$3x+1$ 推广函数 $T(x)$ 不动点的存在区域分析与数值算法

刘 帅，车翔玖，王钲旋
（吉林大学计算机科学与技术学院，吉林长春 130021）

摘 要： $3x+1$ 推广函数 $T(x)$ 的不动点性质及存在区域分析是分形中的一个重要研究问题. $T(x)$ 是结构复杂的超越函数，其在复平面上的不动点难于求解，不动点性质难于估计，这成为进一步研究 $T(x)$ 动力系统的一个障碍. 首先通过 $T(x)$ 的拓扑不变性，给出了 $T(x)$ 在复平面上存在不动点的构造性证明，分析了不动点的存在区域及其性质. 根据存在区域，给出了 $T(x)$ 的不动点在复平面上的分布. 通过不动点的分布，提出了一种求 $T(x)$ 不动点的数值算法. 找到了 $T(x)$ 在复平面上的多个收敛域，并绘制了收敛域处的分形图形. 数值实验结果表明，本文算法正确、简捷.

关键词： 分形；$3x+1$ 推广函数；不动点；存在区域；逃逸时间；数值算法
中图分类号： TP301 **文献标识码：** A **文章编号：** 0372-2112 (2011) 10-2282-06

Existence Domain Analysis and Numerical Algorithm of Fixed Point for Generalized $3x+1$ Function $T(x)$

LIU Shuai, CHE Xiang-jiu, WANG Zheng-xuan
(*College of Computer Science and Technology, Jilin University, Changchun, Jilin* 130021, *China*)

Abstract: For generalized $3x+1$ function $T(x)$, the feature of fixed points and their existence-domain analysis is an important problem in fractal. $T(x)$ is a complex transcendental function and its fixed point in C-plane is hardly to solve. Meanwhile, the feature of fixed point is difficult to analyze. All these become an obstacle for the further study of $T(x)$ dynamic system. In this paper, Because of the topological invariance of $T(x)$, we constructively proved its fixed point in C-plane firstly. Then we give the analysis for the existence domain of fixed points as well as their feature. Based on the existence domain of $T(x)$ fixed points, we estimated their distributions in C-plane. So we put forward a numerical algorithm for solving the fixed points of $T(x)$ by analyzed the basis of distributions. Furthermore, we obtained some convergence domains of $T(x)$ in C-plane and drew fractal image of these domains. The result of numerical experiment shows that the algorithm in this paper is correct and easy to implement.

Key words: fractal; generalized $3x+1$ function; fixed point; existence domain; escape time; numerical algorithm

1 引言

许多学者对 Collatz 提出的 $3n+1$ 问题进行了研究，且将其归纳为 $3n+1$ 猜想[1,2]. 许多学者对此问题进行了深入的研究，得出了一些结果[3]. 随着 Mandelbrot 构造出具有当今混沌动力学标志的 $f(z)=z^2+c$ 的 M 集[4]，标志了分形学科的诞生. 分形随即广泛应用于包括计算机图形学在内的各个计算机领域[5,6]. 同样，应用分形研究 $3n+1$ 猜想也同时出现.

为将 $3n+1$ 问题推广至复平面，Pe 和 Dumont 分别构造了 $3x+1$ 函数和 $3x+1$ 推广函数. 并用分形分别对这两个函数进行了分析，构造出具有良好视觉效果的分形图形[7,8]. 王兴元[9]对 $3x+1$ 推广函数 $T(x)$ 和 $C(x)$ 进行了比较，并通过两者分形图形的对比，给出了 $3x+1$ 推广函数在实轴附近具有分形特征的结论. 文献[11]研究了 $T(x)$ 在实轴上的不动点分布及其性质，并分析了 $T(x)=\frac{1}{2}\left[x3^{\sin^2(\frac{\pi x}{2})}+\sin^2(\frac{\pi x}{2})\right]$ 的特征点，绘制了分形图形. 进而，又对 $T(x)$ 的近似函数在复平面上的不动点性质进行了研究. 但是，$T(x)$ 在复平面上不动点的性质及分布问题始终没有得到解决.

为研究 $T(x)$ 的不动点性质和分布，需要找到 $T(x)$ 的不动点，这相当于解方程 $T(x)=x$. 现阶段尚没有很好的求解此类方程的方法. 王则柯[10]等对 Kuhn 算法进

收稿日期：2010-10-12；修回日期：2011-11-20
基金项目：国家自然科学基金（No.60773098/F020103）

行改进,得到了一种求复平面超越函数不动点的方法.但是此方法需要一定初始条件,且无法限定解的区域.如果将 $T(z)=z$(z 为复数)转化为方程组求解,其计算又很困难.龙云亮[11]等提出了基于围线积分和 Kuhn 算法的方法,但需要在给定区域求 $x^k\cdot(T'(x)-1)/(T(x)-x)$的围线积分($k$ 为区域解数目),再利用 Kuhn 方法求解.虽然这种方法能得到数值解,但是求解过程比较费时,且没有充分利用 $T(z)$本身的性质.

本文构造性地证明了 $T(x)$在复平面上实轴外存在不动点,并通过构造过程得到了不动点的分布,给出了 $T(x)$在复平面上 $y=\pm i$ 外的不动点及收敛域.基于 $T(x)$的拓扑不变性,提出了一种求解 $T(x)$在复平面上不动点的数值算法.实现了在 $T(x)$不动点附近的分形图形,且验证了其分形性质.实验结果证明,本文算法能够有效地求解 $T(x)$在复平面上给定区域的不动点.

2　$T(x)$在实轴上的不动点存在区间

将 $T(x)$的定义域扩展到复平面,自变量 x 改写为 z,则 $T(z)=\frac{1}{2}[z3^{\sin^2(\frac{\pi z}{2})}+\sin^2(\frac{\pi z}{2})]$.令 $z=a+bi$,$T(z)=a_1+b_1i$,令 $u=\frac{1}{2}-\cos\pi a\cdot\frac{e^{\pi b}+e^{-\pi b}}{4}$,$v=\sin\pi a\cdot\frac{e^{\pi b}-e^{-\pi b}}{4}$.若令 $z=re^{\theta i}$,则 $T(z)=\frac{1}{2}3^u\cdot r\cdot e^{i\theta_1}+\frac{u+vi}{2}$ ($\theta_1=\theta+v\ln3$).因为 $u^2+v^2=(\frac{\cos\pi a}{2}-\frac{e\pi^b+e^{-\pi b}}{4})^2$,因此可令 $r_1=\frac{e^{\pi b}+e^{-\pi b}-2\cos\pi a}{4}$,$u+vi=r_1\cdot e^{i\varphi}$.此时若令 $z_1=\frac{1}{2}3^u\cdot r\cdot e^{i\theta_1}$,$z_2=\frac{1}{2}r_1\cdot e^{i\varphi}$,则 $T(z)=z_1+z_2$.由此知定理 1.

定理 1　除 0 点外,当$|3^u-\frac{r_1}{r}|>2$时,$|T(z)|>|z|$,当 $3^u+\frac{r_1}{r}<2$ 时,$|T(z)|<|z|$.

证明　因为 $T(z)=z_1+z_2$,则$|z_1-z_2|=\frac{r}{2}|3^u-\frac{r_1}{r}|\leqslant|T(z)|\leqslant\frac{r}{2}|3^u+\frac{r_1}{r}|=|z_1+z_2|(r\neq0)$.命题得证.证毕.

由定理 1 可知推论 1.

推论 1　除 0 点外,当$|3^u-\frac{r_1}{r}|>2$或$|3^u+\frac{r_1}{r}|<2$时,z 不是 $T(z)$不动点.

由此可知,$T(z)$的不动点应满足$|3^u-\frac{r_1}{r}|\leqslant2$且$|3^u+\frac{r_1}{r}|\geqslant2$,设 $f(a,b)$为$|3^u-\frac{r_1}{r}|\leqslant2$,$g(a,b)$为$|3^u+\frac{r_1}{r}|\geqslant2$.则在 f、g 中令 $b=0$ 可以得到 $T(x)$在实轴上的不动点的存在区间,如性质 1 所示.

性质 1　$T(z)$在实轴$(k,k+1)$上存在不动点 a,且 a 满足 $1-2\log_3(2+1/k)\leqslant\cos\pi a\leqslant1-2\log_3(2-1/k)$,当$|k|\to\infty$时 $a\to k+(-1)^k\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\log_3 2}+\mathrm{mod}_2(k)\approx k+(-1)^k\cdot0.5843+\mathrm{mod}_2(k)$.($\mathrm{mod}_2(k)$为 k 对 2 取余的结果)

证明　$b=0$ 时,f 为$|3^{\sin^2(\frac{\pi a}{2})}-\frac{\sin^2(\frac{\pi a}{2})}{|a|}|\leqslant2$,$g$ 为$|3^{\sin^2(\frac{\pi a}{2})}+\frac{\sin^2(\frac{\pi a}{2})}{|a|}|\geqslant2$.由推论 1,若 a 为不动点则需同时满足f,g.故 $a\to\infty$时,$3^{\sin^2(\frac{\pi a}{2})}\to2$.解之可得 $a\to k+(-1)^k\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\log_3 2}+\mathrm{mod}_2(k)$.证毕.

3　$T(z)$在复平面上的不动点存在区域

将实轴的结论推广到复平面,则 $T(z)$的不动点同样满足推论 1.因此可由 f 和 g 限定不动点的存在区域.

显然易知 f、g 在 $x=2k$ 附近同样可构成类似的区域,而在 $x=2k+1$ 附近 f 和 g 交集为空.为清楚的说明函数的性质,本文用 matlab 中的绘图函数 *plot* 和 *ezplot* 对各类函数进行了绘制,如图 1 所示.

图 1 描述了 f 与 g 的性质.图 1 可直观的看出 f 和 g 的交集,其中内层为 g 边界,外层为 f 边界.同时可看出各个不动点存在区域的关系.由 f、g 的定义知,其中 f、g 的边界与实轴的交点必定是 $T(z)$在实轴上的不动点或其相反数.同时由 u,r_1,r 的定义可知,f 和 g 均关于 x 轴和 y 轴对称.又有 $T(z)$关于 x 轴

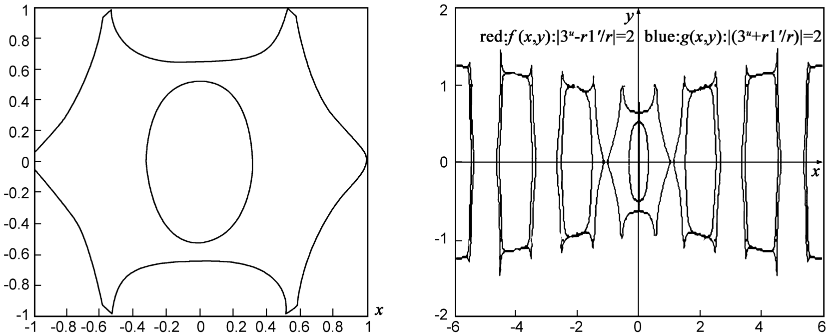

图1　f和g的边界图像

对称，因此，本文仅考虑 $a\geqslant 0, b\geqslant 0$ 的情况.

由于 f 与 g 的交集分为若干个相互独立的区域，由于 $b=0$ 时每个独立区域在实轴达到极值，由此可以用实轴上不动点的边界将复平面进行划分. 由性质 1 有：设 k 为偶数，由 $x=k-0.5843$，$x=k+0.5843$，$y=0$，$y=1$ 组合得到区域为 Q. 对 Q 进行 T 映射后结果区域为 $T(Q)$. 比较 Q 与 $T(Q)$ 可知 $Q\subset T(Q)$.

当 $k=2$ 时，对 Q 区域取 T 如图 2(a)所示，其中内层的矩形区域为 Q. 从图中可以明显看出 $Q\subset T(Q)$.

由此可知，当 k 取大于 0 的偶数时，由 $x=k-0.5843$，$x=k+0.5843$，$y=0$，$y=1$ 构成的区域中必有 $Q\subset T(Q)$. 用 $a=k$ 将区域 Q 划分为区域 Q_1 和 Q_2，通过计算 Q_1 与 Q_2 的公共边界 $T(k+bi)$ 可知 $T(k+bi)$ 随 b 增大接近实轴，可以将其近似看作实轴 Q 的左侧的一条线段. 因此，将 Q 划分为 Q_1 与 Q_2 可知，$Q_1\subset T(Q_1)$，$Q_2\subset T(Q_2)$.

对图 2(a)中 Q 用 $x=2$ 分割成 Q_1 与 Q_2 分别取 T 可得图 2(b)和图 2(c)，由此同样可以验证结论.

事实上，由于 $T(z)$ 也有为 2 近似周期，因此对不同的 k 得到的 Q 与 $T(Q)$ 的区域应彼此近似. 图 3 说明了这种近似. 由图 3 可以看出，在偶数点附近的 $T(Q)$ 均存在这种相似关系. 由于 T 连续可逆，因此可知每个 Q 内均存在 T 的不动点. 当 $k=2$ 时，求得不动点为 $1.4510+0.9600i$ 与 $2.5079+0.9449i$. 当 y 增大时，我们可以利用文献[12]中求得的 $B(z)$ 的不动点来近似给出 $T(z)$ 不动点的限定区域.

在文献[12]中给出了求 $T(z)$ 近似函数 $B(z)=\frac{1}{2}z3^{\sin^2(\frac{\pi z}{2})}$ 不动点的算法如下：

STEP1. 对任意自然数 n，计算 $C_1=2-4\log_3 2$，$C_2=\frac{8n\pi}{\ln 3}$；

STEP2. 计算 $M=\frac{C_1^2+C_2^2+\sqrt{(C_1^2+C_2^2)^2-8C_1^2+8C_2^2+32}}{2}$；

STEP3. 计算 $b=\frac{\ln(\frac{M+\sqrt{M^2-4}}{2})}{2\pi}$，$a=\frac{\arccos(\frac{C_1}{\sqrt{M+2}})}{\pi}$.

则 $z=a+bi$ 为 $B(z)$ 的基本不动点，对应的 $2n\pm a\pm bi$ 也为不动点.

由 $B(z)$ 的不动点构造性的给出 $T(z)$ 不动点的存在区域，可得性质 2.

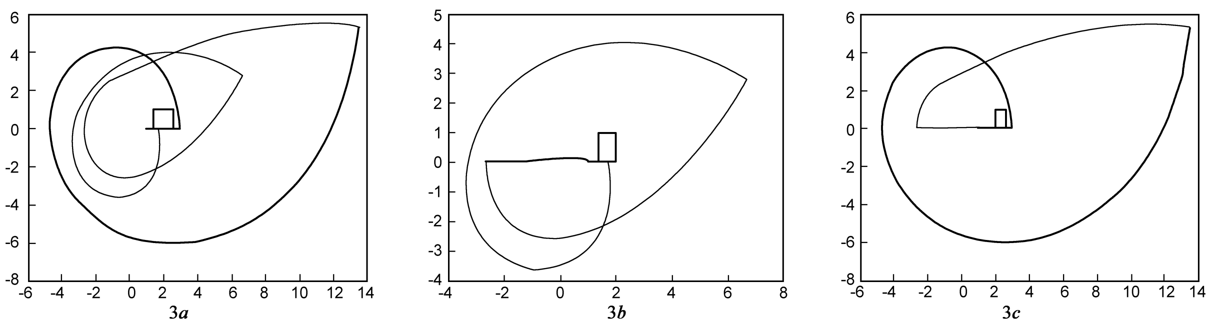

图2 k=2时的Q与$T(Q)$及分解

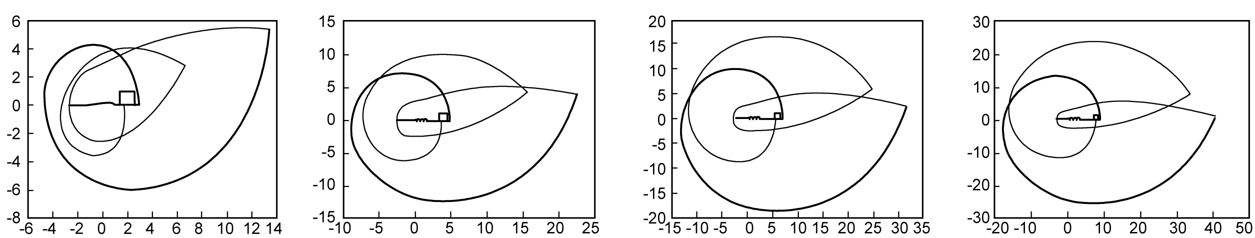
图3 k=2,4,6,8时的Q与$T(Q)$

性质 2 任取整数 $n>1$ 时解 $B(z)$ 不动点的虚部为 b_n，则由 $y=b_{n-1}$，$y=b_n$，$x=k$，$x=k+1$ 限定的区域 Q 满足性质 2，其中 k 为任意正整数.

设满足条件的 $B(z)$ 的不动点为 $z_n=a_n+b_n$. 由文献[12]知 $u_n=\log_3 2$，$v_n=2\pi n/\ln 3$，因此 $T(z_n)\approx z_n+0.3155+2.8596n\cdot i$. 再分析 $T(z)$ 的导数可知其在 $B(z)$ 不动点处的值远大于 $|u+vi|$. 由 $T(z)$ 和 $B(z)$ 的相对周期性可知：$T(z)$ 的不动点出现在 $B(z)$ 的不动点附近，距离不超过 $2.8596n/|T'(z)|$；且随着 a 和 b 的增大而逐渐接近 $B(z)$ 的不动点. 由此可知，$T(z)$ 与 $B(z)$ 在复平面实轴外的不动点存在对应关系. 事实上，$|a|$ 足够大时二者在实轴上的不动点近似相同，又因为 $T(z)$ 与 $B(z)$ 有相同的不动点 $z=0$，所以对应关系存在.

显然易知，对定义在复平面上的任意连续可微可逆函数 $f(z)$，设对其定义域内的真子区域 Q 有 $Q^*=f(Q)$，若 $Q\subset Q^*$，则存在 $Q_1\subset Q$ 满足 $Q=f(Q_1)$. 由此可知，对 $T(z)$ 的某定义区域 Q，必然可以找到一个 Q 的真子区域 Q_1 满足 $Q=T(Q_1)$. 随着判断区域不断减

小,最终必然收敛到某个很小的区域 Q_m. 因此,可以取给定步长进行采样计算以确定 Q_m. 若 Q_m 不符合解的精度限制,则可以将步长缩小后令 $Q_m = Q$ 递推计算. 直至步长小于给定值 ε 或结果区域 Q_m 满足解精度,即 Q_m 中所有点在解的精度限制下相同,此时 Q_m 中的任意点都可以当做 $T(x)$ 不动点的近似值. 由此我们给出如下求解 $T(z)$ 在复平面上不动点的数值算法.

4　$T(z)$ 在复平面上不动点的数值算法

下面给出求解 $T(z)$ 在 $(k,k+1)\times(0,\infty)$ 之间 n 个不动点的数值算法 (k、$n>1$). 这些不动点的虚部逐渐增大,即对应着 $B(z)$ 的前 n 个不动点. 显然 $y<0$ 时的不动点可通过取本算法结果的相反数而得到.

为便于描述算法,给出下面两个定义:

k 区域值:将复平面上某区域按步长采样得到矩阵,则将以该点为中心的边长为 k 的矩阵空间称为该点的 k 区域;定义该点的 k 区域值为 1,若该点的 k 区域内矩阵元素不全为 0,反之 k 区域值则为 0.

连续非 0 区域:设矩阵中子集 Q 为 $Q=\{Q(i,j)\in Q\}$,称集合 Q^{k+} 为 Q 的 k-邻域,若 $Q^{k+}=\{Q(i-k,j)\in Q$ 或 $Q(i+k,j)\in Q$ 或 $Q(i,j-k)\in Q$ 或 $Q(i,j+k)\in Q\}$. 称 Q 为连续非 0 区域,若 Q^{1+}-Q 为 0 矩阵,且 Q 中无 0 元素.

下面给出在区域 $(k,k+1)\times(0,\infty)$ 中求解 $T(z)$ 前 n 个不动点算法 Solve_Fixed_Point$(k,n,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$.

因为 $T(z)$ 满足定理 2 的条件,因此可以用算法对 T 的不动点进行求解. 其中 k 用来限定求解不动点的实轴区域; n 用来限定不动点数目; ε_1 限制采样的步长; ε_2 用来限制结果 $T(z)-z$ 的误差. 算法可以由步长 $<\varepsilon_1$ 终止,最终经过STEP5验证的点即可认为是不动点. 若最终无结果,则说明在当前允许的计算精度下没有不动点,即不存在精度为 ε_1 的 z^* 使 $|T(z^*)-z^*|<\varepsilon_2$(在距 0 点较远的地方会出现这种情况). 注意到在采样中若步长选择过大,有可能出现因为 Q_1 过小而找不到 Q_1 的情况(所有采样点的迭代全部在 Q 外),因此我们取矩形的左(右)上顶点元素(取实数部分接近 $k+0.5$ 的上角顶点采样元素)计算 $1/|T'(z)|$ 作为步长选择依据. 当步长取 $1/|T'(z)|\times\varepsilon$ 时,相邻元素取 T 得到的结果近似相差 ε,由此可以选择合适的 ε 以保证计算效果.

虽然STEP4可能会导致矩阵 Q 规模渐增,但事实上通过简单的计算可知,在具体搜索过程中,在远离 0 点处的搜索空间递减的速度接近 h^2,即每次完成STEP3后仅剩余很少的点. 因此算法收敛很快,具体搜索中除第一次外几乎每次搜索空间规模均近似为 $1/h^2$. 对本算法而言,当精度为 m 时,步长的总递减次数不超过 $\log_h m$ 次;每次搜索的规模近似为 $1/h^2$,共进行 k 次,总的计算次数约为 $k\cdot\log_h m/h^2$.

Solve_Fixed_Point$(k,n,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$

Input: $k,n,\varepsilon_1,\varepsilon_2$. $(k,k+1)\times(0,\infty)$ 为求解区域, ε_1 为不动点的允许误差, ε_2 为 $T(z)-z$ 的允许误差, n 为欲求解不动点的数目;

Output: 每个 Q_j 输出一个元素 Q_{i*j*} 作为不动点近似值;

Step 1. 计算 $B(z)$ 在 $x=k$ 与 $x=k+1$ 限定区域上的前 n 个不动点的虚部,分别称为 $im_1\sim im_n$;设 $im_0=0.9$ 为判断下界,用 im_j 划分各个不动点区域;给定步长 $h_j=1/|T'(k+0.5+im_j\cdot i)|$,分别按给定步长将{若 k 为奇数,则取 $(k,k+0.5)$, k 为偶数,取 $(k+0.5,k+1)$} $\times(im_i,im_{i+1})$ 区域对应到矩阵变量 $Q_i[int(1/(2h))+1, int((im_{i+1}-im_i)/h)+1]$;对所有的 Q_j 依次进行如下操作;

Step 2. 当 $h_j<\varepsilon_1$ 时,转 Step 5,否则转 Step 3;

Step 3. 对 Q 中非 0 元素 Q_{ij} 进行取 T 计算;若 $T(Q_{ij})$ 映射到 Q_{ij} 的 $1/h_j$ 区域外,或 $T(Q_{ij})$ 的 $1/h_j$ 区域值为 0 时,将对应元素记为 0; 重复直到 Q 中无元素变化;如果 Q 为 0 矩阵,退出;否则转 Step 4;

Step 4. $h_j=h_j^2$;如果 $h_j<\varepsilon_1$,则令 $h_j=\varepsilon_1$;将 Q 中的非 0 区域重新对应到新的矩阵 Q;转 Step 2;

Step 5. 对求得的矩阵中非 0 元素依次取值求 T;当存在元素 $Q_{i*j*}=min(|T(Q_{ij})-Q_{ij}|)<\varepsilon_2$ 时,输出结果 Q_{i*j*},退出.

Kuhn 算法在计算不动点时初值难于选择,因此在求解 $T(z)$ 在给定区域的不动点时用处不大. 如果将 $T(z)=z$ 变为实数方程组计算,则 $b>1$ 时在 PC 机上用软件求解时由于等待时间过长而得不出结果(使用工具为 matlab 与 mathematica). 本文算法运行时间仅相当于文献[11]中算法进行 Kuhn 求解的时间,节省的时间约为该算法前期确定解的数量和求积分工作的时间. 通过本文算法找到了 $T(z)$ 的部分不动点,验证了算法的正确性. 见表 1.

表 1　$T(z)$ 的不动点

区间	$T(z)$ 不动点					
(1,2)	$1.4510+0.9600i$	$1.4626+1.1985i$	$1.4699+1.3340i$		$1.4928+2.0197$	
(2,3)	$2.5079+0.9449i$	$2.5169+1.1763i$	$2.5187+1.3151i$		$2.5066+2.0165i$	
(3,4)	$3.4776+0.9664i$	$3.4782+1.1962i$	$3.4802+1.3307i$	…	$3.4938+2.0189i$	…
(4,5)	$4.5067+0.9663i$	$4.5098+1.1899i$	$4.5117+1.3233i$		$4.5057+2.0170i$	
(5,6)	$5.4858+0.9742i$	$5.4858+1.1990i$	$5.4862+1.3316i$		$5.4946+2.0186i$	
…				…		

表 2 为 $B(z)$ 的部分不动点,可对照表 1 比较来看,也验证了上面的结论.

注意表格中 $T(z)$ 与 $B(z)$ 相同位置的不动点. 由于 $T(z)$ 和 $B(z)$ 在复平面上的这些不动点都是发散不动点,而且膨胀系数 $|T'(z)|$ 也随着 $|z|$ 的增大而增大,导致在 $|z|$ 足够大的时候 $T(z)$ 与 $B(z)$ 的不动点差异很小

$(T(z_n)-B(z_n)=0.3155+2.8596n\cdot i)$. 因此对照 $B(z)$ 的不动点也可验证上文中的命题与推论.

表 2 $B(z)$ 的不动点

$B(z)$ 不动点				
$1.4927+0.9970i$	$1.4964+1.2172i$	$1.4976+1.3461i$		$1.4997+2.0210i$
$2.5073+0.9970i$	$2.5036+1.2172i$	$2.5024+1.3461i$		$2.5003+2.0210i$
$3.4927+0.9970i$	$3.4964+1.2172i$	$3.4976+1.3461i$	…	$3.4997+2.0210i$
$4.5073+0.9970i$	$4.5036+1.2172i$	$4.5024+1.3461i$		$4.5003+2.0210i$
$5.4927+0.9970i$	$5.4964+1.2172i$	$5.4976+1.3461i$		$5.4997+2.0210i$

5 $T(z)$ 的分形图形

显然 $T(z)$ 不动点数目 >1, 因此考虑 $T^*(z)=T(z)-z$ 可知 $T^*(z)=0$ 不存在 Picard 例外值, 这与前文的结论相符. 设定考察区域为不动点处 $(-0.000133, 0.000133)\times(-0.0001\times0.0001)$ 邻域, 逃逸阈值为 10000. 图 4 为 $T(x)$ 的若干分形图形区域, 每个分形图形区域的中心点位置在各图的下方. 考察图 4 可知, $T(Q)$ 中包含 $T^m(z)$ 的 0 点, 因此我们考虑不动点附近的包含 $T^3(z)=0$ 的点的吸引区域, 并由此得出其迭代图像的一些分形性质.

从图 4 看出, $T(z)$ 的迭代图形存在自相似. 取图 4 中黑色框部分的吸引域进行 T^3 运算(即 $T\bigcirc T\bigcirc T$), 结果如表 3 所示, 其吸引域的对应图形见图 5.

图 4 中所列出点值分别为每个区域的中心点. 由图 5 可知, 在每个吸引域经过 3 次迭代后, 都会落入 0 点附近吸引域的对应位置, 这表明 $T(z)$ 的迭代图形的自相似性. 由 $T(x)$ 在实轴上的不动点可知, 0 为吸引不动点; 考察 $T(z)=0$ 可知, 0 点不是 T 的 Picard 例外值. 因此, 复平面上有无穷多的点满足 $T(z)=0$. 在这些点附近必然存在某邻域保证与 0 点附近吸引域的保形映射, 故 $T(z)$ 存在无穷多个自相似的结构. 取图 5 外侧图形中与中心图形的 0 点位置相同的点进行验证, 均满足 $T^3(z)=0$.

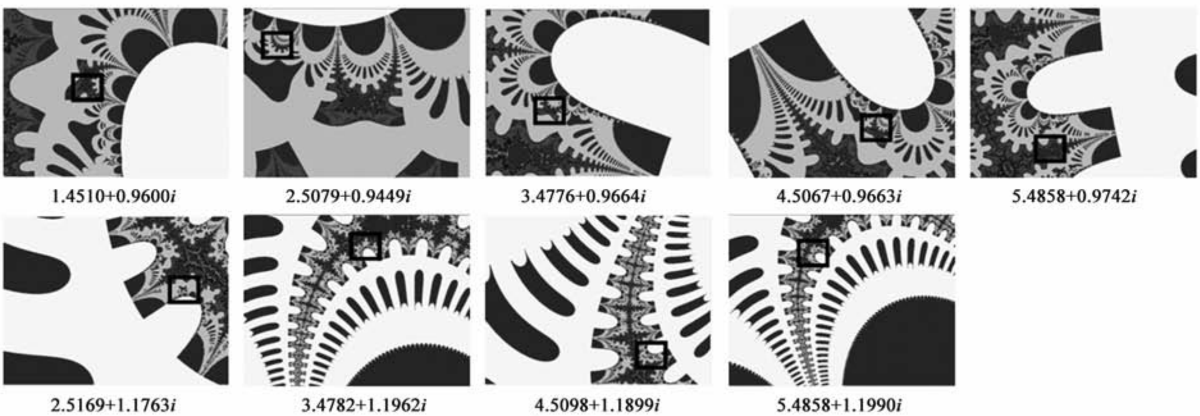

图4 几个不动点附近的分形图形

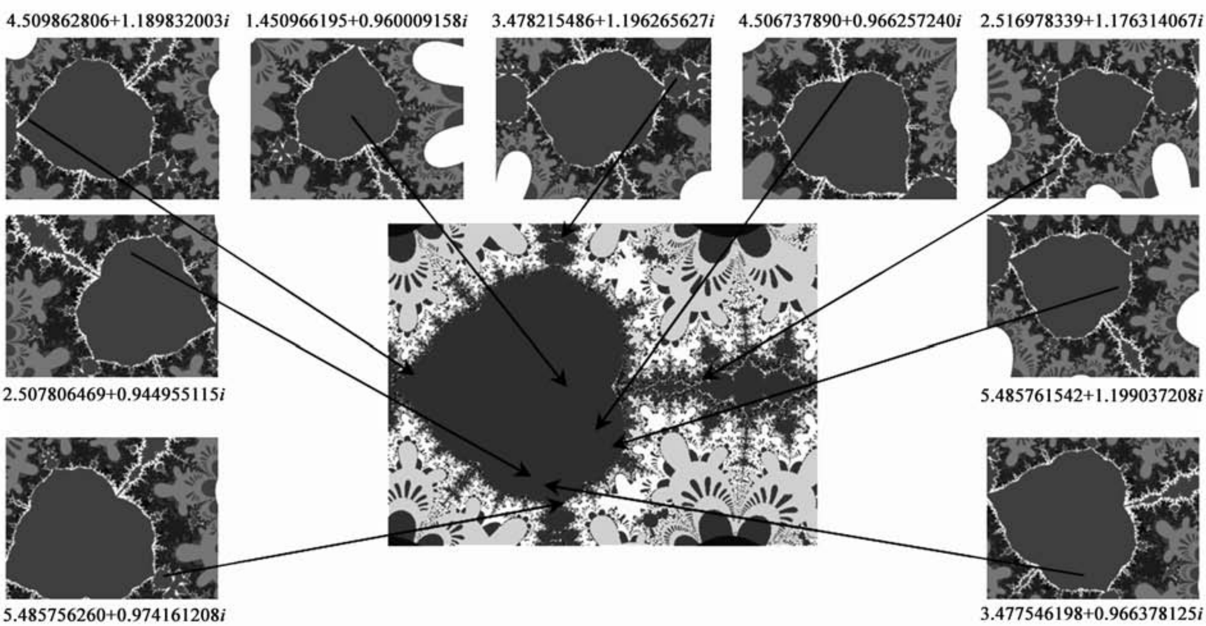

图5 各个吸引区域与0点附近吸引域的对应情况

表 3　部分点取 T^3 的结果

z	$T^3(z)$	z	$T^3(z)$
$1.450966195+0.960009158i$	$-0.034342096+0.008798391i$	$2.516977664+1.176313205i$	$0.981754590+0.025661570i$
$2.507807477+0.944956248i$	$-0.045983269-0.542434422i$	$3.478216369+1.196266044i$	$-0.008314726+0.792014760i$
$3.477546523+0.966375963i$	$0.001665139-0.608934547i$	$4.509862072+1.189831919i$	$-0.869536906+0.008853703i$
$4.506738853+0.966258853i$	$0.220415582-0.367372822i$	$5.485761703+1.199037189i$	$0.400047880+0.438115613i$
$5.485757216+0.974160064i$	$-0.007740697-0.796517469i$		

6　结论与展望

本文针对 $T(z)$的不动点进行了研究,求得了 $T(z)$不动点的分布区域,并给出了求给定区域的 $T(z)$不动点的数值算法.由 $B(z)$在 $k>1$ 时的不动点可知,$T(z)$的不动点分布在整个复平面上.实验结果表明,$T(z)$不动点分布在整个复平面的 $x=k\pm0.5843$ 和 $x=k\pm0.5$ 之间(k 为偶数),并与 $B(z)$的不动点成一一对应关系.通过分析其迭代图形,可知其具有分形的自相似性、局部-整体对应性和映射的某些性质.并由此猜测对函数族 $f(z)=B(z)+\varepsilon\cdot\sin^2(\frac{\pi z}{2})(0\leqslant\varepsilon\leqslant1)$的不动点都有相似的结论.

文中算法在计算距 0 点较远的不动点时,由于 $|f'(z)|$很大导致计算量较大,因此下一步需研究如何缩减计算量;以及研究此类超越函数分形图形的生成算法.

参考文献

[1] 1 Alves J F, Graca M M, Dias M E S, et al. A linear algebra approach to the conjecture of Collatz[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2005, 394(1): 277 – 289.

[2] Lagarias J C. The $3x+l$ problem and its generalizations[J]. American Mathematical Monthly, 1985, 92(1): 3 – 23.

[3] John Simons, Benne de Weger. Theoretical and computational bounds for m-cycles of the $3n+1$ problem[J]. Acta Arith, 2005, 117(1): 51 – 70.

[4] Mandelbrot B B. The Fractal Geometry of Nature[M]. San Fransisco: Freeman W H, 1982.1 – 122.

[5] 李晋江,张彩明,范辉,等.基于分形的图像修复算法[J].电子学报.2010,38(10):2430 – 2435.
LI Jin-jiang, ZHANG Cai-ming, FAN Hui, et al. Image inpainting algorithm based on fractal theory. Acta Electronica Sinica. 2010, 38(10): 2430 – 2435.(in Chinese)

[6] 俞璐,吴乐南.分形图像编码的矩阵表示和收敛性分析[J].电子学报.2004,32(7):1103 – 1107.
YU Lu, WU Le-nan. Matrix representation and convergence analysis of fractal image encoding[J]. Acta Electronica Sinica. 2004, 32(7): 1103 – 1107.(in Chinese)

[7] Pe J L. The $3x+1$ fractal[J]. Computers and graphics, 2004, 25(3): 431 – 435.

[8] Dumont J P, Reiter C A. Visualizing generalized $3x+1$ function dynamics[J]. Computers and Graphics, 2001, 25(5): 553 – 595.

[9] 王兴元,于雪晶.基于分形可视化方法研究广义 $3x+1$ 函数的动力学特性[J].自然科学进展,2007,17(4):529 – 535.
WANG X Y, YU X J. Study the dynamic theory of generalized 3x+1 function based on fractal visual method[J]. Progress in Natural Science, 2007, 17(4): 529 – 535.(in Chinese)

[10] 王则柯.复平面上计算超越函数零点的一种有效算法[J].中山大学学报,1981,(3):15 – 21.
WANG Ze-ke. An Effieient Algorithm for Computing the Zeros of Transeendental Functions in the Complex Plane[J]. Acta Universitatis Sunyatseni, 1981.15 – 21.(in Chinese)

[11] Yunliang Long, Edward K N Yung. Kuhn Algorithm: Ultraconvenient Solver to Complex Polynomial and Transcendental Equations without Initial Value Selection[J]. International Journal of RF and Microwave Computer-Aided Engineering, 2002, 12(6): 540 – 547.

[12] 刘帅,王钲旋.一个 $3x+1$ 近似推广函数的不动点与分形图像[J].计算机辅助设计与图形学学报,2009,21(12):1740 – 1744.
LIU Shuai, WANG Zheng-xuan. Fixed Point and Fractal Images for a Generalized Approximate $3x+1$ Function[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2009, 21(12): 1740 – 1744.(in Chinese)

作者简介

刘　帅　男,1982 年出生于吉林省长春市,现为吉林大学计算机科学与技术学院计算机应用方向博士研究生,导师为王钲旋教授.主要研究方向为分形几何,3x+1 分形等.
E_mail: ls_25210114@sohu.com

车翔玖　男,1969 年出生,博士、吉林大学计算机科学与技术学院教授,主要研究方向为计算机图形学.

王钲旋　男,1945 年出生,教授,吉林大学计算机科学与技术学院、计算机应用方向博士生导师,主要研究方向为计算机图形学,分形几何.