基于参数单点模糊化方法的模糊系统及其逼近能力

袁学海，李洪兴，孙凯彪
（大连理工大学控制科学与工程学院，辽宁大连 116024）

摘　要： 本文研究了单输入-单输出模糊系统的构造和所构造的模糊系统的逼近能力.首先，在模糊系统的构造中，引入了对输入变量进行参数单点模糊化的方法.应用这种方法，当推理前件和后件都取为具有二相性的三角波时，对六类(41个)模糊蕴涵算子构造的模糊系统进行了研究.其次，对所构造的模糊系统的逼近能力做了研究，给出了它们的余项表达式和余项估计公式.

关键词： 模糊控制；模糊蕴涵算子；模糊系统；泛逼近性
中图分类号： TP13　**文献标识码：** A　**文章编号：** 0372-2112 (2011) 10-2372-06

Fuzzy Systems and Their Approximation Capability Based on Parameter Singleton Fuzzifier Methods

YUAN Xue-hai，LI Hong-xing，SUN Kai-biao
(*School of Control Science and Engineering*，*Dalian University of Technology*，*Dalian*，*Liaoning* 116024，*China*)

Abstract： The aim of this paper is to study the construction of fuzzy systems and their approximation capability. Firstly，a new fuzzifier method called parameter singleton fuzzifier is introduced. By the use of the new fuzzifier method，the construction of fuzzy systems based on six classes of fuzzy implication operators is studied when the antecedent part and consequent part of the fuzzy inference are chosen as triangular membership functions with two-phase. Secondly，the approximation capability of the fuzzy systems is discussed and their approximate error formulas and the error estimate formulas are built.

Key words： fuzzy control；fuzzy implication operators；fuzzy systems；universal approximations

1　引言

模糊系统的构造及其所构造的模糊系统的泛逼近性是模糊控制领域的热点研究问题之一.熟知的模糊系统的构造主要分为“对输入变量进行模糊化－构造模糊推理关系－模糊推理－对输出模糊集进行解模糊化”等四个过程[1].在模糊系统的构造中，所见到的文献都是对输入变量进行单点模糊化.模糊推理使用的是CRI推理方法或三I推理方法[2,3]；而在构造模糊推理关系和模糊推理时，模糊蕴涵算子的选择对模糊系统会产生很大的影响.常用的解模糊化方法有三种：(a) 中心平均解模糊化方法；(b) 重心法解模糊化方法；(c) 最大值解模糊化方法[1].文献[4,5]指出：对一些常用的正则模糊蕴涵算子，如Zadeh蕴涵、R_0-蕴涵、Lukasiewicz蕴涵等，当采用单点模糊化和重心法解模糊化方法时，用CRI模糊推理算法或三I算法构造的模糊系统没有响应能力.由于一些常用的正则模糊蕴涵算子和三I推理方法有较好的逻辑基础[3,6].因此这些蕴涵算子在构造模糊系统中的作用还没有完全被揭示出来.文献[7]告诉我们：如果对模糊推理关系的聚合取“交”，对正则型模糊蕴涵算子，使用最大值解模糊化方法可构造出具有泛逼近性的模糊系统.那么是否对正则型模糊蕴涵算子，对模糊推理关系的聚合取“并”，就一定不能使用重心法构造模糊系统呢？因此如何使用重心法解模糊化方法构造出具有较好响应能力的模糊系统是本文研究工作的动机之一.

模糊系统的泛逼近性是模糊控制的另一个重要的研究课题.文献[1,8]等研究了Mamdani模糊系统的泛逼近性问题.文献[9,10]分别研究了模糊控制器的偏差问题和变论域模糊控制器的模拟电路问题.但到目前为止，有两个问题一直没有文献进行研究：一个是用重心法解模糊化构造的模糊系统的逼近精度或重心法构造

收稿日期：2010-06-20；修回日期：2011-07-11
基金项目：国家自然科学基金（No.90818025，No.61074044）

的模糊系统具有泛逼近性的充分条件;另一个问题是用重心法构造的模糊系统的余项表达式.这是本文研究工作的第二个动机.

为了解决对正则型模糊蕴涵算子,不能用推理关系取“并”和重心法解模糊化构造模糊系统的问题,我们引入了对输入变量进行“参数单点模糊化”的方法.对文献[4,5]中出现的六类(41 个)常用的模糊蕴涵算子分别使用“参数单点模糊化-重心法解模糊化”构造出了具有插值形式和具有拟合形式的模糊系统.结果发现:对常用的正则型模糊蕴涵算子,都可用“参数单点模糊化—重心法解模糊化”构造模糊系统.

为解决用重心法解模糊化构造的模糊系统的逼近能力问题,我们研究了两类重要的模糊系统 $H_1(x)$和$H_2(x)$.首先我们建立了这两个模糊系统的余项表达式,并分别给出了它们的余项估计上界.证明了 $H_1(x)$对严格单调函数具有二阶逼近精度,$H_2(x)$具有一阶逼近精度.

本文安排如下:第 2 节在引入“参数单点模糊化”方法的基础上,研究了模糊系统的构造.第 3 节研究了模糊系统 $H_i(x)(i=1,2)$的逼近能力.

2　模糊系统的构造

设 T 为$[0,1]$上的 t-范[3],本文用到的 t-范有:$T_1=$“$\wedge$”;$T_2=$“$\cdot$”;$T_3=$“T_m”,即:

$$aT_1b=\min\{a,b\};aT_2b=ab;$$

$$aT_mb=(a+b-1)\vee 0;$$

若模糊蕴涵算子 θ 满足:

$$\theta(1,0)=0,\theta(0,0)=\theta(0,1)=\theta(1,1)=1$$

则称 θ 为正则蕴涵,非正则蕴涵称为异常蕴涵[3].

本文将使用文献[4,5]中出现的 41 个模糊蕴涵算子来构造模糊系统.将其分成六类(见附录).

考虑单输入单输出模糊系统.设输入论域 X,输出论域为 Y.令 $\mathscr{A}=\{A_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$和 $\mathscr{B}=\{B_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$为推理前件和推理后件的类且有推理规则:

$$\text{If } x \text{ is } A_i,\text{then } y \text{ is } B_i \tag{1}$$

设 x_i 为 A_i 的峰点,y_i 为 B_i 的峰点.设 $a=x_1<x_2<\cdots<x_n=b$.将$\{y_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$按从小到大顺序排列:$c=y_{k_1}<y_{k_2}<\cdots<y_{k_n}<y_{k_{n+1}}=d$.

令 $\Delta y_{k_i}=y_{k_{i+1}}-y_{k_i}(i=1,2,\cdots,n)$,其中 $d=y_{k_n}+\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta y_{k_i}$为新增加的点.令 $\sigma(i)=k_i$,由于 $\sigma\sigma^{-1}(i)=i$,故 $y_i=y_{\sigma\sigma^{-1}(i)}=y_{k_{\sigma^{-1}(i)}}$.记 $\Delta y_i=\Delta y_{k_{\sigma^{-1}(i)}}$.本文构造模糊系统的方法如下:

第一步　选取蕴涵算子,将式(1)转化成模糊关系:

$$R_i(x,y)=\theta(A_i(x),B_i(y))(i=1,2,\cdots,n)$$

第二步　将输入变量 x“参数单点模糊化”,即

$$A_i^*(x')=\begin{cases}A_i(x),x'=x\\0,x'\neq x\end{cases}(1\leqslant i\leqslant n) \tag{2}$$

第三步　先推理,后聚合(聚合取“并”),即

$$B^*(y)=\bigvee_{i=1}^{n}A_i(x)T\theta(A_i(x),B_i(y)) \tag{3}$$

第四步　用重心法解模糊化:设

$$\bar{S}(x)=\frac{\int_c^d yB^*(y)\mathrm{d}y}{\int_c^d B^*(y)\mathrm{d}y}$$

由定积分的定义易知:

$$\bar{S}(x)\approx H(x)=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}y_kB^*(y_k)\Delta y_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}B^*(y_k)\Delta y_k} \tag{4}$$

称 $H(x)$为重心法模糊系统.

注 1　“参数单点模糊化方法”考虑了第 i 条推理规则 “If x is A_i,then y is B_i”的前件 A_i 对输入变量 x 的支持程度.若 $A_i(x)>0$,则第 i 条推理规则起作用;若 $A_i(x)=0$,A_i 对输入变量 x 的支持程度为 0,此时第 i 条推理规则不起作用.

本文假设$\{A_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$和$\{B_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$为二相性的三角波,则式(3)变为:

$$\begin{aligned}B^*(y)=&A_i(x)T\theta(A_i(x),B_i(y))\\&\vee A_{i+1}(x)T\theta(A_{i+1}(x),B_{i+1}(y))\end{aligned} \tag{5}$$

我们有以下结果:

定理 1　对第一类模糊蕴涵算子 θ,按式(4)构造的模糊系统有以下形式:

(ⅰ) 若 $T=$“T_m”,则当 $x\in[x_i,x_{i+1}]$时,有

$$H_1(x)=\frac{A_i(x)y_i\Delta y_i+A_{i+1}(x)y_{i+1}\Delta y_{i+1}}{A_i(x)\Delta y_i+A_{i+1}(x)\Delta y_{i+1}} \tag{6}$$

(ⅱ) 若 $T=$“$\cdot$”,则当 $x\in[x_i,x_{i+1}]$时,

$$H_3(x)=\frac{A_i(x)y_i\Delta y_i+A_{i+1}(x)y_{i+1}\Delta y_{i+1}+A_i(x)A_{i+1}(x)L_i}{A_i(x)\Delta y_i+A_{i+1}(x)\Delta y_{i+1}+A_i(x)A_{i+1}(x)M_i}$$

(ⅲ) 若 $T=$“$\wedge$”,则

$$H_4(x)=\begin{cases}\dfrac{A_i(x)y_i\Delta y_i+A_{i+1}(x)P_i}{A_i(x)\Delta y_i+A_{i+1}(x)Q_i}, & x\in I_1\\[2ex]\dfrac{A_i(x)P_{i+1}+A_{i+1}(x)y_{i+1}\Delta y_{i+1}}{A_i(x)Q_{i+1}+A_{i+1}(x)\Delta y_{i+1}}, & x\in I_2\end{cases}$$

其中,对 $1\leqslant i\leqslant n$,

$$P_i=\sum_{k\neq i}y_k\Delta y_k,\ Q_i=\sum_{k\neq i}\Delta y_k$$

$$L_i=\sum_{k\neq i,i+1}y_k\Delta y_k,\ M_i=\sum_{k\neq i,i+1}\Delta y_k$$

$$I_1=[x_i,\frac{1}{2}(x_i+x_{i+1})]$$

$$I_2=(\frac{1}{2}(x_i+x_{i+1}),x_{i+1}]$$

证明 由式(5)知:$B^*(y_i)=A_i(x)$, $B^*(y_{i+1})=A_{i+1}(x)$, $B^*(y_k)=A_i(x)TA_{i+1}(x)(k\neq i,i+1)$

(i) 当 $T=$"T_m"时,$B^*(y_k)=0(k\neq i,i+1)$.将 $B^*(y_k)(k=1,2,\cdots,n)$代入到式(4)便得到式(6).

其它类似可证. 证毕

注 2 由文献[4,5]知:对定理 1 中的模糊蕴涵算子,当对输入变量 x 采用单点模糊化时,按文献[4,5]构造的模糊系统为一个常数.而用"参数单点模糊化"方法可构造出的模糊系统 $H_i(x)(i=1,3,4)$具有泛逼近性.

类似地,我们有下列结果:

定理 2 对第二类模糊蕴涵算子 θ,对任意的 t-范 T,按式(4)构造的模糊系统 $H(x)=H_1(x)$.

定理 3 对第三类模糊蕴涵算子 θ,按照式(4)构造的模糊系统具有下列形式:$x\in[x_i,x_{i+1}]$时

$$H(x)=\frac{(A_i(x)TA_i(x))y_i\Delta y_i+(A_{i+1}(x)TA_{i+1}(x))y_{i+1}\Delta y_{i+1}}{(A_i(x)TA_i(x))\Delta y_i+(A_{i+1}(x)TA_{i+1}(x))\Delta y_{i+1}}$$

特别当 $T=$"$\cdot$"时,有

$$H_2(x)=\frac{A_i^2(x)y_i\Delta y_i+A_{i+1}^2(x)y_{i+1}\Delta y_{i+1}}{A_i^2(x)\Delta y_i+A_{i+1}^2(x)\Delta y_{i+1}} \tag{7}$$

定理 4 对第四类模糊蕴涵算子 θ,则当 $T=$"$\wedge$"时或 $T=$"$\cdot$"时,按式(4)构造的模糊系统为 $H(x)=H_4(x)$.

定理 5 对第五类模糊蕴涵算子 θ,当 $T=$"T_m"时,按照式(4)构造的模糊系统为:

$$H_5(x)=\begin{cases}\dfrac{A_i(x)y_i\Delta y_i+\Delta_i(x)P_i}{A_i(x)\Delta y_i+\Delta_i(x)Q_i}, & x\in J_1\\[2ex] \dfrac{A_i(x)y_i\Delta y_i+A_{i+1}(x)y_{i+1}\Delta y_{i+1}+\Delta_i(x)L_i}{A_i(x)\Delta y_i+A_{i+1}(x)\Delta y_{i+1}+\Delta_i(x)M_i}, & x\in J_2\\[2ex] \dfrac{A_{i+1}(x)y_{i+1}\Delta y_{i+1}+\Delta_i(x)P_{i+1}}{A_{i+1}(x)\Delta y_{i+1}+\Delta_i(x)Q_{i+1}}, & x\in J_3\end{cases}$$

且 $H_5(x_i)=C$(常数) $(i=1,2,\cdots,n)$.

这里 $\Delta_i(x)=|A_i(x)-A_{i+1}(x)|$, L_i, M_i, P_i 和 Q_i 与定理 1 的意义相同,

$$J_1=[x_i,\frac{1}{3}(2x_i+x_{i+1})]$$

$$J_2=(\frac{1}{3}(2x_i+x_{i+1}),\frac{1}{3}(x_i+2x_{i+1}))$$

$$J_3=[\frac{1}{3}(2x_i+x_{i+1}),x_{i+1}]$$

定理 6 (ⅰ)设模糊蕴涵算子 $\theta=\theta_7$,则对任意的 t-范,按照式(4)构造的模糊系统为:

$$H_6(x)=\begin{cases}y_i, & x=x_i\\ C, & x\in(x_i,x_{i+1})\\ y_{i+1}, & x=x_{i+1}\end{cases}$$

其中 C 为常数.

(ⅱ) 当取模糊蕴涵算子 θ 为:$\bar{\theta}_2(a,b)=1-a+a^2b$ 且 $T=$"T_m"时,按式(4)构造的模糊系统 $H(x)=H_2(x)$.

3 模糊系统的逼近能力

在已构造出的模糊系统中,显然 $H_6(x)$不具有泛逼近性.$H_i(x)(1\leqslant i\leqslant 5)$ 具有泛逼近性,当 Δy_i 为常数时(即对 Y 的划分为等距划分时),$H_1(x)$和 $H_2(x)$分别变为:

$$F_1(x)=A_i(x)y_i+A_{i+1}(x)y_{i+1}(x\in[x_i,x_{i+1}])$$

$$F_2(x)=\frac{A_i^2(x)y_i+A_{i+1}^2(x)y_{i+1}}{A_i^2(x)+A_{i+1}^2(x)},x\in[x_i,x_{i+1}]$$

本节假设$\{(x_i,y_i)\}_{(1\leqslant i\leqslant n)}$为某系统 $s(x)$的输入输出数据,即 $y_i=s(x_i)(i=1,2,\cdots,n)$.

我们先建立两个引理.

引理 1 设 $f(x)$在$[a,b]$上有二阶导数且 $f(a)=f(b)=0$,则$\forall x\in[a,b]$, $\exists\xi\in(a,b)$使

$$f(x)=\frac{1}{2}f''(\xi)(x-a)(x-b)$$

引理 2 设 $\omega_1>0,\omega_2>0$,则

$$\max_{x\in[0,1]}\frac{x(1-x)}{\omega_1x+\omega_2(1-x)}=\frac{1}{(\sqrt{\omega_1}+\sqrt{\omega_2})^2}$$

本节假定系统 $s(x)$具有二阶连续导数且$\|s\|_\infty=\max\limits_{x\in[a,b]}|s(x)|$.则显然有

定理 7 $H_1(x)$与 $H_2(x)$都具有一阶逼近精度,即令 $h=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta x_i$,则

$$\|s-H_i\|_\infty\leqslant\|s'\|_\infty h,(i=1,2)$$

定理 8 (ⅰ) 当 $x\in[x_i,x_{i+1}]$时,存在 $\xi_i,\eta_i\in(x_i,x_{i+1})$使

$$\underline{r_1}(x)=s(x)-F_1(x)=\frac{1}{2}s''(\xi_i)(x-x_i)(x-x_{i+1})$$

$$r_1(x)=H_1(x)-F_1(x)$$
$$=\frac{A_i(x)A_{i+1}(x)(y_{i+1}-y_i)\Delta_i}{A_i(x)\Delta y_i+A_{i+1}(x)\Delta y_{i+1}}$$

$$\overline{r_1}(x)=s(x)-H_1(x)$$
$$=\frac{A_i(x)A_{i+1}(x)}{A_i(x)\Delta y_i+A_{i+1}(x)\Delta y_{i+1}}K$$

(ⅱ) $\|\underline{r_1}\|_\infty\leqslant\frac{1}{8}\|s''\|_\infty h^2$, $\|\overline{r_1}\|_\infty\leqslant Mh^2$,

$$\|r_1\|_\infty\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{|\Delta_i\|y_{i+1}-y_i|}{(\sqrt{\Delta y_{i+1}}+\sqrt{\Delta y_i})^2} \tag{8}$$

其中 $h=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta x_i$, $\Delta_i=\Delta y_{i+1}-\Delta y_i$,

$$K=-\frac{1}{2}s''(\eta_i)(A_i(\eta_i)\Delta y_i+A_{i+1}(\eta_i)\Delta y_{i+1})(\Delta x_i)^2$$
$$-\Delta_i s'(\eta_i)(\Delta x_i)$$

$$M=\left[\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{1}{(\sqrt{\Delta y_i}+\sqrt{\Delta y_{i+1}})^2}\right]$$
$$\cdot\left[\frac{1}{2}\|s''\|_\infty\max\{\Delta y_i,\Delta y_{i+1}\}+\frac{|\Delta_i|}{\Delta x_i}\|s'\|_\infty\right]$$

(ⅲ)假设对 X 的划分为等距划分且 $s(x)$ 为严格单调函数,则

$$\|r_1\|_\infty\leqslant 2\|s''\|_\infty h^2,\ \|\overline{r_1}\|_\infty\leqslant\frac{17}{8}\|s''\|_\infty h^2 \quad (9)$$

证明　(ⅰ)注意到 $A_i(x)+A_{i+1}(x)=1$,有

$$r_1(x)=\frac{A_i(x)A_{i+1}(x)(y_{i+1}-y_i)(\Delta y_{i+1}-\Delta y_i)}{A_i(x)\Delta y_i+A_{i+1}(x)\Delta y_{i+1}}$$

对 $x\in[x_i,x_{i+1}]$,令

$$f(x)=(A_i(x)\Delta y_i+A_{i+1}(x)\Delta y_{i+1})s(x)-(A_i(x)y_i\Delta y_i+A_{i+1}(x)y_{i+1}\Delta y_{i+1})$$

再应用引理 1 易得所证结果.

(ⅱ)由引理 2(用 $A_i(x)$ 代替 $x,\omega_1=\Delta y_i,\omega_2=\Delta y_{i+1}$)得 $\|r_1\|_\infty\leqslant\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{|\Delta_i\|y_{i+1}-y_i|}{(\sqrt{\Delta y_{i+1}}+\sqrt{\Delta y_i})^2}$,由此易知 $|\overline{r_1}(x)|\leqslant Mh^2$.

(ⅲ)若对 x 的划分为等距划分且 $s(x)$ 为严格单调增函数,则 $\Delta y_i=y_{i+1}-y_i(i=1,2,\cdots,n)$.

应用中值定理易知:$|\Delta_i|\leqslant 2\|s''\|_\infty(\Delta x_i)^2$,

$$\|r_1\|_\infty\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{|\Delta_i\|y_{i+1}-y_i|}{(\sqrt{\Delta y_{i+1}}+\sqrt{\Delta y_i})^2}\leqslant 2\|s''\|_2 h^2$$

于是

$$\|\underline{r_1}\|_\infty\leqslant\|s-F_1\|_\infty+\|F_1-H_1\|_\infty=\frac{17}{8}\|s''\|_\infty h^2$$

当 $s(x)$ 严格单调下降时类似可证.　证毕

下面研究 $H_2(x)$ 的逼近能力.我们有:

定理 9　设 $\underline{r_2}(x)=s(x)-F_2(x)$,$r_2(x)=F_2(x)-H_2(x)$,$\overline{r_2}(x)=s(x)-H_2(x)$.

则(i)当 $x\in[x_i,x_{i+1}]$ 时,存在 $\xi_i\in(x_i,x_{i+1})$ 使

$$\underline{r_2}(x)=\frac{A_i(x)A_{i+1}(x)}{A_i^2(x)+A_{i+1}^2(x)}k(\xi_i)(\Delta x_i)^2$$

$$r_2(x)=\frac{A_i^2(x)A_{i+1}^2(x)}{(A_i^2(x)+A_{i+1}^2(x))}\frac{\Delta_i(y_{i+1}-y_i)}{(A_i^2(x)\Delta y_i+A_{i+1}^2(x)\Delta y_{i+1})}$$

$$\overline{r_2}(x)=\frac{A_i(x)A_{i+1}(x)}{A_i^2(x)\Delta y_i+A_{i+1}^2(x)\Delta y_{i+1}}$$
$$\cdot\Big[-\frac{1}{2}s''(\xi_i)[A_i^2(\xi_i)\Delta y_i+A_{i+1}^2(\xi_i)\Delta y_{i+1}]-2\Delta\mu_i s'(\xi_i)[\xi_i-(\Delta\lambda_i x_i+\Delta\lambda_{i+1}x_{i+1})]-\Delta\mu_i(s(\xi_i)-(\Delta\lambda_i y_i+\Delta\lambda_{i+1}y_{i+1}))\Big]$$

其中

$$\Delta\mu_i=\Delta y_i+\Delta y_{i+1},\overline{x_i}=\frac{x_i+x_{i+1}}{2},\overline{y_i}=\frac{y_i+y_{i+1}}{2},$$

且

$$k(\xi_i)=-\frac{1}{2}s''(\xi_i)(A_i^2(\xi_i)+A_{i+1}^2(\xi_i))-\frac{4s'(\xi_i)(\xi_i-\overline{x_i})}{(\Delta x_i)^2}-\frac{2s(\xi_i)-(2\overline{y_i})}{(\Delta x_i)^2}$$

$$\Delta\lambda_i=\frac{\Delta y_i}{\Delta y_i+\Delta y_{i+1}},\Delta\lambda_{i+1}=\frac{\Delta y_{i+1}}{\Delta y_i+\Delta y_{i+1}}$$

(ⅱ)$\|\underline{r_2}\|_\infty\leqslant\frac{1}{4}\|s''\|_\infty h^2+2\|s''\|_\infty h$,$\|\overline{r_2}\|_\infty\leqslant Lh$,

$$\|r_2\|_\infty\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{|\Delta_i||y_{i+1}-y_i|}{(\sqrt{\Delta y_i}+\sqrt{\Delta y_{i+1}})^2}.$$

这里

$$L=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{\max\{\Delta y_i,\Delta y_{i+1}\}}{\sqrt{\Delta y_i}\sqrt{\Delta y_{i+1}}}\left[\frac{1}{4}\|s''\|_\infty h+3\|s''\|_\infty\right]$$

(ⅲ)假设对 X 的划分为等距划,$s(x)$ 为严格单调函数,则

$$\|r_2\|_\infty\leqslant 2\|s''\|_\infty h^2,$$
$$\|\overline{r_2}\|_\infty\leqslant\frac{17}{8}\|s''\|_\infty h^2+\frac{1}{4}\|s'\|_\infty h.$$

证明　设 $\boldsymbol{a}=(A_i(x),A_{i+1}(x))$,$\boldsymbol{b}=(A_{i+1}(x)\cdot\sqrt{\Delta y_{i+1}},A_i(x)\sqrt{\Delta y_i})$ 为两个向量,则由 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^2\leqslant|\boldsymbol{a}|^2\cdot|\boldsymbol{b}|^2$ 知:

$$(A_i(x)A_{i+1}(x)\sqrt{\Delta y_{i+1}}+A_i(x)A_{i+1}(x)\sqrt{\Delta y_i})^2$$
$$\leqslant(A_i^2(x)+A_{i+1}^2(x))(A_{i+1}^2(x)\Delta y_{i+1}+A_i^2(x)\Delta y_i)$$

由此推得:

$$\|r_2\|_\infty\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{|\Delta_i||y_{i+1}-y_i|}{(\sqrt{\Delta y_i}+\sqrt{\Delta y_{i+1}})^2}$$

$$\|\overline{r_2}\|_\infty\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{\max\{\Delta y_i,\Delta y_{i+1}\}}{\sqrt{\Delta y_i}\sqrt{\Delta y_{i+1}}}\left[\frac{1}{4}\|s''\|_\infty h^2+3\|s'\|_\infty h\right]$$

其它是显然的.　证毕

下面给出仿真实验.

设 $s(x)=\sin x$,$X=[0,6]$.则 $\|s'\|_\infty=\|s''\|_\infty=1$.取 $n=60$.$s(x)$ 与 $H_1(x)$ 的曲线、$s(x)$ 与 $H_2(x)$ 的曲线,$r_1(x)=s(x)-H_1(x)$ 与 $r_2(x)=s(x)-H_2(x)$ 的曲线分别见图 1.从图 1 可以看出,$H_1(x)$ 的逼近能力优于 $H_2(x)$.

4　结论

本文做了两方面的研究工作:

(1) 引入了"参数单点模糊化方法",应用重心法解模糊化方法研究了六类(41 个)模糊蕴涵算子构造的模糊系统,指出:正则模糊蕴涵算子能用重心法构造模糊系统.

(2) 对模糊系统 $H_i(x)(i=1,2)$ 的逼近能力做了研究,给出了它们的余项表达式和余项误差估计公式.指出:$H_1(x)$ 对严格单调函数具有二阶逼近精度;$H_2(x)$ 具有一阶逼近精度.

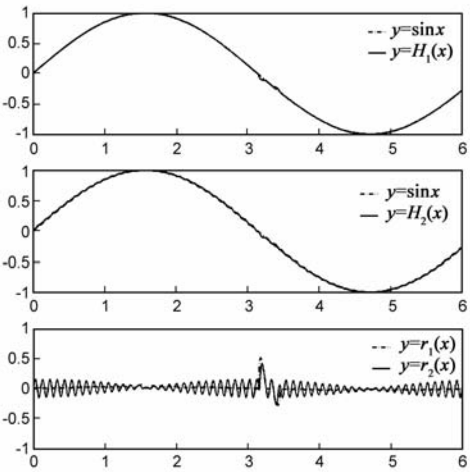

图1 $r_1(x)$与$r_2(x)$曲线

附录:六类(41 个)模糊蕴涵算子

第一类 满足条件 $\theta(a,1)=1,\theta(a,0)=1-a$ 的模糊蕴涵算子:

$$R_0-\text{蕴涵}\ \theta_0(a,b)=\begin{cases}1, & a\leqslant b\\(1-a)\vee b, & a>b\end{cases}$$

Kleene-Dienes 蕴涵:$\theta_1(a,b)=(1-a)\vee b$

Reichenbach 蕴涵:$\theta_2(a,b)=1-a+ab$

Lukasiewicz 蕴涵:$\theta_3(a,b)=(1-a+b)\wedge 1$

$$\theta_{29}(a,b)=\begin{cases}1, & a\geqslant b\\1-a+ab, & a>b\end{cases}$$

$$\theta_6(a,b)=\begin{cases}(1-a)\vee b, & (1-a)\wedge b=0\\1, & \text{其他}\end{cases}$$

$$\theta_9(a,b)=(1-a+2ab-a^2b)\wedge 1$$

$$\theta_{21}(a,b)=\begin{cases}1, & a\leqslant b\\\dfrac{1-a}{1-b}, & a>b\end{cases}$$

$$\theta_{30}(a,b)=\begin{cases}1, & a\leqslant b\\(1-a)\vee b\vee\dfrac{1}{2}, & 0<b<a<1\\(1-a)\vee b, & \text{其他}\end{cases}$$

$$\theta_{31}(a,b)=\begin{cases}1, & a\leqslant b\\1-a, & a>b\end{cases}$$

第二类 满足下列条件之一的模糊蕴涵算子

(a) $\theta(a,1)=1,\theta(0,0)=1,\theta(a,0)=0(a>0)$

(b) $\theta(a,1)=1(a>0),\theta(0,1)=\theta(a,0)=0$

$$\theta_4(a,b)=\begin{cases}1, & a\leqslant b\\\dfrac{b}{a}, & a>b\end{cases},\quad \theta_5(a,b)=\begin{cases}1, a\leqslant b\\b, a>b\end{cases},$$

$$\theta_{11}(a,b)=\begin{cases}1, & a\leqslant b\\0, & a>b\end{cases},\quad \theta_{22}(a,b)=\begin{cases}b, & a>0\\1, & a=0\end{cases},$$

$$\theta_{12}(a,b)=\begin{cases}1, & a=0\text{ 且 }b=0\\b^a, & \text{其他}\end{cases},$$

$$\theta_{23}(a,b)=\begin{cases}1, & a\leqslant b\\\dfrac{\log a}{\log b}, & a>b>0,\\0, & a>b=0\end{cases}$$

$$\theta_{38}(a,b)=\begin{cases}0, & a=0\\b, & a>0\end{cases},\quad \bar{\theta}_1(a,b)=\begin{cases}b, & a\neq b\\1, & a=b\end{cases},$$

$$\theta_{40}(a,b)=\begin{cases}0, & a+b\leqslant 1\\\dfrac{a+b-1}{a}, & a+b>1\end{cases}$$

$$\theta_{46}(a,b)=\begin{cases}0, & a+b\leqslant 1\\b, & a+b>1\end{cases}$$

第三类 满足条件 $\theta(a,1)=a,\theta(a,0)=0$ 的模糊蕴涵算子:

$\theta_{13}(a,b)=a\wedge b,\theta_{14}(a,b)=ab,$

$\theta_{15}(a,b)=(a+b-1)\vee 0,$

$$\theta_{16}(a,b)=\begin{cases}a\wedge b, & a\vee b=1\\0, & a\vee b<1\end{cases},$$

$$\theta_{27}(a,b)=\frac{ab}{1+(1-a)(1-b)},$$

$$\theta_{32}(a,b)=\begin{cases}0, & a+b\leqslant 1\\a\wedge b, & a+b>1\end{cases},$$

$$\theta_{33}(a,b)=\begin{cases}0, & a+b\leqslant 1\\a, & a+b>1\end{cases},$$

$$\theta_{34}(a,b)=\begin{cases}0, & a+b\leqslant 1\\\dfrac{a+b-1}{b}, & a+b>1\end{cases},$$

$$\theta_{36}(a,b)=\begin{cases}a, & b=1\\0, & b<1\end{cases},\quad \theta_{41}(a,b)=\begin{cases}0, & b=0\\a, & b>0\end{cases},$$

$$\theta_{43}(a,b)=[(a^p+b^p-1)\vee 0]^{\frac{1}{p}},$$

$$\theta_{44}(a,b)=\begin{cases}0, & a+b\leqslant 1\\b, & a+b>1\text{ 且 }a+b-b^2\geqslant 1\\\dfrac{a+b-1}{b}, & \text{其他}\end{cases}$$

第四类 满足条件 $\theta(a,1)=(1-a)\vee a,\theta(a,0)=1-a$ 的模糊蕴涵算子:

Zadeh 蕴涵:$\theta_8(a,b)=(1-a)\vee(a\wedge b)$.

$\theta_{387}(a,b)=[(1-a)\vee b]\wedge(a\vee(1-b)\vee[(1-a)\wedge b])$.

第五类 满足条件 $\theta(a,1)=1,\theta(a,0)=a$ 的模糊蕴涵算子:

$\theta_{17}(a,b)=a\vee b,\quad \theta_{18}(a,b)=a+b-ab,$

$$\theta_{19}(a,b)=(a+b)\wedge 1,\theta_{28}(a,b)=\frac{a+b}{1+ab},$$

$$\theta_{20}(a,b)=\begin{cases}a\vee b, & a\wedge b=0\\1, & a\wedge b>0\end{cases}.$$

第六类 其他模糊蕴涵算子:

$$\theta_7(a,b)=\begin{cases}1, & a<1\\b, & a=1\end{cases},\quad \bar{\theta}_2(a,b)=1-a+a^2b.$$

参考文献

[1] 王立新著,王迎军译.模糊系统与模糊控制教程[M].北京:清华大学出版社,2003.1 – 99.
Wang Li-xing.A Course in Fuzzy Systems and Control[M].Beijing:Tsinghua University Press,2003.1-99.(in Chinese).

[2] Zadeh L A.The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning I[J].Information Sciences,1975,8(3):199 – 251.

[3] 王国俊.非经典逻辑与近似推理.北京:科学出版社,2000.1 – 91.
Wang Guojun.Non-Classical Logic and Approximate Reasoning[M].Beijing:Science Press,2000.1 – 91.(in Chinese).

[4] Li Hongxing,You Fei,Peng Jiayin.Fuzzy controllers based on some fuzzy implication operators and their response functions[J].Progress in Natural Science,2004,14(1):15 – 20.

[5] 李洪兴,彭家寅,王加银等.基于三 I 算法的模糊系统及其响应性能[J].系统科学与数学,2005,25(5):578 – 590.
Li Hongxing,Peng Jiayin,Wang Jiayin.Fuzzy systems based on triple I algorithm and response abilities[J].Journal of Systems Science and Mathematics,2005,25(5):578 – 590.(in Chinese)

[6] 汪德刚,谷云东,李洪兴.模糊模态命题逻辑及其广义重言式[J].电子学报,2007,35(2):261 – 264.
Wang Degang,Gu Yundong,Li Hongxing.Generalized Tautology in fuzzy modal propositional logic[J].Acta Electronica Sinica,2007,35(2):261 – 264.(in Chinese)

[7] Li Y M,Shi Z K,Li Z H.Approximation theory of fuzzy systems based upon genuine many-valued implication-SISO case[J].Fuzzy Sets and Systems,2002,130(2):147 – 157.

[8] X J Zeng,M G Singh.Approximation theory of fuzzy systems-SISO case[J].IEEE Transactions on Fuzzy Systems,1994,2(2):162 – 176.

[9] 王加银,刘民,李洪兴.单入单出模糊控制器函数与插值式的偏差分析[J].电子学报,2009,37(2):424 – 428.
Wang Jiayin,Liu Min,Li Hongxing.Analysis of difference between control function and interpolation expression of SISO fuzzy controller[J].Acta Electronica Sinica,2009,37(2):424 – 428.(in Chinese)

[10] 单伟伟,靳东明,梁艳.变论域自适应模糊控制器的 CMOS 模拟电路芯片实现[J].电子学报,2009,37(5):913 – 917.
Shan Weiwei,Jin Dongming,Liang Yan.Variable universe adaptive fuzzy logic controller CMOS analog chip implementation[J].Acta Electronica Sinica,2009,37(5):913-917.(in Chinese)

作者简介

袁学海　男,1960 年 8 月生于辽宁省喀左县.理学博士.现为大连理工大学教授、博士生导师,主要研究方向:智能控制与模糊系统理论.
E-mail:yuanxuehai@yahoo.com.cn

李洪兴　男,1953 年生于天津,理学博士.现为大连理工大学教授、博士生导师,主要研究方向为智能控制与模糊系统理论.
E-mail:lihx@dlut.edu.cn

孙凯彪　男,1978 年 12 月生于辽宁铁岭,理学博士.现为大连理工大学讲师.主要研究方向:系统建模与控制.
E-mail:sunkb@dlut.edu.cn