~(9)得到用改进的时变遗忘因子递推增广最小二乘法给出的参数估值  $\mathbf{H}(t)$ .

#### 4 递推优化算法求解最优控制律

$$\text{引入辅助输出 } U(t)=P(z^{-1})y(t) \quad (24)$$

考虑 Diophantine (丢番图方程) 给出目标函数如下:

$$\begin{aligned} J &= E\{(7-w)^T(7-w)+K_7^T 7\} \\ &= E\{(Gu+f+e-w)^T(Gu+f+e-w) \\ &\quad +K(Pu+D)^T(Pu+D)\} \end{aligned} \quad (25)$$

在优化控制中, 一般都是通过求逆阵而得到最优控制律, 因此, 一般要求  $M$  不是很大, 否则会增加存储量及计算量. 为解决这一问题, 本文利用递推优化算法, 从任一点出发, 可以在不超过  $M$  个数的迭代次数内求得最优控制律, 避免了逆阵的运算, 大大减少了计算量, 提高了精度, 减少了存储量.

为了求得最优控制律  $u$ , 由目标函数式(25)可得

$$(G^T G+K^T P)u=G^T(w-f-e)-K^T D \quad (26)$$

由数学分析可知由方程所求得的  $u$  即为使得目标函数式(25)中的  $J$  取得最小值的最优解

递推优化算法如下:

$$\text{记 } G^T G+K^T P=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1M} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & a_{M2} & \dots & a_{MM} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_M^T \end{bmatrix}$$

$$G^T(w-f-e)-K^T D=b^T=[b_1, \dots, b_M]$$

(1) 读入  $M, t, a_i^1=(a_{i1}, \dots, a_{iM}), e_i^1=(1, 0, \dots, 0), \dots, e_M^1=(0, 0, \dots, 1), b^1=[b_1, \dots, b_M], u^T=(u_1, \dots, u_M), u_i=\$u_f(t+i-1), i=1, 2, \dots, M$

(2) 任取  $u^1 \in E^M$ , 这里不妨取,  $u^1=(0, \dots, 0) \in E^M$ , 取  $h_1$

$I \in E^{M \times M}$  为任意非奇异对称阵, 这里不妨取  $H_1^T=(e_1, \dots, e_M)$ , 置  $i=1, \text{iflag}=0$ ;

(3) 计算在  $u^i$  处残差向量的第  $i$  个分量,  $S_i=a_i^T u^i-b_i$ ; 计算搜索向量  $S^T=H_i^T a_i$ ;

(4) 若  $S^i \neq 0$  转步(5); 若  $S^i=0$ , 同时  $S_i=0$ , 则置  $u^{i+1}=u^i, H_{i+1}=H_i, \text{iflag}=\text{iflag}+1$ , 若  $i < M$ , 转步(7); 否则停止计算; 此时  $u^{M+1}$  为式(26)的解. 若  $S^i=0$ , 但  $S^i \neq 0$ , 则置  $\text{iflag}=\text{iflag}+1$  停止计算. 此时方程组式(26)不相容, 也即目标函数式(25)无最优解;

(5) 修正解的近似值,  $u^{i+1}=u^i-K_i S^i$ , 其中步长  $K_i=S_i/a_i^T S^i$ ;

若  $i=M$ , 停止计算,  $u^{M+1}$  为式(26)的解;

(6) 修正矩阵  $H_i$ ,

$$H_{i+1}=H_i-S^i(S^i)^T/a_i^T S^i$$

(7) 置  $i=i+1$  转步(3);

$u=u^{M+1}$  停止, 此时得到式(26)的解, 也即得到了使得目标函数式(25)中  $J$  取得最小值的最优解. 从而,

$$\$u_f(t)=[1, 0, \dots, 0]u \quad (27)$$

则在  $t$  时刻的控制量为

$$u(t)=T(z^{-1})[\$u_f(t-1)+\$u_f(t_0)] \quad (28)$$

#### 5 性能指标加权的广义预测递推优化控制算法

(1) 读入参数  $N, M, K, P(z^{-1}), Q(z^{-1}), T(z^{-1})$  及参数估计算法中初始值  $A, G(t), m$  单位阵  $I$ .

(2)  $t=0, P(t)=A^2 I, \mathbf{H}(t)=0$ ;

(3) 用式(15)~(22)给出  $F_f(j), j=t-1, \dots, t-n_c$ ;

(4) 将  $F_f(j)$  代入式(4)的  $5^T(t-1)$  中, 用式(5)~(9)估计参数  $A(z^{-1}), B(z^{-1}), C(z^{-1}), D(z^{-1})$ ;

(5) 利用递推优化算法得到最优值  $u$ ;

(6) 利用式(27)和(28)计算时刻  $t$  时的控制量  $u(t)$ ;

(7) 置  $t=t+1$ , 返回步(2).

#### 6 仿真研究

对带有滤波器的 CARIMA 模型:

$$(1-0.9z^{-1}+0.2z^{-2})\$y_f(t)=0.5z^{-1}\$u_f(t-1)+(1+0.4z^{-1})F_f(t)$$

采用改进的时变遗忘因子增广递推两段 RLS) RELS 方法, 由输入  $u(t)$  和输出  $y(t)$  对模型参数和噪声  $F(t)$  的方差进行参数值的收敛性仿真如图 1(a)~(e)所示.

其中实线代表参数真实值, 曲线代表参数估值.  $\$=1-z^{-1}$  为差分算子,  $\$y_f(t)=\$y_f(t)/S(z^{-1}), \$u_f(t)=\$u_f(t)/S(z^{-1}), F_f(t)=F(t)/S(z^{-1})$ , 滤波多项式  $T(z^{-1})=1-(1-h/T_d)z^{-1}$

$h$  是采样间隔,  $T_d$  是阶跃响应达到 62.3% 的时间,  $F(t)$  是满足  $E(F(t))=0, R_F^2=E(F^2(t))=1$  的正态白噪声, 已知控制  $u(t)$  满足  $E(u(t))=0, D(u^2(t))=1$  的高斯正态白噪声.

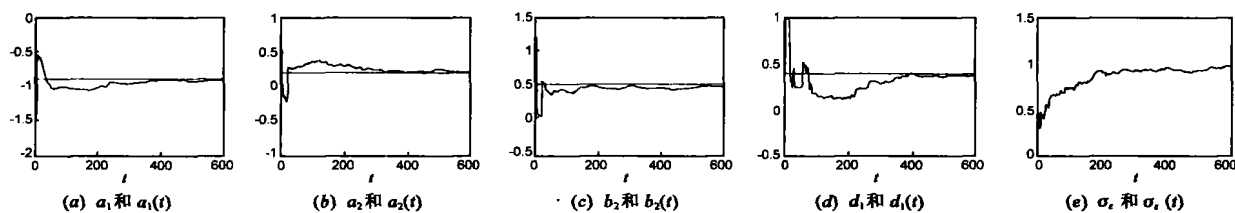


图 1 二段 RLS-RELS 参数估计的收敛性

设  $t$  为迭代步数, 当  $t = 600$  步的参数估值时,  $\hat{a}_1 = -0.906168$ ,  $\hat{a}_2 = 0.201352$ ,  $\hat{b}_2 = 0.478967$ ,  $\hat{c}_1 = 0.38761$ ,  $R_F^2 = 0.987567$

## 7 结论

性能指标加权的广义预测递推优化控制算法, 通过在线递推估计参数, 大大节省了计算时间. 同时在优化控制量的过程中给出一种简便收敛递推算法, 避免了逆阵的计算, 提高了效率和精度, 增强了鲁棒性. 另外, 对输入与输出的加权相当于对实际输入信号具有滤波作用, 使控制系统具有较强的鲁棒性. 通过大量试验表明, 仿真效果表明了该算法优于传统的 GPC 算法, 该计算方法是有效的、可行的且具有较强的灵活性、适应性和鲁棒性, 具有较高的控制程度, 特别适用于工业过程的实时控制, 具有理论意义和实用价值.

## 参考文献:

- [1] Clarke D W, Scatolini R. Constrained receding horizon predictive control[J]. IEE Proc Part D, 1991, 138: 347- 354
- [2] 王伟. 广义预测自适应控制的直接算法及全局收敛性分析[J]. 自动化学报, 1995, 21(1): 57- 62.  
WANG Wei. The analysis of direct algorithm and the whole astringency generalized predictive adaptive control[J]. Acta Automatica Sinica, 1995, 21(1): 57- 62.
- [3] 郭庆鼎, 金元郁, 胡耀华. 求解 GPC 中逆矩阵的递推算法[J]. 控制与决策, 1996, 11(4): 510- 513.  
GUO Qingding, JIN Yuanyu, HU Yaohua. A recursive algorithm of evaluating invertmatrix of GPC[J]. Control and Decision, 1996, 11(4): 510- 513.

[4] 李国勇, 谢克明. 隐式广义预测自校正算法的混合仿真研究[J]. 系统仿真学报, 1999, 11(3): 157- 160.

LI Guoyong, XIE Keming. Hybrid simulation research of implicit generalized predictive selftuning control algorithm[J]. Journal of System Simulation, 1999, 11(3): 157- 160.

[5] 丁宝苍, 席裕庚. 基于 Kleinman 控制器的广义预测控制稳定性分析[J]. 中国科学 E 辑, 2004, 34(2): 176- 189.

DING Baocang, XI Yude. The analysis of the stability of generalized predictive control based on Keinman controller[J]. Science in China Series E, 2004, 34(2): 176- 189.

## 作者简介:



**郑德忠** 男, 1949 年生, 教授、博士生导师, 燕山大学校学术委员会委员、5 传感技术学报 6 副主编、河北省人工智能学会副理事长, 主要研究方向为系统仿真、信号处理、遥测遥控和先进控制等. 负责主持了四十余项纵横向科研课题, 获机械部科技进步奖等省部级奖 4 项, 发表了论文 80 余篇. E2mail: qhdzdz@sina.com.



**何群** 男, 1969 年 10 月生于陕西省西安市, 博士研究生, 主要研究方向为预测控制和虚拟仪器等. 发表了论文 10 余篇, 获机械工业科学技术奖等省部级奖 2 项. E2mail: hq@ysu.edu.cn.