

# 高斯-厄米特粒子滤波器

袁泽剑, 郑南宁, 贾新春

(西安交通大学人工智能与机器人研究所, 陕西西安 710049)

**摘 要:** 针对非线性、非高斯系统状态的在线估计问题, 本文提出一种新的基于序贯重要性抽样的粒子滤波算法。在滤波算法中, 我们用一族高斯-厄米特滤波器 (GHF) 来产生重要性概率密度函数。此概率密度在系统状态的转移概率的基础上融入最新的观测数据, 因此更接近于系统状态的后验概率。理论分析与实验结果表明: 在观测模型具有高精度的场合或似然函数位于系统状态转移概率的尾部时, 用 GHF 产生重要性概率密度函数的粒子滤波即高斯-厄米特粒子滤波 (GHPF) 的性能要明显地优于标准的粒子滤波、扩展的卡尔曼滤波、GHF。

**关键词:** 状态估计; 粒子滤波器; 高斯-厄米特滤波; 序贯重要性抽样; 重要性概率密度函数

**中图分类号:** TP391 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2003) 07-0970-04

## The Gauss-Hermite Particle Filter

YUAN Ze-jian, ZHENG Nan-ning, JIA Xin-chun

(Institute of Artificial Intelligence & Robotics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an, Shaanxi 710049, China)

**Abstract:** In this paper, a new particle filter based on sequential importance sampling (SIS) is proposed for the on-line estimation problem of non-Gauss nonlinear systems. In the new algorithm, a bank of Gauss-Hermite filter (GHF) is used for generating the importance density function. The density function integrates the new observations into system state transition density, so it can match the a posteriori density well. As a result, while the likelihood function is situated on the tail of state transition density or observation model has higher precise, the theoretical analysis and experimental results show that the new particle filter outperforms obviously the standard particle filter and the other filters such as the extended Kalman filter (EKF), the GHF.

**Key words:** state estimation; particle filter; Gauss-Hermite filter; sequential importance sampling; importance density function

## 1 引言

非线性、非高斯随机系统的状态估计在现代信号处理、图像处理、计算机视觉及自动控制等领域有着广泛的应用<sup>[1~3]</sup>。针对非线性非高斯系统的状态估计问题, 各个领域的学者对此有着深入的研究。众所周知, 在处理非线性滤波问题中最经典并得到广泛应用的方法是扩展的卡尔曼滤波。但在非线性、非高斯条件下, 这种基于模型线性化和高斯假设的滤波方法在估计系统状态及其方差时误差较大, 并有时可能发散。

处理一般的非线性滤波问题的另一种方法是基于序贯模拟的统计滤波 (即所谓的粒子滤波器—the Particle Filter) 方法<sup>[6]</sup>。这些方法考虑利用一些随机样本 (粒子) 来表示系统随机变量的后验概率分布, 并且能应用于任意非线性随机系统。随着计算机性能的极大提高, 这些方法日益受到人们的关注。通常, 对于一般的非线性系统, 我们很难得到后验概率的封闭的解析式, 直接从后验概率分布抽取样本就显得更加困难。因此, 如何得到后验概率分布的样本是基于随机模拟的滤波方法的关键。一种常用的抽样方法是选取一个重要性概率密度

来得到后验概率分布的带权子样 (即重要性抽样方法)。为了降低重要性权值的方差, 提高抽样效率, 重要性概率密度函数应尽可能地接近系统状态后验概率<sup>[9]</sup>。在通常情况下, 设计出一种优化的重要性概率密度函数与直接从后验概率中抽取样本同等困难。

在工程应用中, 大多数是使用选取系统状态的转移概率作为重要性概率密度函数标准的粒子滤波器<sup>[8]</sup>。用转移概率分布来产生预测样本没有考虑系统状态的最新观测, 由此产生的样本同真实的后验概率产生的样本偏差较大, 有一定的盲目性。特别是当观测数据出现在转移概率分布的尾部或似然函数同转移概率分布相比过于集中 (呈尖峰型) 时, 这种粒子滤波器有可能失败, 然而这种情况在高精度的观测场合经常遇到。为了解决这种问题, 文献[6, 7]提出了几种模型线性化的技术来改进粒子滤波器的性能, 其中, 文献[6]提出用扩展的卡尔曼滤波来产生重要性概率密度函数。尽管基于 EKF 的粒子滤波方法在估计性能上有所改善, 但由于 EKF 在模型线性化和高斯假设中引入了过多的误差, 其改进效果不是很明显。最近, 文献[7]提出了一种新的粒子滤波器即 UPF (the

收稿日期: 2001-11-28; 修回日期: 2002-07-15

基金项目: 国家创新研究群体科学基金 (No. 60024301); 国家自然科学基金 (No. 60175006)

Unscented Particle Filter), 此粒子滤波器的状态估计性能要好于以往的粒子滤波器<sup>[7]</sup>.

在本文中, 我们选取另一种确定的次优化方法来产生重要性概率密度函数, 也就是用 GHF 来代替 EKF 来产生后验概率的预测样本. 用 GHF 来产生预测样本的粒子滤波器, 我们称之为高斯-厄米特粒子滤波器 (GHPF). 由于 GHF 估计精度要高于 EKF, 且状态方差有较重的尾部, 因此 GHPF 的估计精度得到了非常明显的提高, 其性能也要好于 UPF 粒子滤波器的性能. 实验结果与理论分析也表明了: 在观测模型具有较高精度的场合或者似然函数位于系统状态转移概率的尾部时, 高斯-厄米特粒子滤波的估计性能要优于现有的粒子滤波器.

## 2 问题描述与粒子滤波

### 2.1 问题描述

考虑如下非线性、非高斯随机状态空间模型,

$$\begin{cases} x_t = f(x_{t-1}) + v_{t-1} \\ y_t = h(x_t) + w_t \end{cases} \quad (1)$$

其中  $x_t \in \mathbf{R}^n$  为系统在  $t$  时刻的状态,  $y_t \in \mathbf{R}^p$  为系统状态  $x_t$  的观测;  $v_{t-1} \in \mathbf{R}^n$ ,  $w_t \in \mathbf{R}^p$  分别为过程噪声和观测噪声;  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,  $h: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^p$  为有界的非线性映射.

我们的目的是在观测数据序列的基础上能递推地估计出系统状态的后验概率分布  $p(x_{1:t}|y_{1:t})$ , 特别是其边际概率分布  $p(x_t|y_{1:t})$  即滤波概率分布, 其中  $x_{1:t} = \{x_1, x_2, \dots, x_t\}$ ,  $y_{1:t} = \{y_1, y_2, \dots, y_t\}$ . 基于滤波概率分布, 我们就可以对系统状态进行优化估计如最大后验概率估计、后验均值估计等.

### 2.2 粒子滤波

粒子滤波器是一类随机模拟滤波器, 其基本思想是: 假设我们能够独立从滤波概率分布  $p(x_t|y_{1:t})$  中抽取  $N$  个样本  $\{x_t^i, i=1, 2, \dots, N\}$ , 则可以用如下经验概率分布来近似滤波概率分布,

$$\hat{p}(x_t|y_{1:t}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x_t - x_t^i) \quad (2)$$

其中,  $\delta(\cdot)$  为 Dirac 函数. 由此, 对  $g(x_t)$  的期望

$$E\{g(x_t)\} = \int g(x_t) p(x_t|y_{1:t}) dx_t \quad (3)$$

都可以用如下形式的估计来逼近,

$$\bar{E}\{g(x_t)\} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(x_t^i) \quad (4)$$

由大数定律可以保证收敛性即  $\bar{E}\{g(x_t)\} \xrightarrow{a.s.} E\{g(x_t)\}$ , 并且当  $g(x_t)$  的后验方差有界即  $\text{var}(g(x_t)) < \infty$  时, 中心极限定理成立,

$$\bar{E}\{g(x_t)\} - E\{g(x_t)\} \xrightarrow{p} \frac{1}{N} N(0, \text{var}(g(x_t))) \quad (5)$$

其中,  $\xrightarrow{p}$  表示依分布收敛.

## 3 高斯-厄米特粒子滤波

鉴于直接从滤波概率分布抽取样本的困难性以及满足在线估计的要求, 基于重要性抽样的粒子滤波器得到了广泛的

应用. 这种粒子滤波避免了直接从滤波分布抽样的困难性, 而采用易抽样的重要性密度函数来得到一组带权子样, 并用这一组带权子样来近似滤波分布的样本.

在粒子滤波器中, 重要性密度函数的选择是基于重要性抽样的粒子滤波器的关键之一. 文献[6]从理论上给出了使得重要性权值的方差到达极小的优化的重要性密度函数为,

$$q(x_t|x_{t-1}, y_{1:t}) = p(x_t|x_{t-1}, y_t) \quad (6)$$

在实际情况下得到优化的重要性密度函数的困难程度与直接从目标概率分布中抽取样本的困难程度完全等同, 但从优化的重要性密度函数的表达式(6)来看, 产生下一个预测样本依赖于已有的样本和最新的观测数据, 这为我们设计一个重要性密度函数有一定的指导作用.

在工程应用中, 通常选取重要性密度函数为系统状态变量的转移概率密度  $P(x_t|x_{t-1})$  即标准的粒子滤波器<sup>[8]</sup>, 在观测精度不高的场合, 此方法能取得较好的效果, 但估计精度不高. 由于重要性函数没有考虑最新观测到的数据, 从重要性函数抽取的样本与真实的后验分布产生的样本存在较大的偏差, 特别是当似然函数位于系统状态转移概率密度函数的尾部或者观测模型具有很高的精度(如图1)时, 这种偏差尤为明显. 因此, 很多样本由于归一化权重很小而成为无效样本从而导致这种抽样方法的效率很低.

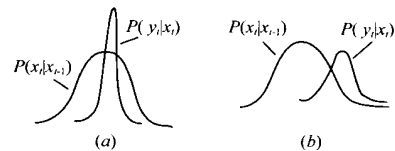


图1 系统状态的转移概率与似然函数. (a) 似然函数呈尖峰型; (b) 似然函数位于尾部

为了克服这个问题, 我们用一族高斯-厄米特来构造重要性密度函数, 也就是对每一个粒子用 GHF 来产生下一个预测粒子. 由于 GHF 把最新的观测数据融入到系统状态的转移过程中, 由此产生的预测样本接近于系统状态的后验概率的样本. 下面我们首先介绍高斯-厄米特滤波器, 然后把它应用到粒子滤波器中.

### 3.1 高斯-厄米特滤波

高斯-厄米特滤波器是一种基于高斯-厄米特数值积分的递归的贝叶斯滤波方法<sup>[4]</sup>. 这种递归滤波方法不涉及到扩展卡尔曼滤波中雅可比矩阵的估计问题, 并且可以通过选取高斯点和相应的权值来提高系统状态均值和方差估计的代数精度. 高斯-厄米特滤波器的性能比扩展的卡尔曼滤波有很大的改善, 并且没有非线性映射为可微映射的限制. 此方法要好于文献[5]中提出的 UKF(the Unscented Kalman Filter) 滤波方法. 然而, 这些方法不适用于一般非高斯分布的场合.

**3.1.1 高斯-厄米特积分公式** 高斯-厄米特积分公式是一种高斯型积分公式, 可以通过选取高斯点提高代数精度. 对一维情况有如下积分公式<sup>[10]</sup>,

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(q) e^{-\frac{q^2}{2}} dq \approx \sum_{i=1}^m w_i f(q_i) \quad (7)$$

当  $q_i, w_i$  分别选取相应的高斯点和权系数时, 式(7)对  $f(q)$  为

不超过  $2m+1$  次多项式能精确成立<sup>[10]</sup>. 对于标准正态分布的积分公式有如下近似,

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{1}{((2\pi)^n \det(\Sigma))^{1/2}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^T \Sigma^{-1} (x-\bar{x})}{2}} dx$$

$$= \sum_{i=1}^m w_i f(x_i) \quad (8)$$

其中,  $\bar{x}$ ,  $\Sigma$  分别为均值和协方差. 高斯点之间的变换关系为,

$$x_i = \sqrt{T} q_i + \bar{x} \quad (9)$$

**3.1.2 高斯-厄米特滤波** 假设系统状态的后验概率可以用高斯分布来近似,  $v_t$ ,  $w_t$  为相互独立的具有零均值的高斯噪声, 其方差分别为  $Q$ ,  $R$ . 由状态变量的观测数据, 我们可以利用转移方程和观测方程得到后验概率估计, 然后利用高精度的积分公式, 可得到高斯-厄米特滤波的递推公式.

#### (1) 系统状态及其方差的预测

在  $t-1$  时刻, 设系统状态及其方差的估计分别为  $x_{t-1|t-1}$ ,  $P_{t-1|t-1}$ , 由高斯点变换公式  $x_t = (\sqrt{P_{t-1|t-1}})^T q_i + x_{t-1|t-1}$  与系统状态的转移方程, 系统状态及其方差的一步预测分别为,

$$x_{t|t-1} = \sum_{i=1}^m w_i f(x_i) \quad (10)$$

$$P_{t|t-1} = Q + \sum_{i=1}^m (f(x_i) - x_{t|t-1})(f(x_i) - x_{t|t-1})^T w_i \quad (11)$$

#### (2) 系统状态及其方差的更新

在已有的系统状态及其方差预测的基础上, 由新的高斯点变换  $x_t = (\sqrt{P_{t|t-1}})^T q_i + x_{t|t-1}$  与观测模型, 系统状态及其方差的更新为,

$$x_{t|t} = x_{t|t-1} + K_t (y_t - z_t) \quad (12)$$

$$P_{t|t} = P_{t|t-1} - K_t P_{xz}^T \quad (13)$$

其中,

$$z_t = \sum_{i=1}^m h(x_i) w_i \quad (14)$$

$$P_{xz} = \sum_{i=1}^m (x_t - x_{t|t-1})(h(x_i) - z_t)^T w_i \quad (15)$$

$$P_{zz} = \sum_{i=1}^m (h(x_i) - z_t)(h(x_i) - z_t)^T w_i \quad (16)$$

$$K_t = P_{xz} (R + P_{zz})^{-1} \quad (17)$$

### 3.2 高斯-厄米特粒子滤波器

新的粒子滤波器即高斯-厄米特粒子滤波算法步骤如下:

**步骤 1 重要性抽样.** 对  $t-1$  时刻的样本集  $\{x_{t-1}^i, i=1, 2, \dots, N\}$  进行高斯-厄米特滤波, 得到每一个粒子及其方差的估计为  $x_{t|t}^i$ ,  $P_{t|t}^i$ . 重要性密度函数用以  $x_{t|t}^i$  为均值、 $P_{t|t}^i$  为方差的一簇高斯分布构成即

$$q(x_t | x_{t-1}^i, y_{1:t}) = N(x_t | x_{t|t}^i, P_{t|t}^i) \quad (18)$$

由式(18)定义的重要性密度函数来产生预测样本, 预测样本集为:

$$\{x_t^i, i=1, 2, \dots, N\}, \hat{x}_t^i \sim q(x_t | x_{t-1}^i, y_{1:t})$$

每个粒子对应的重要性权值为:

$$\hat{w}_t^i = \hat{w}_{t-1}^i \frac{p(y_t | \hat{x}_t^i) p(\hat{x}_t^i | x_{t-1}^i)}{q(\hat{x}_t^i | x_{t-1}^i, y_{1:t})} \quad (19)$$

归一化权值为:

$$\tilde{w}_t^i = \hat{w}_t^i \left( \sum_{j=1}^N \hat{w}_t^j \right)^{-1} \quad (20)$$

**步骤 2 粒子的选择(重抽样).** 根据每个粒子的归一化重要性权值对样本重新抽样, 即保留或复制具有较大重要性权值的粒子, 消除具有较小重要性权值的粒子. 经过重抽样, 把原来的带权样本集  $\{x_t^i, \tilde{w}_t^i\}, i=1, 2, \dots, N$  映射为等权样本集  $\{x_t^i, N^{-1}\}, i=1, 2, \dots, N$ . 滤波分布的经验分布为,

$$\hat{p}(x_t | y_{1:t}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x_t - x_t^i) \quad (21)$$

**步骤 3 状态的后验均值估计.** 在已知滤波概率分布的子样的情况下, 系统状态的后验均值估计为

$$\hat{x}_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_t^i \quad (22)$$

## 4 实验与分析

### 4.1 实验

使用本文提出的粒子滤波器对非线性、非高斯系统的状态估计进行了实验. 采用的系统模型<sup>[7]</sup>如下:

$$x_t = 1 + \sin(0.4t) + 0.5x_{t-1} + v_{t-1}$$

$$y_t = \begin{cases} 0.2x_t^2 + n_t & t \leq 30 \\ 0.5x_t - 2 + n_t & t > 30 \end{cases}$$

其中, 过程噪声  $v_{t-1} \sim \text{Gamma}(3, 2)$ , 观测噪声  $n_t \sim N(0, 0.00001)$ , 采用两个不同阶次观测模型对系统状态进行观测, 观测时间为  $T=60$ . 在实验中, 粒子数为  $N=200$ , GHF 中的高斯点数  $m=3$ ; 系统状态的估计采用均值估计器即

$$\hat{x}_t = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_t^j$$

一次独立实验的均方误差定义为:

$$MSE = \left( \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\hat{x}_t - x_t)^2 \right)^{1/2}$$

对高斯-厄米特粒子滤波 (GHPF)、标准的粒子滤波<sup>[8]</sup> (PF)、the Unscented Particle Filter (UPF)<sup>[7]</sup>、EKF、GHF 进行了 100 次独立实验. 其中三种粒子滤波器的均方误差曲线如图 2. 各滤波器的均方误差的均值和方差如表 1. 在一次独立实验中, 不同粒子滤波器的系统状态估计如图 3.

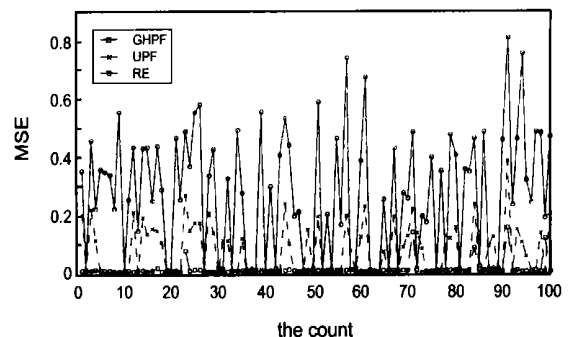


图 2 均方误差曲线

### 4.2 实验结果分析

从实验的结果可以看出, 在非线性、非高斯场合, 粒子滤

波器的估计精度要高于确定的次优化的滤波的估计精度如表 1;当观测模型的精度较高时,UPF 与 GHF 粒子滤波器由于在产生预测粒子时利用了最新的观测数据,因此对状态的估计精度要明显高于标准的粒子滤波器的精度如图 2,并且由于 GHF 粒子滤波器采用了高斯-厄米特滤波器来产生预测粒子,其性能好于 UPF 粒子滤波器.图 3 为三种粒子滤波器一次独立实验的结果,从图中我们可以看到:标准的粒子滤波器的状态估计有时会严重偏离真实状态,而 UPF 粒子滤波器与 GHF 粒子滤波器所估计的状态能较好地吻合真实状态,本文给出的粒子滤波器状态估计效果最为理想.

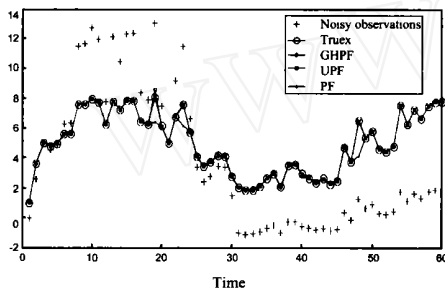


图 3 系统状态估计

表 1 均方误差的均值和方差

算 法	均方误差	
	均 值	方 差
EKF	0.41084	0.016253
GHF	0.34911	0.013321
PF	0.30872	0.045847
UPF	0.07542	0.007338
GHF	0.01684	0.000591

## 5 结 论

对于非线性、非高斯系统的状态估计问题,粒子滤波能够取得较好的效果.在似然函数位于转移概率密度的尾部或高精度的观测模型的场合,本文给出的用 GHF 来产生重要性密度函数的粒子滤波器要明显好于标准的粒子滤波器;并且由于 GHF 的代数精度要高于 the Unscent Filter,因此 GHF 的性能也要好 UPF 粒子滤波器的性能.在下一步的工作中,我们将把高斯-厄米特粒子滤波器应用于目标跟踪和非线性系统的参数估计等重要问题.

## 参考文献:

- [1] G Kitagawa. Monte Carlo filter and smoother for non Gaussian nonlinear state space models [J]. Journal of Computational and Graphical Statistics, 1996, 5: 1 - 25.
- [2] Avitzour. A stochastic simulation Bayesian approach to multitarget tracking [A]. IEE Proceedings on Radar, Sonar and Navigation [C]. UK: IEE, 1995.
- [3] M Isard, Blake. Contour tracking by stochastic propagation of conditional density [A]. European Conference on Computer Vision [C]. UK: Cambridge, 1996. 343 - 356.
- [4] I Kazufumi, K-Q Xiong. Gaussian filters for nonlinear filtering problems [EB/OL]. available from <http://www.researchindex.com>.
- [5] S J Julier J K Uhlmann. A new extension of the Kalman filter to nonlinear systems [A]. Proceedings of AeroSense: The 11th International Symposium on Aerospace/Defence Sensing, Simulation and Controls [C]. Florida: ISADSSC, 1997.
- [6] A Doucet. On Sequential Simulation-Based Methods for Bayesian Filtering [EB/OL]. available from <http://www.researchindex.com>.
- [7] R Van der Merwe. A Doucet the Unscented Particle Filter. Advances in Neural Information Processing Systems [M]. MIT, 2000.
- [8] N J Gordon, D J Salmond, A F M Smith. A novel approach to nonlinear and non Gaussian Bayesian state estimation [A]. IEE Proceedings-F [C]. UK: IEE, 1993.
- [9] 裴鹿成. 计算机随机模拟 [M]. 湖南: 湖南科学技术出版, 1989.
- [10] 南京大学数学系编. 数值逼近方法 [M]. 北京: 科学出版社, 1978.

## 作者简介:



袁泽剑 男, 1971 年生于湖北省公安县, 西安交通大学人工智能与机器人研究所博士研究生, 目前主要研究方向为图像处理与模式识别.



郑南宁 男, 1952 年生于江苏南京, 教授, 中国工程院院士, 主要研究方向为模式识别计算机视觉、并行与分布式计算、神经网络动力学及基于视觉信息的智能检测与识别系统.

贾新春 男, 1964 年生于山西省大同市, 教授, 西安交通大学人工智能与机器人研究所博士研究生, 研究方向为模式识别与智能信息处理、鲁棒控制等.