

一种内存优化的代数重建算法及其快速实现

秦中元,牟轩沁,王 平,蔡元龙

(西安交通大学电子与信息工程学院,陕西西安 710049)

摘 要: 本文提出一种在图像的代数重建算法(ART)中能够有效地减少内存占用的快速实现方法,将直接 ART 方法中的每个投影每条射线的系数矩阵分解为射线矩阵和单条射线的系数矩阵.射线矩阵保存每条射线的斜率和截距,系数矩阵在每次迭代之前计算得到,考虑到同一投影角下每条射线的相关性,系数矩阵可以递推计算,从而极大地节省了时间.实验选用 Shepp-logan 模型,实验结果表明了本实现方法的实用性.

关键词: 代数重建算法;图像重建;内存优化;递推算法

中图分类号: R445 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2003) 09-1327-03

A Novel Algebraic Reconstruction Technique of Memory Optimization and Its Fast Implementation

QIN Zhong-yuan, MOU Xuan-qin, WANG Ping, CAI Yuan-long

(School of Electronics and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an, Shaanxi 710049, China)

Abstract: An efficient implement for Algebraic Reconstruction Technique (ART) is presented in this paper. The coefficient matrix in the original ART is split into radial matrix and the coefficient matrix of the radial. The slope and intercept of each radial are kept in the radial matrix. The coefficient matrix of the radial is calculated before iteration, and considering the correlation of the lines with the same projection angle it can be computed iteratively, with much time saved. The experiments using Shepp-logan phantom show that the results of this method are as good as the traditional one with great reduction of memory.

Key words: algebraic reconstruction technique; image reconstruction; memory optimization; iterative algorithm

1 引言

根据 X 射线的投影来重建图像一直是医学图像界的研究热点.图像重建有两种基本方法:基于 Radon 变换的卷积反投影算法和利用迭代原理的代数重建算法(Algebraic Reconstruction Technique, 简记为 ART).世界上第一台医用 CT 所用的原理就是 ART 方法,发明者 GN Hounsfield 因此而获得 1979 年诺贝尔医学奖.但是 ART 方法的计算速度慢,所需存储空间大.近年来卷积反投影算法由于可以借助硬件完成,重建速度快而逐渐占据优势,但是它也有其缺点,如投影的资料必须完全,分布必须均匀等,而 ART 方法则没有这些限制,因此,一些学者指出计算机速度的提高,ART 重建时间长的缺点将降为次要矛盾,而它的优点将更加突出,人们可以在极短的时间内采集不完整的投影资料并利用 ART 方法重建^[1].这将打破目前医用 CT 中卷积反投影算法一统天下的局面.

在 ART 重建方法中,对于一幅 $n \times n$ 的图像,取 m 个投影,每个方向的投影有 n 条射线,如果直接用 ART 方法重建,则系数矩阵的元素个数约为 $O(n^4)$.对于一幅 256×256 或者更大的图像,这是个非常巨大的数字,这样大的数据量不仅使得存储极不方便,而且带来了巨大的计算量^[2].因此研究如何节省内存占用成为 ART 是否实用的一个关键因素.

本文提出了一种内存优化的 ART 实现方法,将直接 ART 方法中的每个投影每条射线的系数矩阵分解为射线矩阵和单条射线的系数矩阵.在射线矩阵中保存每条射线的斜率和截距,每条射线的系数矩阵在迭代之前计算出来,考虑到同一投影角下每条射线的相关性,系数矩阵可以递推计算,从而极大地节省了时间.对 Shepp-logan 模型进行的实验表明本文算法的有效性.

2 ART 算法及其分析

代数重建方法(ART)最早是在 1970 年由 GT Herman 等人提出来的^[3].从数学的观点来看,ART 实际是利用 Kaczmarz 在 1937 年提出的迭代法^[4]来解一个稀疏系数矩阵的大型线性方程组. ART 算法认为穿过物体的射线是有一定宽度的,它首先将一幅 $n \times n$ 的图像表示为一维数组 $[f(1), f(2), \dots, f(N)]$, $N = n \times n$, 其中 f_j 对应于图像上的一个小方格,称为一个像元.每条射线的投影组成一个一维数组,表示为 $[p(1), p(2), \dots, p(M)]$, M 为穿过物体的 X 射线条数,它等于投影方向个数与某方向投影射线数的乘积.系数矩阵 W 为一个 $N \times M$ 的数组,其中 $w_{ij} = W(i, j)$ 表示第 i 条射线由图像中第 j 个像元产生的加权因子, w_{ij} 的计算如图 1 所示.为了简化,可认为如果第 i 条射线通过第 j 个像元,则 $w_{ij} = 1$, 否则 $w_{ij} = 0$.

因此, ART 可以表示为一个线性方程组的求解:

$$\begin{aligned} w_{11}f_1 + w_{12}f_2 + w_{13}f_3 + \dots + w_{1N}f_N &= p_1 \\ w_{21}f_1 + w_{22}f_2 + w_{23}f_3 + \dots + w_{2N}f_N &= p_2 \\ &\dots \\ w_{M1}f_1 + w_{M2}f_2 + w_{M3}f_3 + \dots + w_{MN}f_N &= p_M \end{aligned} \quad (1)$$

这是一个有 $n \times n$ 个未知数, M 个方程的方程组, 用向量表示为:

$$W \cdot F = P \quad (2)$$

它的解为: $F = W^{-1} \cdot P$, 由于 W 很大, 用矩阵求逆的方法来进行求解是不现实的, 所以 G T Heman 等人采用了 Kaczmarz 提出的松弛法来解该方程组.

该算法首先给出任意一个初始解 f^0 , 然后进行如下迭代:

$$f^{(i)} = f^{(i-1)} - \frac{(f^{(i-1)} \cdot w_i - p_i)}{w_i \cdot w_i} w_i, \quad i = 1, \dots, M \quad (3)$$

其中 w_i 是第 i 个方程的系数向量. 对上式进行一次迭代表示对一条射线进行了投影反投影操作, 对所有的 M 条射线迭代完后如果没有收敛可以再次开始迭代.

Tanabe 证明^[5], 如果方程组 (1) 有唯一解 f_s , 则

$$\lim_k f^{(kM)} = f_s \quad (4)$$

一般 k 取 3 或 4 即对

有射线迭代 3~4 次可达到满意效果.

ART 算法虽然简单明晰, 但是如前所述, ART 中的系数矩阵元素个数为 $O(n^4)$, 使得 ART 中的数据存储极不方便, 而且带来了巨大的计算量. 因此本文在深入分析 ART 数据存储的基础上提出了一种内存优化的算法.

3 ART 算法的内存优化及其快速算法

定义 1 射线矩阵 用来保存穿过物体的所有射线的参数. 当投影个数为 m , 每个投影的射线数为 n 时, 这是一个 $m \times n$ 的矩阵. 每个元素是一个二元组, 存放第 i 个投影 ($1 \leq i \leq m$) 中第 j 条射线 ($1 \leq j \leq n$) 的斜率和截距.

由于系数矩阵 W 描述的是每条射线与图像的关系, 而且式 (3) 在第 i 步迭代计算时只用到了第 i 个方程, 因此第 i 步迭代时只需计算第 i 个方程的系数 w_i 即可. 我们先建立一个射线矩阵来保存每条射线的参数, 具体的 w_i 在每次迭代时计算. 在射线矩阵中每条射线用斜率 k 和截距 b 两个参数表示, 如图 2 所示. 这样射线矩阵共需 $m \times n \times 2$ 个参数. 然后在每次迭代时计算 w_i , 计算 w_i 时首先计算出图像中每个点到该射线的距离 d , 再取阈值, 得到 0 或 1. 这样 w_i 的元素个数为 $n \times n$. 最后全部所需的参数为 $m \times n \times 2 + n \times n$, 大大减少了计算所需的内存.

上述过程的算法实现为:

(1) 计算每条射线的参数.

设投影角度为 θ , 则:

$$k = \tan(\theta) \quad (6)$$

$$b = j - (\text{width}/2) * \tan(\theta), \quad j = 1 \dots h \quad (7)$$

其中 width 为图像的宽度, h 为图像的高度. 为了计算方便, 每个方向的投影取 h 条射线, 相邻射线的截距之差为 1.

(2) 计算图像中任意一点到射线的距离.

对于点 (m, n) , 到射线 $y = kx + b$ 的距离为:

$$d = |km - n + b| / \sqrt{k^2 + 1} \quad (8)$$

此处我们进行了一些技巧化的处理, 将计算绝对值的过程放到下一步去做. 因此我们引入了一个新的变量. 定义 $\tilde{d} = (km - n + b) / \sqrt{k^2 + 1}$, \tilde{d} 的符号表示点 (m, n) 在 $y = kx + b$ 的左上方或右下方, 不妨称 \tilde{d} 为符号距离.

定义 2 符号距离 这是一个实数, 它的绝对值为某点到一条直线的距离, 它的符号表示了它与该直线的位置关系, $\tilde{d} < 0$ 表示该点位于直线的左下方, $\tilde{d} > 0$ 表示该点位于直线的右上方.

(3) 将上一步得到的 \tilde{d} 取绝对值然后再取阈值, 得到该像元对射线的权值. 具体计算公式为:

$$w_{i,j} = \begin{cases} 1, & |\tilde{d}| \leq 1 \\ 0, & |\tilde{d}| > 1 \end{cases} \quad (9)$$

这时, 又会出现新的问题, 就是由于每次迭代时计算 w_i , 从而需要计算图像中每个点到第 i 条射线的符号距离, 共需计算 $N = n \times n$ 次, 这就使得重建时速度太慢. 为了解决这一问题, 考虑到对于每个方向的投影, n 条射线成平行等距排列, 从而计算出在投影角 θ 下各点到第一条射线的符号距离, 该点到其余射线的距离之差为一个等差数列, 故可以递推得到. 而对于第一条射线, 计算出第一点到该射线的符号距离, 其余点到该射线的距离也可以递推. 为此, 我们将计算的中间结果——各像元到某条射线的符号距离提取出来, 组成一个距离矩阵.

定义 3 距离矩阵 由图像中各像元到某条直线的符号距离组成的矩阵.

这样就可以考虑如下的递推算法:

(1) 对于某一角度 θ 下的投影, 计算出第一条射线的距离矩阵: $\tilde{D}_{m \times n}^{(1)}$, 其中 m 为图像的宽度, n 为图像的高度, \tilde{D} 的上标表示这是第一条射线.

(2) 对距离矩阵 $\tilde{D}^{(1)}$ 取阈值, 计算出第一条射线系数矩阵:

$$w_1(i, j) = \begin{cases} 1, & |\tilde{d}(i, j)| \leq 1 \\ 0, & |\tilde{d}(i, j)| > 1 \end{cases} \quad (10)$$

(3) 对于同一投影的第 i 条射线, 有:

$$\tilde{D}^{(i)} = \tilde{D}^{(i-1)} + |\cos \theta| \quad (11)$$

此时仍然按照式 (10) 计算此时的系数矩阵 w_i . 如此递推下去直到得到该投影角度所有射线的系数矩阵.

值得注意的是, 式 (11) 中的 $\cos(\theta)$ 取绝对值, 是因为 \tilde{d} 并不是真正意义上的距离, \tilde{d} 的正负表示该像元位于射线的上方或下方. 由于我们约定斜率相同的射线截距依次增大, 所以各个像元到第 k 条射线的符号距离比到第 $k-1$ 条射线的符

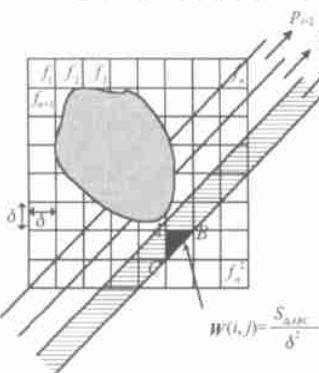


图 1 ART 中的权值示意

号距离增加了 $1/\cos(\theta)$ 。

同理,计算第一条射线的距离矩阵时,又可以类似进行递推,这里不再赘述。

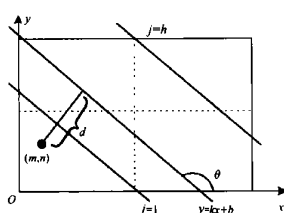


图2 系数矩阵的计算

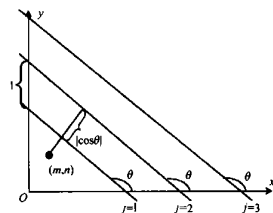


图3 同一投影角度的递推算法

4 实验结果与分析

根据上面的讨论,作者在 P4 1.5GHz 的微机上用 Matlab6.1 进行了实现,所用的操作系统是 Windows 2000 Professional,并且选用了图像重建中通用的 Shepp-logan 模型^[6]进行了实验。

Shepp-logan 模型由一系列椭圆组成,具体参数如表 1 所示。

表 1 Shepp-logan 模型参数

序号	密度	x 轴长度	y 轴长度	x 偏移量	y 偏移量	旋转角度
1	1	0.69	0.92	0	0	0
2	-0.8	0.6624	0.8740	0	-0.0184	0
3	-0.2	0.1100	0.3100	0.22	0	-18
4	-0.2	0.1600	0.4100	-0.22	0	18
5	0.1	0.2100	0.2500	0	0.35	0
6	0.1	0.0460	0.0460	0	0.1	0
7	0.1	0.0460	0.0460	0	-0.1	0
8	0.1	0.0460	0.0230	-0.08	-0.605	0
9	0.1	0.0230	0.0230	0	-0.606	0
10	0.1	0.0230	0.0460	0.06	-0.605	0

实验中,选取 Shepp-logan 模型为 64×64 ,取 180 个投影角度,每个角度 64 条射线,迭代四次,整个重建过程为 26.14 秒,每次重建的结果如图 4 和表 2 所示。可以看出,最初的重建图像含有椒盐噪声,原始图像中最下面的三个颜色较浅的区域在重建图像中被淹没,这是代数重建算法过程中引入的噪声,该噪声无法避免,只能靠增加投影数目、射线数量和迭代次数来减少。从重建结果可以看出迭代四次后重建图像与原图像肉眼已无区别。

表 2 本文算法实验结果

迭代次数	1	2	3	4
SNR (dB)	10.00	16.42	21.45	25.66

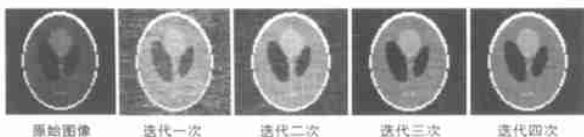


图4 原始图像和每次的重建结果

由于采用了递推算法,使得重建速度大大加快。以 64×64 的 Shepp-logan 模型为例,本文算法和不进行内存优化的算法时间比较如表 3 所示。可以看出,本文算法所用的时间有了较大改善。

表 3 计算时间对比

迭代次数	1	2	3	4
本文算法计算时间(秒)	6.44	13.06	19.62	26.14
未内存优化的算法 计算时间(秒)	56.92	114.21	171.59	228.95

5 结论

在 ART 算法中由于系数矩阵占用的空间极大,给计算和数据的存储都带有很大的不便。本文提出的内存优化方法可以大大减少 ART 所需的存储空间,同时由于采用了递推算法,加快了重建速度,很好地解决了 ART 算法中内存占用过大的问题。本文中为了计算方便,系数矩阵元素只取 0 或 1。利用插值函数来计算系数矩阵,将会带来更高的重建精度,这是我们今后研究的方向。

参考文献:

- [1] 庄天戈. CT 原理与算法 [M]. 上海:上海交通大学出版社, 1992.
- [2] Avinash C Kak, Malcolm Slaney. Principles of Computerized Tomographic Imaging [M]. New York: IEEE, 1988.
- [3] R Gordon, R Bender, G T Herman. Algebraic reconstruction techniques (ART) for three-dimensional electron microscopy and X-ray photography [J]. J Theoretical Biology, 1970, 29: 471 - 481.
- [4] S Kaczmarz. Angenaherte auflösung von systemen linearer gleichungen [J]. Bull Acad Pol Sci Lett A, 1937, 6(8): 355 - 357.
- [5] K Tanabe. Projection method for solving a singular system of linear equations and its applications [J]. Numer Math, 1971, 17: 203 - 214.
- [6] L A Shepp, B F Logan. The Fourier reconstruction of a head section [J]. IEEE Trans Nucl Sci, 1974, NS-21: 21 - 43.

作者简介:



秦中元 男, 1974 年 1 月生于河南安阳, 1996 年毕业于西安交通大学电子与信息工程学院网络工程与技术研究所, 获计算机组织与系统结构硕士学位, 1999 年入西安交通大学图像处理与识别研究所攻读博士学位, 感兴趣的研究领域主要有: 医学图像三维重建的理论研究及其实现、小波变换及其应用。



牟轩沁 男, 1964 年 4 月生于湖南湘潭, 副教授, 西安交通大学电信学院图像处理与识别研究所所长, 目前的主要研究方向为医学数字成像技术和智能交通技术, 主持过国家“863 计划”及自然科学基金项目等多项研究工作, 其中包含重大项目, 有两项成果获得省部级奖励。