电 子 学 报
ACTA ELECTRONICA SINICA
Vol. 35 No. 2
Feb. 2007

反馈次数服从几何分布的 M/ G/ 1 排队系统的队长分布

余[illegible]妙[1] ,唐应辉[2]

(1. 电子科技大学应用数学学院,四川成都 610054;2. 四川师范大学数学与软件科学学院,四川成都 610066)

摘 要: 本文从队长过程本身出发,直接研究了具有反馈的 M/ G/ 1 型排队模型的队长分布,获得了在任意时间 t 的瞬时队长分布的拉普拉斯变换的递推表达式,以及便于计算的平稳队长分布的递推表达式. 值得注意的是本文分析的方法简洁、直观.

关键词: 瞬态分布; 稳态分布; 队长; 递推表达式

中图分类号: O226 **文献标识码**: A **文章编号**: 0372-2112 (2007) 02-0275-04

The Queue Length Distribution of M/ G/ 1 Queuing System with Feedback Follows Geometric Distribution

YU Miao-miao[1] ,TANG Ying-hui[2]

(1. *College of Applied Mathematics, University of Electronic Science and Technology of China. Chengdu, Sichuan* 610054, *China*;

2. *College of Mathematics and Software Science, Sichuan Normal University. Chengdu, Sichuan* 610066, *China*)

Abstract: From the starting of the queue length process itself, this paper directly studies the distribution of the queue length in the M/ G/ 1 queuing system with feedback. The recursion express of the Laplace transform which the transient queue length distribution at any time t and the recursion formulas of the equilibrium distribution for calculating conveniently are obtained. It is noting that the method provided in this paper is concise and intuitive.

Key words: transient distribution; stable distribution; queue length; recursion formula

1 引言

反馈服务次数服从几何分布的排队系统是经典的 M/ G/ 1 排队系统的一种衍生系统. 在文献[1,2]中,Takacs、孙荣恒等人利用 Kendall 提出的嵌入 Markov 链方法[3]研究并给出了这一系统的稳态队长分布的概率母函数,Disney 等人[4]还获得了带有 Bernoulli 反馈机制的排队系统顾客的平均等待时间. 但上述研究均未能给出系统相应的稳态队长分布的具体表达式,而且至今关于带有顾客反馈机制的排队系统的瞬态队长分布未见有文献研究. 针对这个问题,本文从该系统队长过程本身出发,利用文献[5,6]中提出的一种独特的分解方法获得了时刻 t 队长瞬态分布的拉普拉斯变换递推表达式,并且获得了计算队长平稳分布的递推表达式. 值得注意的是本文所研究的排队模型可广泛应用于各种通信和计算机网络的性能建模分析中,详细的论述可参见文[7].

2 模型描述与队长的瞬态分布

下面我们将本文所要研究的模型简要描述如下:

(1) 顾客按参数为 $\lambda(>0)$ 的 Poisson 流到达,即相邻到达的间隔时间序列 $\{\tau_i, i\ge 1\}$ 独立同负指数分布;

(2) 顾客服务是相互独立的且每个顾客服务一次所需时间为 χ 服从一般分布 $G(t), t\ge 0$,其平均服务时间为 $0<\frac{1}{\mu}=\int_0^\infty t\mathrm{d}G(t)<\infty$;

(3) 设每个顾客每次服务完后以概率 $1-\alpha$ 立刻排到队尾等待下一次服务,而以概率 $\alpha(0\le\alpha\le 1)$ 立刻离开系统永不再来. 用 ξ 来记一个顾客的总服务次数,其中 ξ 服从参数为 α 的几何分布,即 $P\{\xi=k\}=\alpha(1-\alpha)^{k-1}, k=1,2,\cdots$.

为了讨论该系统的队长分布,我们的思想是先讨论系统的忙期分布,然后再讨论系统的队长分布. 由于我们所研究的系统具有顾客随机反馈机制,因此每个顾客的总服务时间为 $H=\sum_{i=1}^{\xi}\chi_i$,其中 $\chi_1,\chi_2,\chi_3,\cdots$ 相互独立与 χ 同分布. 所以一个顾客在系统中的总服务时间分布为

$$H(t)=P\{H\le t\}=P\left\{\sum_{i=1}^{\xi}\chi_i\le t\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha(1-\alpha)^{n-1}G^{(n)}(t) \tag{1}$$

令 $h(s)=\int_0^\infty e^{-st}\mathrm{d}H(t)$,则进一步有

$$h(s)=\frac{\alpha g(s)}{1-(1-\alpha)g(s)},\ \mathbf{R}(s)>0 \tag{2}$$

其中 $g(s)=\int_0^\infty e^{-st}\mathrm{d}G(t)$ 表示分布 $G(t)$ 的拉普拉斯–司梯阶斯变换; $\mathbf{R}(s)$ 表示复变数 s 的实部.

再令 b 表示该排队系统从一个顾客开始的忙期,且令

$$B(t)=P\{b\le t\},\ b(s)=\int_0^\infty e^{-st}\mathrm{d}B(t)$$

定理 1 对反馈服务次数服从几何分布的 M/ G/ 1 排队系统,若 $\mathbf{R}(s)>0$,则 $b(s)$ 为方程 $z=h(s+\lambda(1-z))$ 在 $|z|$

收稿日期:2006-01-04;修回日期:2006-09-30
基金项目:四川省教育厅自然科学基金重点项目([2006]A067);四川师范大学引进人才基金([2006]037020)

<1 内的唯一解,且 $B(t)$ 可表示为

$$B(t)=\sum_{j=1}^{\infty}\int e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^{j-1}}{j!}\mathrm{d}H^{(j)}(x) \tag{3}$$

若 $\rho\leq 1$,则 $B(\infty)=1$,此时 $B(t)$ 为概率分布函数;若 $\rho>1$,则 $B(\infty)=\omega<1$,此时 $B(t)$ 不是概率分布函数,且忙期长度为无穷的概率等于 $1-\omega$,其中 $\rho=\frac{\lambda}{\alpha\mu}$.

证明:由于忙期长度与服务顺序无关,因此我们可重新安排服务顺序如下:当第一个顾客服务完时,如果该顾客反馈,则系统仍然接着服务该顾客,一直到其服务完不再反馈回系统为止.此时系统再接着服务在第一个顾客服务总时间内相继到达的其它顾客.如果当第一个顾客服务完时不反馈则系统紧接着服务在一个服务时间内到达的其它顾客.原本该排队系统的顾客输入流应为一个参数为 λ 的 Poisson 流和顾客反馈重入系统形成的更新过程的合成,但由于这样的安排使我们完全有理由认为该系统的顾客反馈流不存在.

设 γ 表示在忙期 b 中第一个顾客的总服务时间 H 内到达的顾客数,显然有

$$P\{\gamma=i\}=\int\frac{(\lambda t)^{i}}{i!}e^{-\lambda t}\mathrm{d}H(t),\quad i\geq 0 \tag{4}$$

称在第一个顾客的总服务时间内到达的顾客为"第一类顾客",在其后到达的顾客为"第二类顾客"。再设在 H 内到达的"第一类顾客"分别为 $C_1,C_2,\cdots,C_\gamma$,当系统服务完第一个顾客后就服务 C_1 顾客,并接着服务除 $C_2,\cdots,C_\gamma$ 外的所有新到的"第二类顾客",直到没有新到的"第二类顾客"时开始服务 C_2,记开始服务 C_1 顾客时刻起直到开始服务 C_2 顾客为止这段时间为 b_1,然后待服务完 C_2 后又接着服务除 $C_3,C_4,\cdots,C_\gamma$ 外所有新到的"第二类顾客",直到没有新到的"第二类顾客"时开始服务 C_3,记这段时间为 b_2,…如此下去,直到最后开始服务 C_γ 顾客及其后新到的所有"第二类顾客",记这段时间为 b_γ,于是

$$b=H+b_1+b_2+\cdots+b_\gamma$$

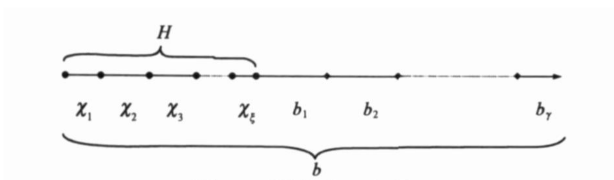

图 1　系统忙期示意图

由于假设每位顾客的服务时间相互独立所以 $H,b_1,b_2,\cdots,b_r$ 相互独立,且 $b_1,b_2,\cdots,b_r$ 与 b 同分布,由此可得

$$\begin{aligned}B(t)&=P\{b\leq t\}=P\{H+b_1+b_2+\cdots+b_\gamma\leq t\}\\&=\sum_{i=0}^{\infty}P\{H+b_1+b_2+\cdots+b_\gamma\leq t,\gamma=i\}\\&=\sum_{i=0}^{\infty}\int P\{b_1+b_2+\cdots+b_i\leq t-x\}P\{\gamma=i|H=x\}\mathrm{d}H(x)\\&=\sum_{i=0}^{\infty}\int B^{(i)}(t-x)\frac{(\lambda x)^{i}}{i!}e^{-\lambda x}\mathrm{d}H(x)\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}b(s)&=\int e^{-st}\mathrm{d}B(t)=\int e^{-st}\mathrm{d}\sum_{i=0}^{\infty}\int B^{(i)}(t-x)\frac{(\lambda x)^{i}}{i!}\cdot e^{-\lambda x}\mathrm{d}H(x)\\&=\sum_{i=0}^{\infty}\int e^{-sx}\frac{(\lambda b(s)x)^{i}}{i!}e^{-\lambda x}\mathrm{d}H(x)\\&=h(s+\lambda(1-b(s)))\end{aligned} \tag{6}$$

由文献[8]中 69 页引理 1 容易知道,当 $\mathbf{R}(s)>0$ 时,有$|b(s)|<1$,故有

$$b(s)=\sum_{j=1}^{\infty}\int e^{-(s+\lambda)t}\frac{(\lambda t)^{j-1}}{j!}\mathrm{d}H^{(j)}(t)$$

反演即可得式(3).而且

$$\lim_{t\to\infty}B(t)=\lim_{s\to 0^{+}}b(s)=\begin{cases}1, & \rho\leq 1\\ \omega<1, & \rho>1\end{cases},\ E[b]=\begin{cases}\frac{1}{\alpha\mu-\lambda}, & \rho<1\\ \infty, & \rho\geq 1\end{cases} \tag{7}$$

其中 ω 为方程 $z=\frac{\alpha g[\lambda(1-z)]}{1-(1-\alpha)g[\lambda(1-z)]}$ 在 $(0,1)$ 内的最小非负实根.

令 $Q_j(t)=P\{b>t,N(t)=j\}$ 表示该系统在忙期 b 中的瞬时队长分布,初始条件为:$Q_1(0)=1,Q_j(0)=0,j>1$.

定理 2　令 $q_j^{*}(s)=\int e^{-st}Q_j(t)\mathrm{d}t$ 为 $Q_j(t)$ 的拉普拉斯变换,则对 $\mathbf{R}(s)>0$,有

$$q_1^{*}(s)=\frac{b(s)-(1-\alpha)g(s+\lambda)b(s)}{\alpha g(s+\lambda)}\int e^{-(s+\lambda)t}[1-H(t)]\mathrm{d}t \tag{8}$$

$$\begin{aligned}q_j^{*}(s)=&\frac{b(s)-(1-\alpha)g(s+\lambda)b(s)}{\alpha g(s+\lambda)}\int e^{-st}\delta_{j-1}(t)\mathrm{d}t\\&+\frac{1-(1-\alpha)g(s+\lambda)}{\alpha g(s+\lambda)}\sum_{l=1}^{j-1}\frac{q_{j-l}^{*}(s)}{b^{l}(s)}\\&\cdot\left\{b(s)-\sum_{m=0}^{l}\int e^{-(s+\lambda)x}\frac{[\lambda b(s)x]^{m}}{m!}\mathrm{d}H(t)\right\},\\&j>1\end{aligned} \tag{9}$$

其中;$g(s+\lambda)=\int e^{-(s+\lambda)t}\mathrm{d}G(t)$;$\delta_j(t)=[1-H(t)]\frac{(\lambda t)^{i}}{j!}\cdot e^{-\lambda t}(j>0)$;当 $i\leq 0$ 时 $\sum_{l=1}^{i}=0$.

证明:按照定理 1 中的服务顺序,利用全概率分解技术,有

$$\begin{aligned}Q_j(t)=&P\{H+b_1+b_2+\cdots+b_\gamma>t\geq 0;N(t)=j\}\\=&P\{H>t\geq 0;N(t)=j\}+P\{H\leq t;H+b_1+b_2+\cdots\\&+b_\gamma>t;N(t)=j\}\\=&P\{H>t\geq 0;\text{且在}(0,t]\text{内有 } j-1 \text{ 个顾客到达系统}\}\\&+\sum_{m=1}^{\infty}P\{H\leq t;H+b_1+b_2+\cdots+b_\gamma>t;N(t)=j;\\&\gamma=m\}\\=&P\{H>t\geq 0;\text{且在}(0,t]\text{内有 } j-1 \text{ 个顾客到达系统}\}\\&+\sum_{m=1}^{\infty}\int P\left\{\sum_{i=1}^{m}b_i>t-x,N(t-x)=j\right\}\\&\frac{(\lambda x)^{m}}{m!}e^{-\lambda x}\mathrm{d}H(x)\end{aligned} \tag{10}$$

因为

$$p\{H>t\geq 0;\text{且在}(0,1]\text{内有 } j-1 \text{ 个顾客到达系统}\}=\begin{cases}[1-H(t)]e^{-\lambda t}, & j=1\\ \delta_{j-1}(t), & j>1\end{cases} \tag{11}$$

根据 b_l 的定义, b_l 是以第 l 个第一类顾客开始的忙期长度,由于每个 b_l 都与忙期 b 有相同的概率特性,于是应有

$$P\{b_l > t \geq 0; N(t) = j\} = P\{b > t \geq 0; N(t) = j\} = Q_j(t)$$

也就是说在 b_l 中时刻 t 队长为 j 的瞬态概率应等于在 b 中同一时刻 t 队长为 j 的瞬态概率.

又根据定理 1 中服务顺序的安排,如果时刻 $t-x$ 落在 b_l 中,则系统中还有 $m-l$ 个第一类顾客没有开始服务,所以系统在 $t-x$ 时刻的顾客数应等于此时刻的第一类顾客数加上此时刻的第二类顾客数. 所以仍然利用全概率分解技术,得

$$\begin{aligned}
&P\{b_1 + b_2 + \cdots + b_m > t - x; N(t-x) = j\} \\
&= \sum_{l=1}^{m} P\{b_1 + b_2 + \cdots + b_l > t - x; b_1 + b_2 + \cdots + b_{l-1} \leq t - x; \\
&\quad N(t-x) = j\} \\
&= \sum_{l=1}^{m} \int_0^x P\{b_l > t - x - y; \widetilde{N}(t-x-y) = j - (m-l)\} \\
&\qquad \mathrm{d}B^{(l-1)}(y) \\
&= \sum_{l=1}^{m} Q_{j-(m-l)}(t-x) * B^{(l-1)}(t-x) \qquad (12)
\end{aligned}$$

其中 $\widetilde{N}(t-x-y)$ 表示在 b_l 中第二类顾客的数目(注:如果时刻 $t-x-y$ 落在第 l 个第一类顾客的服务时间中,则此数目也包含这个第一类顾客);当 $j \leq 0$ 时, $Q_j(t) = 0$;“ * ”表示卷积运算. 于是

$$\begin{aligned}
Q_1(t) &= [1 - H(t)]e^{-\lambda t} + \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^t P\{\sum_{i=1}^{m-1} b_i \leq t - x, \sum_{i=1}^{m} b_i > t \\
&\quad - x, N(t-x) = 1\} \frac{(\lambda x)^m}{m!} e^{-\lambda x} \mathrm{d}H(x) \\
&= [1 - H(t)]e^{-\lambda t} + \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^t \frac{(\lambda x)^m}{m!} e^{-\lambda x} Q_1(t-x) * \\
&\quad B^{(m-1)}(t-x) \mathrm{d}H(x) \qquad (13)
\end{aligned}$$

然后取 L 变换,整理即得

$$q_1^*(s) = \frac{b(s) - (1-\alpha) g(s+\lambda) b(s)}{\alpha g(s+\lambda)} \int_0^\infty e^{-(s+\lambda)t}[1 - H(t)]\mathrm{d}t$$

对 $j > 1$ 时,有

$$\begin{aligned}
Q_j(t) &= \delta_{j-1}(t) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{m} \int_0^t \frac{(\lambda x)^m}{m!} e^{-\lambda x} Q_{j-(m-l)}(t-x) \\
&\quad * B^{(l-1)}(t-x) \mathrm{d}H(x) \qquad (14)
\end{aligned}$$

对 $Q_j(t)$ 取 L 变换,得

$$\begin{aligned}
q_j^*(s) &= \int_0^\infty e^{-st}\delta_{j-1}(t)\mathrm{d}t + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{m} \int_0^\infty \int_0^t e^{-st} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^m}{m!} \\
&\quad [Q_{j-(m-l)}(t-x) * B^{(l-1)}(t-x) \mathrm{d}H(x)\mathrm{d}t] \\
&= \int_0^\infty e^{-st}\delta_{j-1}(t)\mathrm{d}t + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{m} \int_0^\infty \int_0^\infty Q_{j-(m-l)}(t) \\
&\quad * B^{(l-1)}(t) e^{-s(t+x)} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^m}{m!} \mathrm{d}t\mathrm{d}H(x) \\
&= \int_0^\infty e^{-st}\delta_{j-1}(t)\mathrm{d}t + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{m} \int_0^\infty Q_{j-(m-l)}(t) \\
&\quad * B^{(l-1)}(t) e^{-sx}\mathrm{d}t \cdot \int_0^\infty e^{-(s+\lambda)x} \frac{(\lambda x)^m}{m!} \mathrm{d}H(x) \\
&= \int_0^\infty e^{-st}\delta_{j-1}(t)\mathrm{d}t + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{m} q_{j-(m-l)}^*(s) b^{l-1}(s) \\
&\quad \int_0^\infty e^{-(s+\lambda)x} \frac{(\lambda x)^m}{m!} \mathrm{d}H(x) \\
&= \int_0^\infty e^{-st}\delta_{j-1}(t)\mathrm{d}t + \sum_{m=1}^{\infty} b^{l-1}(s) \\
&\quad \left\{ \sum_{m=l}^{j+l-1} q_{j-(m-l)}^*(s) \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^m}{m!} e^{-(s+\lambda)x} \mathrm{d}H(x) \right\} \\
&= \int_0^\infty e^{-st}\delta_{j-1}(t)\mathrm{d}t + \frac{q_j^*(s)}{b(s)}[h(s+\lambda-\lambda b(s)) \\
&\quad - h(s+\lambda)] + \frac{q_{j-1}^*(s)}{b^2(s)}\{h(s+\lambda-\lambda b(s)) \\
&\quad - \sum_{m=0}^{1} \int_0^\infty e^{-(s+\lambda)x} \frac{[\lambda b(s)x]^m}{m!} \mathrm{d}H(x)\} + \cdots + \frac{q_1^*(s)}{b^j(s)} \\
&\quad \{h(s+\lambda-\lambda b(s)) - \sum_{m=0}^{j-1} \int_0^\infty e^{-(s+\lambda)x} \frac{[\lambda b(s)x]^m}{m!} \mathrm{d}H(x)\} \\
&= \int_0^\infty e^{-st}\delta_{j-1}(t)\mathrm{d}t + q_j^*(s) - \frac{q_j^*(s)}{b(s)} h(s+\lambda) + \frac{1}{b(s)} \\
&\quad \cdot \sum_{l=1}^{j-1} \frac{q_{j-l}^*(s)}{b^l(s)}\{b(s) - \sum_{m=0}^{l} \int_0^\infty e^{-(s+\lambda)x} \frac{[\lambda b(s)x]^m}{m!} \mathrm{d}H(x)\} \qquad (15)
\end{aligned}$$

从式(15)中解出 $q_j^*(s)$ 即得式(9).

下面我们讨论系统队长的瞬态分布. 令

$$p_{mj}(t) = P\{N(t) = j \mid N(0) = m\},$$

$$p_{mj}^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} p_{mj}(t)\mathrm{d}t, \quad m, j \geq 0$$

定理 3　对 $m \geq 0$ 和 $j \geq 1$,有

$$p_{m0}^*(s) = \frac{b^m(s)}{s + \lambda - \lambda b(s)} \qquad (16)$$

$$p_{mj}^*(s) = \sum_{l=1}^{m} q_{j-(m-l)}^*(s) b^{l-1}(s) + \frac{\lambda q_j^*(s) b^m(s)}{s + \lambda - \lambda b(s)} \qquad (17)$$

其中 $q_j^*(s)$ 由定理 2 给出,当 $k \leq 0$ 时 $\sum_{j=1}^{k} = 0$, $b(s)$ 由定理 1 确定.

证明:设 τ_j 与 b_j 分别表示从初始状态 $N(0) = 0$ 出发,系统的第 j 个闲期与忙期长度, $j \geq 1$. 由于顾客到达是参数为 λ 的 Poisson 流,所以 τ_j 服从参数为 λ 的负指数分布即 $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}(t > 0)$,而且从任意初始状态出发,顾客不再反馈彻底离开系统后瞬时队长为 $n(\geq 0)$ 的那些时刻构成一个更新过程的更新时刻,于是 $\{\tau_j, j \geq 1\}$ 与 $\{b_j, j \geq 1\}$ 相互独立,且各自为一个独立的过程.

显然在时刻 t 系统的队长等于零的充分必要条件是时刻处于系统的闲期,所以

$$\begin{aligned}
p_{00}(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} P\{\sum_{j=1}^{k-1}(\tau_j + b_j) \leq t < \sum_{j=1}^{k-1}(\tau_j + b_j) + \tau_k\} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t P\{\tau_k > t - x\} \mathrm{d}P\{\sum_{j=1}^{k-1}(\tau_j + b_j) \leq x\} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t [1 - F(t-x)] \mathrm{d}[F^{(k-1)}(x) * B^{(k-1)}(x)] \qquad (18)
\end{aligned}$$

设 $b^{\langle m \rangle}$ 表示由 m 个顾客开始的忙期长度,由于顾客的输入流是一个参数为 λ 的 Poisson 流,所以 $b^{\langle m \rangle}$ 可以表示为

$$b^{\langle m \rangle} = b_1 + b_2 + \cdots + b_m, \quad m \geq 1 \qquad (19)$$

于是

$$p_{m0}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}P\{b^{\langle m\rangle}+\sum_{j=1}^{k-1}(\tau_j+b_j)\le t<b^{\langle m\rangle}+\sum_{j=1}^{k-1}(\tau_j+b_j)+\tau_k\}$$
$$=\int p_{00}(t-x)\mathrm{d}P\{b^{\langle m\rangle}\le x\}=\int p_{00}(t-x)\mathrm{d}B^{(m)}(x)\tag{20}$$

然后对式(18)、式(20)取 L 变换,经整理即得式(16).

当 $j\ge1$ 时,同理,有

$$p_{0j}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}P\{\sum_{j=1}^{k-1}(\tau_j+b_j)+\tau_k\le t<\sum_{j=1}^{k}(\tau_j+b_j),N(t)=j\}$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\int P\{b_k>t-x,N(t-x)=j\}\mathrm{d}[F^{(k)}(x)*B^{(k-1)}(x)]$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\int Q_j(t-x)\mathrm{d}[F^{(k)}(x)*B^{(k-1)}(x)]\tag{21}$$

$$p_{mj}(t)=P\{b^{\langle m\rangle}>t,N(t)=j\}+P\{b^{\langle m\rangle}\le t,N(t)=j\}$$
$$=\sum_{l=1}^{m}\int\{N(t-x)=j-(m-l),b_l>t-x\}\mathrm{d}B^{(l-1)}(x)+\int p_{0j}(t-x)\mathrm{d}B^{(m)}(x)$$
$$=\sum_{l=1}^{m}Q_{j-(m-l)}(t)*B^{(l-1)}(t)+\int p_{0j}(t-x)\mathrm{d}B^{(m)}(x)\tag{22}$$

然后对式(21)、式(22)取 L 变换,经整理即得式(17).

3 系统队长的稳态分布

定理 4 令 $p_j=\lim_{t\to\infty}P\{N(t)=j\},j\ge0$,则对任意初始状态有

(1) 当 $\rho=\frac{\lambda}{\alpha\mu}\ge1$ 时,$p_j=0,j=0,1,2,\cdots$;

(2) 当 $\rho=\frac{\lambda}{\alpha\mu}<1$ 时,$\{p_j,j\ge0\}$ 存在且构成概率分布,进一步有如下的递推表达式:

$$p_0=1-\rho$$
$$p_j=\frac{1}{a_0}\{\lambda(1-\rho)\int_0^{\infty}[1-H(t)]\frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!}e^{-\lambda t}\mathrm{d}t+\sum_{l=1}^{j-1}p_{j-1}[1-\sum_{m=0}^{l}a_m]\}$$
$$a_m=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^m}{m!}\mathrm{d}H(t),m=0,1,2,\cdots$$

证明:由全概率公式和控制收敛定理,得

$$p_j=\lim_{t\to\infty}\sum_{m=0}^{\infty}p_{mj}(t)P\{N(0)=m\}$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}P\{N(0)=m\}\lim_{t\to\infty}p_{mj}(t),j\ge0\tag{23}$$

根据 L 变换的终值定理,有 $\lim_{t\to\infty}p_{mj}(t)=\lim_{s\to0^+}sp^*_{mj}(s)$,再由 L-Hospital 法则,结合前面式(7)和定理 2,经整理即可得证.

推论 1 令 $\pi(z)$ 表示在平衡状态下系统队长分布的概率母函数,则当 $\rho<1$ 时

$$\pi(z)=\frac{\alpha(1-\rho)(1-z)g[\lambda(1-z)]}{[\alpha+(1-\alpha)z]g(\lambda(1-z))-z},\quad|z|<1\tag{24}$$

这与文献[2]中的相应结果一致.

证明:由 $\pi(z)=\sum_{j=0}^{\infty}z^jp_j$ 直接计算可得.

推论 2 在平衡状态下,系统的平均队长为

$$\bar{N}=\frac{2(1-\alpha\rho)+\alpha\lambda^2E[\chi^2]}{2(1-\rho)},\quad\rho<1\tag{25}$$

其中 $E[\chi^2]$ 为顾客一次服务时间 χ 的二阶原点矩.

注:当离开概率 $\alpha=1$ 时,上述所研究的系统便是我们熟知的经典 M/G/1 排队系统.利用上述已得出的结果,我们很容易得到经典的 M/G/1 系统的相对应的一些结果,如概率母函数 $\pi(z)=\frac{(1-\rho)(1-z)g[\lambda(1-z)]}{g(\lambda(1-z))-z}$ 等.

参考文献:

[1] Takacs L. A single-server queue with feedback[J]. Bell System Technical Journal, 1963, 42(2): 509 - 519.

[2] 孙荣恒,李建平. 排队论基础[M]. 北京:科学出版社, 2002.

[3] Kendall D G. Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of imbedded Markov chains[J]. Ann Math Stat, 1953, 24(3): 338 - 354.

[4] Disney R L, Konig D, et al. Stationary queue-length and waiting-time distributions in single-server feedback queues[J]. Advances in Applied Probability, 1994, 16(2): 437 - 446.

[5] 唐应辉,唐小我. 排队论—基础与分析技术[M]. 北京:科学出版社, 2006.

[6] 唐应辉. 分析 M/G/1 排队系统队长分布的方法注记[J]. 系统工程理论与实践, 1996, 16(1): 46 - 50.
Tang Yinghui. A note on the method of analysis the queue of M/G/1 queueing system[J]. System Engineering Theory and Practice, 1996, 16(1): 46 - 50. (in Chinese)

[7] 杨飞,李晓峰,等. 一种智能外设的结构和性能分析[J]. 北京邮电大学学报, 2000, 23(2): 52 - 56.
Yang Fei, Li Xiaofeng, et al. Structure and performance analysis of intelligent peripheral[J]. Journal of Beijing University of Posts and Telecommunications, 2000, 23(2): 52 - 56. (in Chinese)

[8] 徐光辉. 随机服务系统[M]. 北京:科学出版社, 1988.

作者简介:

余[illegible]妙 男,1979 年生,湖北沙市人,硕士. 研究方向为排队论与应用随机模型. E-mail: mmyu75@163.com

唐应辉 男,1963 年生,博士,教授,博士生导师,四川省青年科技奖获得者,四川省有突出贡献的优秀专家. 独著或作为第一作者,已在国内外重要学术刊物上发表学术论文 60 余篇,被 SCI, EI 检索 30 余篇,获省部级科技奖 3 项,出版学术专著 2 部. 研究方向为系统可靠性、排队论和决策理论及应用等. E-mail: tangyh@uestc.edu.cn