

# 基于并行算法的自适应滤波原理及其性能分析

尚 勇<sup>1,2</sup>, 刘卫东<sup>2</sup>, 吴顺君<sup>2</sup>

(1. 北京大学电子学系, 北京 100871; 2. 西安电子科技大学雷达信号处理重点实验室, 陕西西安 710071)

**摘 要:** 与普通的滤波器结构相比, 并行滤波器具有数据吞吐率高、系统功耗低等优点. 本文通过将单输入单输出滤波算法变换为双输入双输出算法, 分析了并行自适应滤波原理, 给出了并行 LMS 算法, 讨论了该并行算法的主要性能指标. 计算机仿真实验验证了本文的理论分析结果.

**关键词:** 自适应滤波; 并行 LMS 算法; 性能分析

**中图分类号:** TN713 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2001) 09-1230-03

## Analysis of Adaptive Filter Theory and Its Performance Based on Parallel Algorithm

SHANG Yong<sup>1,2</sup>, LIU Wei-dong<sup>2</sup>, WU Shun-jun<sup>2</sup>

(1. Department of Electronics, Peking Univ., Beijing 100871, China;

2. National Key Laboratory of Radar Signal Processing Xidian Univ., Xi'an, Shanxi 710071, China)

**Abstract:** Compared with the conventional filter structure, the parallel filter has higher throughput rate and lower power consumption. In this paper, the principle of parallel adaptive 2-by-2 algorithm based filter is presented. The parallel LMS algorithm and its performances are discussed. Simulations verify the performance of our approaches.

**Key words:** adaptive filter; parallel LMS algorithm; performance analysis

### 1 引言

近年来, 根据所需处理信号形式的不同, 人们对各种自适应滤波算法进行了深入地研究, 提出了许多新算法并针对已有的一些算法给出了改进算法. 在众多的自适应算法中, 受到人们广泛关注的一类算法是基于数据递推的算法, 其中最具有代表性的是最小均方误差 (LMS) 算法. 这种算法由于采用权值递推更新技术, 易于实现, 因此在工程上得到广泛的应用. 当然它也存在不少缺点, 如它的收敛速度慢等. 为了克服这些缺点, 人们对基本算法作了许多改进, 得到了一些改进的算法, 如解相关 LMS 算法, 变换域 LMS 算法, BLMS (Block-LMS) 算法<sup>[1]</sup>等.

然而大多数自适应算法因为运算量大或算法本身不易并行、流水线处理而很难用于高速数据处理. 而现在需要对大数据量进行高速处理的情况却越来越多, 因此关于各种高速自适应滤波算法的研究已逐渐成为一个研究热点. 人们对高速、性能稳定的自适应滤波器实现结构进行了大量研究<sup>[2-6]</sup>. 本文从理论上具体地分析了并行自适应 LMS 算法的原理和主要性能, 提出了一种新的算法. 与以前出现的具有并行特性的自适应算法如 BLMS 算法等相比, 本文所提出的算法将原型滤波器 (长度为  $N$ ) 分解成长度均为  $N/2$  的两个子滤波器, 自

适应算法分别应用于两个子滤波器; 在保证算法收敛的前提下, 本文所提算法的步长因子的范围比普通 LMS 算法大, 而 BLMS 算法的步长因子  $\mu$  的范围比普通 LMS 算法小. 因此, 本文所给算法在收敛速度、滤波器长度、步长因子  $\mu$  的选择上, 均优于 BLMS 算法和普通 LMS 算法. 计算机仿真实验验证了本文的理论分析结果.

### 2 并行自适应滤波原理

对于普通的 FIR 滤波器, 其基本的输入输出关系如下:

$$y(k) = h(k) * x(k) \quad (1)$$

将其写成并行形式如下:

$$y(2k) = x(2k) * h_0 + x(2k-1) * h_1 \quad (2)$$

$$y(2k+1) = x(2k) * h_1 + x(2k+1) * h_0 \quad (3)$$

其中:  $h_0$  和  $h_1$  分别为  $h$  的偶数项和奇数项.  $*$  表示卷积运算.

对于普通的 LMS 算法, 计算误差时, 需要已知一个期望信号. 式(2)、(3)给出的并行滤波器结构, 由于有两条输出支路, 期望信号的选择与一般的滤波器不同. 为了容易得到并行自适应滤波的期望信号, 一种简单有效的选取方法是将对应原型滤波器的期望信号按奇、偶项分为两个序列, 分别当作对应  $y(2k+1)$  支路和  $y(2k)$  支路的期望信号. 现以  $y(2k+1)$  支

收稿日期: 2000-06-26; 修回日期: 2001-01-09

基金项目: “十五”预研项目 (No. 7050602)

路为例分析并行自适应滤波的基本结构与性能。

设第  $j$  时刻  $y(2k+1)$  支路的输出信号为  $y_{1,j}$ , 期望信号为  $d_{1,j}$ . 其中下标 1 表示  $y(2k+1)$  支路. 有:

$$y_{1,j} = \mathbf{h}_{0,j}^H \mathbf{X}_{1,j} + \mathbf{h}_{1,j}^H \mathbf{X}_{0,j} \quad (4)$$

$\mathbf{h}$  下标中的 0 或 1 分别对应式(2)、(3)中的  $\mathbf{h}_0$  或  $\mathbf{h}_1$ ,  $\mathbf{X}$  下标中的 0 或 1 表示  $\mathbf{X}_0$  输入或  $\mathbf{X}_1$  输入. 式中  $(\cdot)^H$  表示矢量  $\cdot$  的共轭转置.

定义  $y(2k+1)$  支路的误差函数如下:

$$e_{1,j} = d_{1,j} - y_{1,j} = d_{1,j} - \mathbf{h}_{0,j}^H \mathbf{X}_{1,j} - \mathbf{h}_{1,j}^H \mathbf{X}_{0,j} \quad (5)$$

$e_{1,j}$  下标中的 1 同样表示  $y(2k+1)$  支路(即  $\mathbf{X}_1$  输入). 为了便于讨论, 这里假设输入数据前后不相关. 文献[7]指出, 在讨论 LMS 算法时, 通常这种假设是合理的. 对于输入数据前后有一定相关性的情况, 计算机仿真实验证明了并行 LMS 算法也有效, 而且随着数据相关性的增强, 并行 LMS 算法的收敛性能要优于普通 LMS 算法.

这里先对后面讨论中可能遇到的符号和变量做一简单定义和说明: 令

$$\mathbf{R}_{11} = E(\mathbf{E}_{1,j} \mathbf{X}_{1,j}^H), \mathbf{R}_{00} = E(\mathbf{E}_{0,j} \mathbf{X}_{0,j}^H), \\ \mathbf{P}_{10} = E(d_{1,j} \mathbf{X}_{0,j}), \mathbf{P}_{11} = E(d_{1,j} \mathbf{X}_{1,j}),$$

同时记:

$$\mathbf{X}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{1,j} \\ \mathbf{X}_{0,j} \end{bmatrix}, \mathbf{h}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{0,j} \\ \mathbf{h}_{1,j} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} \\ \mathbf{P}_{10} \end{bmatrix}, \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{00} \end{bmatrix}$$

显然  $\mathbf{R}_{11}$  和  $\mathbf{R}_{00}$  均为正定的厄米特阵, 故有:  $\mathbf{R}_{11} = \mathbf{Q}_1 \mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{Q}_1^H$ ; 其中  $\mathbf{Q}_1$  为酉阵,  $\mathbf{\Lambda}_1$  为对角阵.  $\mathbf{R}_{00} = \mathbf{Q}_0 \mathbf{\Lambda}_0 \mathbf{Q}_0^H$ ; 其中  $\mathbf{Q}_0$  为酉阵,  $\mathbf{\Lambda}_0$  为对角阵.

在这种假设条件下, 令均方误差  $E(e_{1,j}^2)$  最小, 便可求得最优权值. 通过分析可得如下关系式.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{h}_0^* \\ \mathbf{h}_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{00}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} \\ \mathbf{P}_{10} \end{bmatrix} \quad (6)$$

此时子滤波器  $\mathbf{h}_1$  和  $\mathbf{h}_0$  的最优解分别为:

$$\mathbf{h}_1^* = \mathbf{R}_{00}^{-1} \mathbf{P}_{10}, \mathbf{h}_0^* = \mathbf{R}_{11}^{-1} \mathbf{P}_{11} \quad (7)$$

输出函数  $y_{1,j}$  和误差函数  $e_{1,j}$  可分别表示为:

$$y_{1,j} = [\mathbf{h}_{0,j}^H \quad \mathbf{h}_{1,j}^H] \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{1,j} \\ \mathbf{X}_{0,j} \end{bmatrix} \triangleq \mathbf{h}_j^H \mathbf{X}_j \quad (8)$$

$$e_{1,j} = d_{1,j} - y_{1,j} = d_{1,j} - \mathbf{h}_j^H \mathbf{X}_j \quad (9)$$

式(6)~(9)在形式上与普通的 FIR 自适应滤波算法完全一样, 但是其中符号所代表的含义不同. 上面以  $y(2k+1)$  支路为例给出了并行自适应 FIR 滤波算法的原理. 同样也可用  $y(2k)$  支路做自适应处理, 原理同上, 具体分析在此从略.

### 3 基于梯度的并行 LMS 算法

上一部分讨论了并行自适应滤波算法的原理. 而 Widrow-Hoff LMS 算法是实现自适应滤波的一种简单有效的方法, 它是一种权值递推求解的方法. 这种方法不需要形成数据相关矩阵, 也不涉及矩阵求逆运算<sup>[8]</sup>. 下面讨论基于梯度的并行 LMS 算法.

首先以  $y(2k+1)$  输出支路为例进行分析. 考虑到  $y(2k+1)$  支路是由两个输入  $x_0, x_1$  分别通过子滤波器  $H_0, H_1$  后相加形成. 设:

$$\mathbf{h}_{j+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{0,j+1} \\ \mathbf{h}_{1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{0,j} \\ \mathbf{h}_{1,j} \end{bmatrix} - \mu \nabla \quad (10)$$

其中:  $\mu$  为控制  $\mathbf{h}_j$  的收敛速度和稳定性的常数, 称之为  $\mathbf{h}_j$  的步长因子.

在实时处理系统中, 一般选取单个误差样本平方的梯度作为均方误差梯度的估计值. 此时梯度  $\nabla$  的估计如下:

$$\hat{\nabla} = \begin{bmatrix} \hat{\nabla}_{0,j} \\ \hat{\nabla}_{1,j} \end{bmatrix} = -2(d_{1,j} - \mathbf{h}_{0,j}^H \mathbf{X}_{1,j} - \mathbf{h}_{1,j}^H \mathbf{X}_{0,j}) \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{1,j} \\ \mathbf{X}_{0,j} \end{bmatrix} \quad (11)$$

将其代入式(10)有:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{h}_{0,j+1} \\ \mathbf{h}_{1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{0,j} \\ \mathbf{h}_{1,j} \end{bmatrix} + 2\mu(d_{1,j} - \mathbf{h}_{0,j}^H \mathbf{X}_{1,j} - \mathbf{h}_{1,j}^H \mathbf{X}_{0,j}) \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{1,j} \\ \mathbf{X}_{0,j} \end{bmatrix} \quad (12)$$

由式(12), 迭代权值可分为两部分, 即  $\mathbf{h}_{0,j}$  和  $\mathbf{h}_{1,j}$ . 若要  $\mathbf{h}_j$  收敛, 则要求  $\mathbf{h}_{0,j}$  和  $\mathbf{h}_{1,j}$  均收敛. 因此可以分别讨论  $\mathbf{h}_{0,j}$  和  $\mathbf{h}_{1,j}$  的收敛条件. 对于  $\mathbf{h}_{0,j}$  有:

$$E(\mathbf{h}_{0,j+1}) = E(\mathbf{h}_{0,j}) + 2\mu \mathbf{P}_{11} - 2\mu \mathbf{R}_{11} E(\mathbf{h}_{0,j}) \\ = (\mathbf{I} - 2\mu \mathbf{R}_{11}) E(\mathbf{h}_{0,j}) + 2\mu \mathbf{P}_{11} \\ = \mathbf{Q}_1 (\mathbf{I} - 2\mu \mathbf{\Lambda}_1)^{j+1} \mathbf{Q}_1^{-1} E(\mathbf{h}_{0,0}) \\ + 2\mu \mathbf{Q}_1 \sum_{i=0}^j (\mathbf{I} - 2\mu \mathbf{\Lambda}_1)^i \mathbf{Q}_1^{-1} \mathbf{P}_{11} \quad (13)$$

由式(13)可知: 只有当

$$|1 - 2\mu \lambda_{R_{11, \max}}| < 1 \quad (14)$$

时, 才能保证  $\mathbf{h}_0$  收敛. 同样道理, 当

$$|1 - 2\mu \lambda_{R_{00, \max}}| < 1 \quad (15)$$

时,  $\mathbf{h}_1$  收敛. 因此保证权值  $\mathbf{h}$  收敛的  $\mu$  值应同时满足:

$$1/\lambda_{R_{11, \max}} > \mu > 0 \quad \text{和} \quad 1/\lambda_{R_{00, \max}} > \mu > 0 \quad (16)$$

由于实际中  $\lambda_{R_{11, \max}}, \lambda_{R_{00, \max}}$  不易得到, 而矩阵的迹为形成相关矩阵的信号的功率, 即  $\text{tr}(\mathbf{R}_{11}) = \sum_k E(\mathbf{X}_{1,k}^2)$ ,  $\text{tr}(\mathbf{R}_{00}) = \sum_k E(\mathbf{X}_{0,k}^2)$ . 故可以选

$$0 < \mu \leq 1/\text{tr}(\mathbf{R}_{11}) \quad \text{及} \quad 0 < \mu \leq 1/\text{tr}(\mathbf{R}_{00}) \quad (17)$$

为了使系统权值收敛, 步长因子  $\mu$  的一种有效选择为:

$$0 < \mu \leq 1/\max[\text{tr}(\mathbf{R}_{11}), \text{tr}(\mathbf{R}_{00})] \quad (18)$$

此时可以保证并行 LMS 算法收敛. 当考虑  $y(2k)$  支路时, 亦可得到相似的结论.

### 4 并行自适应 LMS 算法的暂态响应特性和失调量

通过对算法的分析, 下面给出并行 LMS 算法的性能参数——决定系统暂态响应特性的指数衰减时间常数和失调量. 由于篇幅所限, 具体推导在此从略. 下面给出主要结论.

权矢量  $\mathbf{h}_0$  和  $\mathbf{h}_1$  分别有  $N/2$  个分量, 即各有  $N/2$  个自由度. 也就是说它们分别有  $N/2$  个特征振动模式. 其第  $p$  个振动模式的均方误差每次迭代分别衰减  $(1 - 2\mu \lambda_{0,p})^2$  和  $(1 - 2\mu \lambda_{1,p})^2$ . 其中:  $\lambda_{0,p}$  和  $\lambda_{1,p}$  分别是  $\mathbf{\Lambda}_0$  和  $\mathbf{\Lambda}_1$  对角线上第  $p$  个元素. 对应  $\mathbf{h}_1$  第  $P$  个振动模式的指数衰减的时间常数为:

$$\tau_{0,p,msc} = 1/(4\mu\lambda_{0,p}) \quad (19)$$

对应  $h_0$  第  $P$  个振动模式的指数衰减的时间常数为:

$$\tau_{1,p,msc} = 1/(4\mu\lambda_{1,p}) \quad (20)$$

而并行 LMS 算法的失调量由下式给出.

$$M = \mu [tr(R_{11}) + tr(R_{00})] \quad (21)$$

## 5 计算机仿真结果

文献[4]给出了几种并行自适应算法的实现方案,本文的计算机仿真采用与其中第三种方法相似的一种实现方法.其主要步骤如下:

第一步:同时计算

$$h_{j+1} = \begin{bmatrix} h_{0,j+1} \\ h_{1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{0,j} \\ h_{1,j} \end{bmatrix} + 2\mu e_{1,j} \begin{bmatrix} X_{1,j} \\ X_{0,j} \end{bmatrix} = h_j + 2\mu e_{1,j} X_j \quad (22)$$

$$e_{1,j} = d_{1,j} - h_{0,j}^H X_{1,j} - h_{1,j}^H X_{0,j} \quad (23)$$

$$h'_{j+1} = \begin{bmatrix} h'_{0,j+1} \\ h'_{1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h'_{0,j} \\ h'_{1,j} \end{bmatrix} + 2\mu e_{0,j} \begin{bmatrix} X_{0,j} \\ X_{1,j} \end{bmatrix} = h'_j + 2\mu e_{0,j} \tilde{X}_j \quad (24)$$

$$e_{0,j} = d_{0,j} - h'_{0,j} X_{0,j} - h'_{1,j} X_{1,j-1} \quad (25)$$

其中  $e_{1,j}$ 、 $d_{1,j}$  分别为对应  $\gamma(2k+1)$  支路第  $j$  步迭代的误差和希望信号;  $e_{0,j}$ 、 $d_{0,j}$  分别为对应  $\gamma(2k)$  支路第  $j$  步迭代的误差和希望信号;而  $h_j$  与  $h'_j$  分别为对应  $\gamma(2k+1)$  支路和  $\gamma(2k)$  支路第  $j$  步迭代的权系数.

第二步:比较  $\text{abs}(e_{1,j})$  与  $\text{abs}(e_{0,j})$ ,选其中较大的支路对应的权值做为该次迭代的权系数,返回第一步.

下面通过计算机仿真实验验证本文给出的并行自适应 LMS 算法.实验条件如下:

考虑一个自适应仿模系统,设对应原型滤波器的期望信号  $d$  为输入原始信号通过权系数为

$$h = [-0.1903 \quad -0.0050 \quad 0.0146 \quad 0.0466 \quad 0.0896 \quad 0.1404 \\ 0.1952 \quad 0.2494 \quad 0.2984 \quad 0.3369 \quad 0.3617 \quad 0.3617 \quad 0.3369 \\ 0.2984 \quad 0.2494 \quad 0.1952 \quad 0.1404 \quad 0.0896 \quad 0.0466 \quad 0.0146 \\ -0.0050 \quad -0.1903] \text{ 的 FIR 滤波器的输出信号;该滤波器}$$

为一低通滤波器.对应并行算法,自适应仿模系统的初始权值分别设为  $h_{0,0} = [0, \dots, 0]_{11 \times 1}$ ;  $h_{1,0} = [0, \dots, 0]_{11 \times 1}$ ;对应输出  $y(2k)$  支路和  $y(2k+1)$  支路的期望信号分别为  $d$  的偶数项和奇数项.对应原型滤波器,初始权值设为  $h_0 = [0, \dots, 0]_{22 \times 1}$ .采取 Monte Carlo 实验的方法,实验次数  $K = 1000$ ;信噪比 20dB;步长因子  $\mu = 0.02$ ;

实验 1:设输入信号为一组统计不相关的数据通过系数为 [1 0.4] 的 AR 过程而形成.此时的归一化均方误差曲线如图 1、图 2 所示.

实验 2:设输

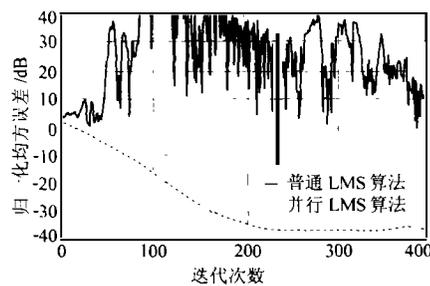


图 1 仿真实验 1 的学习曲线

入信号为一组前后不相关的数据.此时的归一化均方误差曲线如下图所示.

由上面的图 1 可见,当  $\mu$  值的选取增大到一定程度时,普通 LMS 算法已不能很好收敛时,并行算法仍能很好地收敛.由图 2 可见,当并行算法和普通算法均

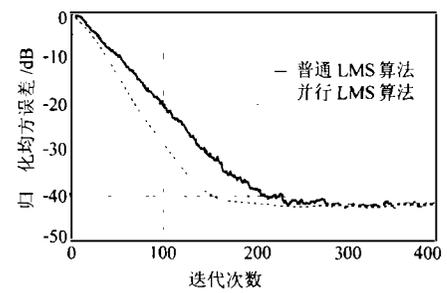


图 2 仿真实验 2 的学习曲线

收敛时,并行算法的收敛速度比普通算法快.而稳态时,两种算法的失调量大致相当.这些仿真结果都与前面的理论分析一致.从而证明了本文理论分析的正确性.

## 6 结束语

本文通过对并行自适应滤波算法原理和性能的分析,发现并行自适应 LMS 算法具有保证算法收敛的步长因子选择范围大,收敛速度快,数据吞吐率高的优点.计算机仿真实验验证了本文所给出的理论分析结果.

## 参考文献:

- [1] Shynk J.J. Frequency domain and multirate adaptive filtering [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 1992, 9(1): 15 - 37.
- [2] Meyer M D, Agrawal D P. A high sampling rate delayed LMS filter architecture [J]. IEEE Trans. -Circuits and System, 1993(11): 727 - 729.
- [3] Joseph Thomas. Pipelined systolic architectures for DLMS adaptive filtering [J]. Journal of VLSI Signal Processing 12, 1996: 223 - 246.
- [4] 尚勇, 吴顺君. 基于多项式分解的自适应 FIR 滤波器脉动结构 [J]. 电子科学学报, 2000, 22(5): 768 - 774.
- [5] Long Guozhu, Ling Fuyun, John G Proakis. The LMS algorithm with delayed coefficient adaptation [J]. IEEE Trans. -ASSP. 1989(9): 1397 - 1405.
- [6] Long Guozhu, Ling Fuyun, John G Proakis. Correction to "The LMS algorithm with delayed coefficient adaptation" [J]. IEEE Trans. -SP. 1992(1): 230 - 232.
- [7] [美] 罗伯特 A 蒙津戈, 托马斯 W 米勒 著. 沈铁汉, 梁福生, 石镇译. 自适应导论 [M]. 国防工业出版社, 1988.
- [8] 吴兆熊, 黄振兴, 黄顺吉. 数字信号处理 [M]. 国防工业出版社, 1985.

## 作者简介:

尚勇 男. 1970 年 12 月生于陕西西安. 博士后, 主要研究方向和兴趣: 通信信号处理, 雷达信号处理, 并行信号处理, 阵列信号处理.

刘卫东 男. 1968 年生于重庆. 现为西安电子科技大学博士研究生, 研究方向和兴趣: 统计信号处理, 雷达信号处理.

吴顺君 男. 1942 年生于上海. 教授, 博士生导师, 中国电子学会会士, 西安电子科技大学雷达信号处理国家重点实验室主任. 长期从事信号与信息处理方面的教学和科研工作.