

最小平方卷积反演算法及其在桥梁动挠度测量中的应用

杨学志¹, 严普强², 晏 磊¹, 王建民¹

(1. 北京大学遥感与地理信息系统研究所, 北京 100871; 2. 清华大学精密测量技术与仪器国家重点实验室, 北京 100084)

摘 要: 本文给出的最小平方卷积反演方法, 利用了输入信号的时限约束, 用 Hilbert 空间中的正交投影的方法, 得到最小平方意义下的最优解. 本文利用该方法成功地从惯性传感器信号中反演出桥梁动挠度信号, 并给出与其他方法的比较, 证明了该方法的有效性, 为桥梁动挠度测试提供了一种新的手段.

关键词: 最小平方卷积反演; 正交投影; 动挠度测试

中图分类号: TN911.72 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2000) 10-0121-03

Least Square Deconvolution Algorithm and Its Application in Measurement of Dynamic Deflection of Bridge

YANG Xue-zhi¹, YAN Pu-qiang², YAN Lei¹, WANG Jian-min¹

(1. Institute of Remote Sensing & Geographical Information System, Peking University, Beijing 100871, China;

2. State Laboratory of Precision Measurement Technology and Instruments, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: In this paper, the least square deconvolution algorithm is deduced from the orthogonal projection method in Hilbert space. The solution is the optimum one in the sense of least square. Using this method, the dynamic deflection signal is successfully obtained from the signal of inertial transducer, which is distorted seriously. The comparison with other methods proves the effectiveness of this method. This method provides a new approach for the measurement of dynamic deflection of bridge.

Key words: least square deconvolution algorithm; orthonormal projection; measurement of dynamic deflection

1 引言

考虑一个线性移不变系统, 具有冲击响应 $h(n)$, 其对于输入信号 $x(n)$ 的响应 $y(n)$ 可以由卷积方程表示:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=0}^{N_x-1} x(k) h(n-k) \quad (1)$$

这里假定 $x(n)$ 、 $y(n)$ 、 $h(n)$ 都是有限长度的, 长度分别为 N_x 、 N_y 、 N_h , 且 $N_y = N_x + N_h - 1$. 在已知 $y(n)$ 和 $h(n)$ 的情况下, 求解 $x(n)$ 的过程叫做卷积反演 (deconvolution). 卷积反演是工程中的一类具有代表性的问题. 如果 $h(n)$ 不是函数, 系统的输出就会有一定程度的失真. 通过卷积反演则可以得到真实的输入信号.

卷积反演有两种最基本的方法. 一种是直接解方程组 (1), 结果为:

$$\begin{cases} x(0) = y(0)/h(0) \\ x(k) = \frac{y(k) - \sum_{i=0}^{k-1} h(k-i)x(i)}{h(0)} \end{cases} \quad (2)$$

其中, $k=1, 2, \dots, N_x-1$.

第二种方法是频域方法. 在把 $x(n)$ 和 $h(n)$ 补足够长的零之后, 线卷积的计算问题 $y(n) = x(n) * h(n)$, 可以转化为圆卷积问题, 即 $y(n) = x(n) \odot h(n)$. 设 $Y(k)$ 、 $X(k)$ 、 $H(k)$

分别是 $y(n)$ 、 $x(n)$ 、 $h(n)$ 的离散傅里叶变换, 则 $Y(k)$ 、 $X(k)$ 、 $H(k)$ 满足

$$Y(k) = X(k) H(k) \quad (3)$$

频域的卷积反演过程为:

$$X(k) = \frac{Y(k)}{H(k)}, x(n) = \text{IDFT}[X(k)] \quad (4)$$

如果 $H(k)$ 存在零点, 则频域的卷积反演将出现 0/0 的奇异现象.

近年来, $H(k) = \text{DFT}[h(n)]$ 具有零点的卷积反演问题引起国内外学者的注意. 在时域方法中, 直接求解方程组 (1) 将引起严重的误差积累, 为此一些学者提出时域中的其他方法^[1~3]. 文献[1]虽然在 Z 域中进行, 但实际上与直接解方程组 (1) 有同样的效果; 文献[2]的方法得到多解, 这在实际问题中是不希望看到的结果. 频域方法可以利用 FFT 实现快速计算, 但在 $H(k)$ 含有零点的情况下会遇到麻烦; 文献[4, 5]利用罗比塔法则解决零点奇异问题, 文献[6]则利用广义傅立叶变换避开系统的零点, 在一定程度上解决了 $H(k)$ 的零点问题, 但在实际应用中效果并不理想; 文献[7]则利用信号的时限约束, 提出了频域中的最小平方反卷积技术, 得到了比较好的反演效果.

总体来说, 不同的方法的反演结果不同, 而且无论系统是

否存在零点,时域方法都可以得到唯一确定的解,但频域方法在零点处就会出现奇异现象,需要采取特殊的措施加以解决零点问题.本文讨论了时域中的最小平方卷积反演方法,并利用该方法从失真的惯性传感器信号中反演出桥梁动挠度信号.

2 最小平方卷积反演算法

定义 (线卷积算子) 线卷积算子 $T^*: C^{N_x} \rightarrow Y \subset C^{N_y}$, $N_y = N_x + N_h - 1$. 对每个 $x = [x(n)]_{N_x}^{N_x-1}$, $T^* x = y = [y(n)]_{N_y}^{N_y-1}$, 其中 $y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=0}^{N_x-1} x(k) \cdot h(n-k)$.

T^* 的定义域为 N_x 维酉空间, 值域中的元素为长度为 N_y 的序列, T^* 的值域 Y 为 N_y 维酉空间的一个闭子空间. 对于实际的物理系统, 酉空间 C^N 就转化为实空间 R^N . 有如下的命题成立:

定理: T^* 逆算子 T^{*-1} 存在的充要条件为 $[h(n)] \neq 0$.

这个命题的证明比较简单, 读者可自己验证. 考虑线卷积算子 $T^*: C^{N_x} \rightarrow Y \subset C^{N_y}$, $N_y = N_x + N_h - 1$, 对于 C^{N_x} 中的任一元素 x 的像 y , 有:

$$y = T^* x \quad (5)$$

在 $[h(n)] \neq 0$ 的情况下, T^* 的逆算子 T^{*-1} 存在, 所以 $\dim Y = \dim C^{N_x} = N_x$, \dim 表示求维数. 当存在观测噪声时:

$$y = y_0 + T^* x + \quad (6)$$

设所有观测矢量 y 组成的空间为 Y , 则 $\dim Y = N_y$. Y 是 Y 的闭子空间, y 在 Y 上的投影 \hat{y} 为 y 在最小范数意义下的最优估计:

$$y - \hat{y} = \min_y y - y \quad (7)$$

设 $e_0, e_1, e_2, \dots, e_{N_x-1}$ 为 T^* 定义域 C^{N_x} 的一组基, 由于 T^* 的逆算子 T^{*-1} 存在, 则

$$e_0^Y = T^* e_0, e_1^Y = T^* e_1, \dots, e_{N_x-1}^Y = T^* e_{N_x-1}$$

构成 T^* 值域 Y 的一组基, \hat{y} 可以由这组基唯一地表达:

$$\hat{y} = e_0^Y + e_1^Y + \dots + e_{N_x-1}^Y \quad (8)$$

由 $(y - \hat{y}) \in Y$ 可以得到以下线性非齐次方程组:

$$\begin{bmatrix} e_0^Y, e_0^Y & e_0^Y, e_1^Y & \dots & e_0^Y, e_{N_x-1}^Y \\ e_1^Y, e_0^Y & e_1^Y, e_1^Y & \dots & e_1^Y, e_{N_x-1}^Y \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{N_x-1}^Y, e_0^Y & e_{N_x-1}^Y, e_1^Y & \dots & e_{N_x-1}^Y, e_{N_x-1}^Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ N_x - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_0^Y, y \\ e_1^Y, y \\ \dots \\ e_{N_x-1}^Y, y \end{bmatrix} \quad (9)$$

式中 \cdot, \cdot 表示内积. 求解出系数 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{N_x-1}$, 可进一步求出输入矢量 x 的最优估计值 \hat{x} .

$$\hat{x} = a_0 e_0 + a_1 e_1 + \dots + a_{N_x-1} e_{N_x-1} \quad (10)$$

如果特别地选取 C^{N_x} 的一组基为 $e_n = (\delta_{ni})$, $i = 0, 1, 2, \dots$

$$N_x - 1, n = 0, 1, 2, N_x - 1, \delta_{ni} = \begin{cases} 1, i = n \\ 0, i \neq n \end{cases}, \text{而内积的定义为} \\ x, y = \sum_{n=0}^{N_x-1} x(n) y(n) \quad (11)$$

则估计值成为最小平方意义下的最优估计. 注意到 $e_i^Y, e_j^Y = e_j^Y, e_i^Y = r_h(|i-j|)$, $e_i^Y, y = r_{yh}(i)$, 则方程组 (11) 变为:

$$\begin{bmatrix} r_h(0) & r_h(1) & \dots & r_h(N_x-1) \\ r_h(1) & r_h(0) & \dots & r_h(N_x-2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_h(N_x-1) & r_h(N_x-2) & \dots & r_h(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ N_x-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{yh}(0) \\ r_{yh}(1) \\ \dots \\ r_{yh}(N_x-1) \end{bmatrix} \quad (12)$$

这是典型的 Toeplitz 方程组, 采用 Levinson-Durbin 解法^[8], 运算量可由 Gauss 消去法的 N_x^3 的量级降到 N_x^2 的量级. 方程组 (12) 的解就是反卷积的结果.

以上的算法充分地利用了信号的时限约束信息. 一个长度为 N_x 的信号经过长度为 N_h 的有限冲击响应滤波器后, 得到的响应序列的长度为 $N_y = N_x + N_h - 1$. 由于存在输入信号长度的约束条件, 使得响应序列只能属于维数为 N_x 的闭子空间. 由于噪声的影响, 实际观测到的响应序列将偏离该子空间, 则观测序列到该子空间的投影是满足约束条件且与观测序列有最短距离的序列. 由此可以看出, 以上算法可以起到消除噪声的作用.

3 用最小平方卷积反演算法反演桥梁动挠度

动挠度是指铁路桥梁在列车作用下的变形, 它是一个时限信号, 并且能量主要集中在低频区域. 动挠度主要用相对测量方法进行测量. 相对测量方法有良好的低频响应特性, 可以较好地反映动挠度信号, 但存在两方面的问题: (1) 受环境限制, 某些场合难以找到仪器的安装点; (2) 安装点的振动对测试结果产生影响. 惯性测量方法可以有效地解决这两个困难, 但是惯性传感器的问题在于测试低频信号存在困难. DP 型绝对位移传感器^[9,10]固有频率达到 0.5Hz, 是一种性能良好的低频传感器 (清华大学生产), 但用于动挠度测试仍然会产生较大的失真. 应用卷积反演技术则可以恢复出桥梁的动挠度信号.

DP 传感器为一惯性传感器, 其输出电压对输入位移的传递函数为:

$$H(s) = \frac{s^2}{s^2 + 2\zeta_0 s + \omega_0^2} \quad (13)$$

式中: $\zeta_0 = 2$ $\omega_0 = 3.14 \text{ rad/s}$, 相当于固有频率 0.5Hz, $\omega_0 = 0.65$. 该传感器具有二阶高通特性, 在直流处有二重零点.

图 1 所示为一次动挠度测试实验中位移计 (相对方法) 的测试结果. 图 2 为 DP 传感器的输出信号. 由于低频信号幅值衰减, 相位畸变, DP 传感器的输出信号不能真实反映挠度. 利用直接解卷积方程组的反演结果如图 3 所示, 由于误差积累, 结果很快发散. 利用 DFT 的反演结果如图 4 所示, 由于噪声影

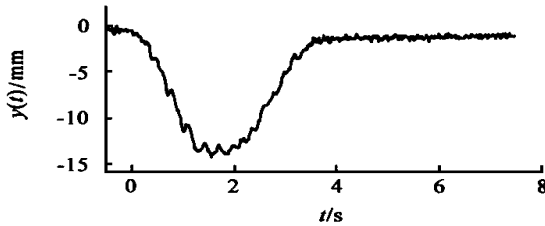


图 1 位移计测试的动挠度信号

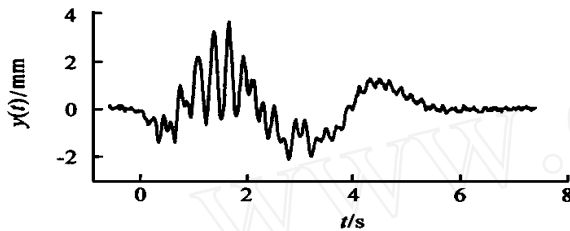


图 2 DP 传感器输出的动挠度信号

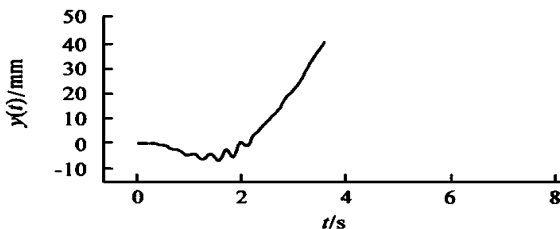


图 3 直接解方程组 1 的反演结果

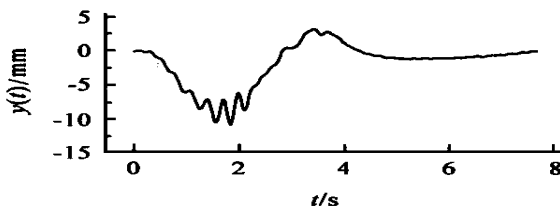


图 4 DFT 恢复结果

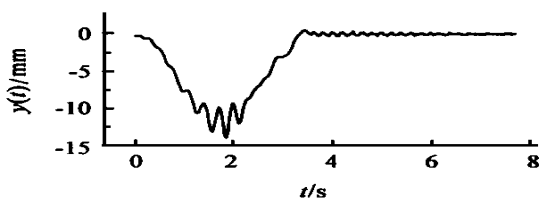


图 5 最小平方卷积反演结果

响,在动挠度信号结束后,反演结果仍出现一个鼓包.利用最小平方反演算法对此信号进行处理后的结果如图 5 所示,该结果可以较好地反映动挠度信号.当然,该结果与图 1 比较仍然有差异,这是可以理解的,因为位移计内部存在机械摩擦,高频响应特性较差,而且测试结果受安装点振动的影响.

4 总结

本文讨论了最小平方卷积反演方法,充分地利用了信号的时限约束,利用正交投影的方法得到最优解,起到降低噪声的作用.最小平方卷积反演的一个应用的实例是铁路桥梁动挠度测试.由于惯性传感器的低频特性不足,测试结果将有较大程度的失真,利用最小平方卷积反演方法可以得到真实的动挠度信号,这给动挠度测试提供了一种新型的惯性测试方法.

参考文献:

- [1] 刘明亮,孙继.用 Z 变换求解离散反卷积 [J]. 电子测量与仪器学报,1993,7(2):27-31.
- [2] 孔凡年.时域卷积反演的新方法 [J]. 电子学报,1985,13(4):8-13.
- [3] 程乾生.S 阶偶项信号和最小平方偶项卷积反演方法 [J]. 电子学报,1987,15(4):34-40.
- [4] 舒勤,张有正. $X[k]$ 有零点的卷积反演的 DFT 算法 [J]. 电子学报,1990,18(3):83-89.
- [5] 舒勤,张有正.再论 $X[k]$ 有零点的卷积反演的 DFT 算法 [J]. 电子学报,1992,20(12):79-81.
- [6] 阎鸣生,茅于海.利用广义离散 Fourier 变换计算线性卷积与卷积反演 [J]. 电子学报,1988,16(2):91-95.
- [7] 谢毅,严普强,杨倩等.用地震式低频振动传感器测量桥梁动挠度 [J]. 清华大学学报,1994,34(5):48-56.
- [8] [美]P. E. 布莱赫特著,肖先赐译.数字信号处理的快速算法 [M]. 北京:科学出版社,1992.
- [9] 杨立志.智能化测量方法与低频绝对振动测量 [D]. 学位论文.北京:清华大学精密仪器与机械学系,1992.
- [10] 杨学志,毛乐山,严普强.一种新型的惯性式特殊低频传感器 [J]. 清华大学学报(自然科学版),1998,38(11):73-76.

作者简介:



杨学志 1970 年出生,1993 年在清华大学精密仪器与机械学系获得学士学位,之后在本系直接攻读博士学位,并于 1998 年 7 月获得博士学位.现在北京大学遥感所作博士后研究工作,目前的研究领域为小波分析,图像处理与编码.

严普强 清华大学精密仪器与机械学系教授,博士生导师.主要研究领域低频振动测试、语音识别.