

# 基于曲线波变换的图像分解

白 键,冯象初

(西安电子科技大学理学院应用数学系,陕西西安 710071)

**摘 要:** 将图像分解为卡通部分(有界变差部分)和震荡部分(文本部分)是近年来图像处理的一个重要问题. 图像的卡通部分是由一个有界变差(BV)函数来刻画,相应的将BV罚项合并到变分泛函中需要解偏微分方程. Daubechies 用  $B_1^1(L_1)$  项代替BV罚项并且用小波解变分问题. 按照她的方法,我们通过设计一种数字曲线波算法和一种依赖于尺度的阈值规则,从而得到了一种有效的基于数字曲线波变换的图像分解算法. 我们可以看出该算法对噪声具有很强的鲁棒性并且能使图像边缘保持稳定.

**关键词:** 图像分解; 脊波; 曲线波; 负 Hilbert-Sobolev 空间; Besov 空间; 总变差最小

**中图分类号:** TN911.73 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2007) 01-0123-04

## Image Decomposition by Curvelet Transform

BAI Jian, FENG Xiang-chu

(Department of Applied Mathematics, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China)

**Abstract:** Recent years, decomposing an image into cartoon component (bounded variation component) and oscillating component (texture component) is an important problem in the field of image processing. The cartoon component of an image is modeled by a bounded variation (BV) function; the corresponding incorporation of BV penalty terms in the variational functional leads to solve PDE equations. Daubechies replaced the BV penalty term by a Besov term and wrote the problem in a wavelet framework. Following her ideas, we propose a new image decomposition algorithm based on the digital curvelet transform. By designing a digital curvelet transform algorithm and a scale-dependent thresholding rule, elegant and numerically efficient schemes are obtained. We can see that this approach is very robust to additive noise and can keep the image edges stable.

**Key words:** image decomposition; ridgelet; curvelet; negative Hilbert-Sobolev space; Besov space; total variation minimization

## 1 引言

在图像处理中,对于一幅观察图像  $f$ ,它包含卡通部分和文本部分.如何找出卡通图像  $u$  和文本图像  $v$  是一个很重要的问题,其中  $f = u + v$ . 由 Rudin, Osher 和 Fatemi (ROF)<sup>[1]</sup>提出的总变差最小模型在图像去噪方面取得了巨大的成功,但是它不适合提取文本.在文献[2]中, Meyer 提出用  $G$  空间(在某种意义上的BV空间的对偶空间)来刻画文本.  $G$  空间包含了更多的文本并且适合提取图像的震荡成份.对于 Meyer 提出的模型, Vese 和 Osher<sup>[3]</sup>给出了一种数值算法,该算法需要解偏微分方程.在文献[4~7]中,  $G$  空间被  $H^{-1}$  空间(负 Hilbert-Sobolev 空间)代替并且出现了许多数值算法,这些算法都需要解偏微分方程并且计算量较大. Daubechies 在文献[8]中将BV罚项用  $B_1^1(L_1)$  项代替,并且用小波解变分问题,不但降低了计算量而且获得了很好的结果.但是小波将图像边缘变得模糊,所以必须使用边缘增强算法.

曲线波变换<sup>[9~11]</sup>是由 EJ Candes 和 DL Donoho 在 1998 年

提出的,它是从脊波理论中获得的.曲线波是由多尺度脊波合并带通的滤波算子得到的.曲线波变换将图像滤波为许多不同频率的子带图像,对于低通图像,进行小波分析;对于带通图像,进行多尺度脊波分析.曲线波基的支撑区间具有性质:  $width \sim length^2$ , 比起小波变换中的各向同性尺度关系,它具有各向异性尺度关系,这使得它对具有曲线间断的函数具有很好的逼近效果.在文献[12]中, J L Starck 将基追踪算法与总变差正则算法相结合,给出了一种新的图像分解算法.他用了两个字典,一个用来表示文本,另一个用来表示卡通部分.曲线波是用来表示卡通部分的字典中的主要变换,它可以很好的表示图像的卡通部分.

按照 Daubechies 的方法,我们用曲线波代替小波,通过设计一种数字曲线波算法和一种新的依赖于尺度的阈值规则,从而给出了一种新的图像分解算法.我们首先用新算法对一幅卡通图像进行去噪,然后将两幅 Barbara 图像分解为卡通部分和文本部分.数值试验表明新算法能够使图像边缘稳定并且对卡通图像有很好的去噪效果.

## 2 数字曲线波变换

曲线波  $\eta_\mu = \eta_\mu(x_1, x_2)$  在文献[9, 11]中被定义为  $L^2(R^2)$  的紧框架. 曲线波变换由以下几步构成: (a) 子带分解; (b) 分块并光滑化; (c) 归一化; (d) 脊波分析. 文献[11, 13]给出了曲线波的数字实现方法, 在本文我们用以下方法来实现数字曲线波变换.

**子带分解:** 图像大小为  $256 \times 256$ , 本文将图像用 Daubechies 4 小波分为 8 个子带, 分别为  $j=0, 1, \dots, 7$ . 曲线波子带  $s=1$  对应于小波子带  $j=0, 1, 2, 3$ , 曲线波子带  $s=2$  对应于小波子带  $j=4, 5, 6$ , 曲线波子带  $s=3$  对应于小波子带  $j=7$ . 这样, 对于图像  $f$ , 分别得到低通图像  $f_1$ , 带通图像  $f_2, f_3$ .

**分块:** 对于  $f_2$ , 将其分成  $32 \times 32$  的小块  $f_{2,i,j}$ , 这样共有 64 个小块  $f_{2,i,j}$  ( $1 \leq i \leq 8, 1 \leq j \leq 8$ ). 对于  $f_3$ , 将其分成  $16 \times 16$  的小块  $f_{3,m,n}$ , 这样共有 256 个小块  $f_{3,m,n}$  ( $1 \leq m \leq 16, 1 \leq n \leq 16$ ).

**脊波分析:** 对于  $f_2$ , 用  $64 \times 64$  的重叠的块  $g_{2,p,q}$  覆盖它, 其中  $(1 \leq p \leq 7, 1 \leq q \leq 7)$ ,  $g_{2,p,q} = f_2([ (p-1) \times 32 + 1, (p+1) \times 32 ] \times [ (q-1) \times 32 + 1, (q+1) \times 32 ])$ . 对于  $f_3$ , 用  $32 \times 32$  的重叠的块  $g_{3,x,y}$  覆盖它, 其中  $(1 \leq x \leq 15, 1 \leq y \leq 15)$ ,  $g_{3,x,y} = f_3([ (x-1) \times 16 + 1, (x+1) \times 16 ] \times [ (y-1) \times 16 + 1, (y+1) \times 16 ])$ .

对  $g_{2,p,q}$  和  $g_{3,x,y}$  做脊波分析, 得到脊波系数  $c_{2,p,q}$  和  $c_{3,x,y}$ , 其中  $c$  为脊波指标. 有很多种方法可以实现脊波的数字实现, 本文采用文献[14]的方法. 它实质是用快速 Slant Stack 方法做 Radon 变换, 再关于  $t$  做 Meyer 小波变换.

以上每一步都可以精确的重构, 所以重构算法依次分为以下几步.

**脊波重构:** 对每一块图像脊波系数 用文献[14]给出的逆变换求逆, 即  $R^{-1} = S^{-1}W^{-1}$ , 其中  $W^{-1}$  为 Meyer 小波逆变换算子,  $S^{-1}$  为广义 Radon 逆变换算子.

在文献[15], 我们提出了一种新的数字脊波重构算法. 比起原来的算法, 新算法具有更好的效果, 所以在本文我们用新算法来实现脊波重构.

**光滑化:** 对于  $f_{2,i,j}$ , 用覆盖它的  $64 \times 64$  四块  $B_1, B_2, B_3, B_4$  加权平均求和, 得到:

$$h_1 = w(i_2/l) B_1(i_1, j_1) + w(1 - i_2/l) B_2(i_2, j_1)$$

$$h_2 = w(i_2/l) B_3(i_1, j_2) + w(1 - i_2/l) B_4(i_2, j_2)$$

$$f_{2,i,j} = w(j_2/l) h_1 + w(1 - j_2/l) h_2$$

其中  $w(x) = \cos^2(x/2)$  为光滑函数,  $l=32$  为块的大小,  $i_2 = i_1 - l, j_2 = j_1 - l, i_1, j_1 > l$ .

同样, 对于  $f_{3,m,n}$ , 可以得到  $f_{3,m,n}$ .

**子带重构:** 对每一子带分别重构得到  $f_1, f_2, f_3$ , 将其投影到相应的子带再相加即为重构的图像:  $\bar{f} = f_1 + f_2 + f_3$ .

## 3 图像分解

为了提取图像的有界变差部分与文本部分, Meyer 提出用 BV 空间的共轭空间 G 空间来刻画文本. 他指出, 如果  $v$  表示文本和噪声, 那么  $v \in G$ , 于是引入下面的图像恢复模型:

$$\inf \left\{ E(u) = \|\nabla u\| + \int v \cdot \nabla u, f = u + v \right\} \quad (1)$$

对于 G 空间, Meyer 给出了接下来的定义<sup>[12]</sup>:

**定义 1** 设 G 是由所有能写成以下形式的广义函数  $v(x, y)$  所构成的 Banach 空间

$$v(x, y) = \partial_x g_1(x, y) + \partial_y g_2(x, y), g_1, g_2 \in L^2(R^2) \quad (2)$$

在其中引入  $\|\cdot\|_G$  范数, 它是函数  $|g|$  的  $L^2$  范数的下确界, 其中  $g = (g_1, g_2)$ ,  $\|g(x, y)\| = \sqrt{g_1^2(x, y) + g_2^2(x, y)}$ . 由于 G 空间比  $L^2$  空间大, 所以它包含更多的文本. 在文献[8]中, Daubechies 将 BV 空间用  $B_{1,1}^1$  代替, 将 G 空间用  $H^{-1}$  空间代替, 得到了以下的模型:

$$\inf F_f(v, u)$$

其中

$$F_f(v, u) = \int |f - (u + v)|^2 dx + \int |v|^2 dx + 2 \int |u| dx \quad (3)$$

对于 Besov 空间  $B_p(L_p(\cdot))$ , 我们有接下来的定义:

**定义 2** 设  $\phi_{j,k}$  是小波基函数. 对于  $p > 0$  和  $0 < p < \infty$ , Besov 空间  $B_p(L_p(\cdot))$  是以下函数的集合:

$$B_p(L_p(\cdot)) = \left\{ f \in L_p(\cdot) : \|f\|_{B_p(L_p(\cdot))} < \infty \right\}$$

其中,  $\|f\|_{B_p(L_p(\cdot))} = \left( \sum_j 2^{j|s|} \|f\|_p^p \right)^{1/p}, f = f, \quad$

$$s = -1 + \frac{2}{p}, \| \cdot \|_p = \int |\cdot|^p dx \quad (4)$$

当  $p=2, B_2(L_2(\cdot))$  就是 Bessel 空间  $H(\cdot)$ . 与 Bessel 空间  $H(\cdot)$  的特别情况相类似, 负指数 Besov 空间  $B_p(L_p(\cdot))$  ( $p < 0$ ) 可以看成  $B_p(L_p(\cdot))$  空间的对偶空间, 其中  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ . 将式(3)写成小波的形式, 问题转化为:

$$\inf_J \left\{ \int |f - (u + v)|^2 dx + \sum_{j_0} 2^{2j_0} \int |v|^2 dx + 2 \int |u| dx \right\} \quad (5)$$

其中,  $J = \{j = (i, j, k) : k \in J_j, j \in J, i = 1, 2, 3\}$  是指标集. 上式可以由以下的阈值规则来求解:

**定理 1** <sup>[18]</sup>

设  $f$  是一个给定的函数, 式(5)的解由  $f$  的小波系数的非线性滤波给出:

$$\tilde{v}_j = (1 + 2^{-2j})^{-1} [f - S_{(2^{2j} + )/} (f)] / J_{j_0}$$

$$\text{和 } \tilde{u}_j = \sum_{k \in J_{j_0}} f \phi_{j_0,k} \phi_{j_0,k} + S_{(2^{2j} + )/} (f) / J_{j_0} \quad (6)$$

其中,  $S_t$  表示小波软阈值算子,  $\phi_{j_0,k}$  是小波尺度函数,  $J_{j_0}$  是所有大于  $j_0$  的指标  $j$  的集合,  $J_{j_0}$  是对于固定的尺度  $j_0$  的集合.

对于在  $[0, 1]^2$  上  $C^\infty$  光滑除了在一段有限的光滑曲线上有间断的函数  $f$ , 它属于  $B_{1,1}^1([0, 1]^2)$  但是不属于  $B_{1,1}^s([0, 1]^2)$ , 其中  $s > 1$ . 对于这样的分块光滑函数,  $M$  项小波非线性逼近的  $L^2$  误差为  $O(M^{-1})$ . 比起小波,  $M$  项曲线波非线性逼近的误差可以达到  $O(M^{-2})$ . 曲线波已经达到了最优的逼近

误差. 因为  $M$  项曲线波非线性逼近的误差为  $O(M^{-2})$ , 所以在式(4)中令  $M=2$  并且用曲线波代替式(4)中的小波, 我们就得到了接下来的公式:

$$\inf_{s_1, s_2, s_3} \left( \|f - (u + v)\|^2 + 2^{-4|s_1|} \|v\|^2 + 2^{-2|s_2|} \|u\|^2 \right) \quad (7)$$

其中,  $s_1, s_2, s_3$  是曲线波子带指标集,  $|s|$  是曲线波的尺度, 定义如下:

对于每一曲线波子带  $s=2$  中的  $64 \times 64$  块图像, 进行脊波分析, 共有 7 个脊波尺度  $J=0, 1, 2, 3, \dots, 6$ . 曲线波子带  $s=2$  对应于小波尺度  $j=4, 5, 6$ , 所以我们定义曲线波尺度  $|s| = 3.5 + \frac{1}{2}J$ .

对于每一曲线波子带  $s=3$  中的  $32 \times 32$  块图像, 进行脊波分析, 共有 6 个脊波尺度  $J=0, 1, 2, \dots, 5$ . 曲线波子带  $s=3$  对应于小波尺度  $j=7$ , 所以我们定义曲线波尺度  $|s| = 6.5 + \frac{1}{5}J$ .

其相应的阈值结果为:

$$\tilde{v}_i = \left( 1 + 2^{-4|s_1|} \right)^{-1} \left[ f - S_{2^{-|s_2|} | (2^{4|s_1|} + 1)^{-1}}(f) \right] c_{s_2, s_3}$$

$$\text{和 } \tilde{u}_i = f_1 + S_{2^{-|s_2|} | (2^{4|s_1|} + 1)^{-1}}(f) c_{s_2, s_3} \quad (8)$$

其中,  $c$  是曲线波基函数. 因为离散曲线波变换并不是保范的, 所以曲线波范数将依赖于曲线波指标集. 式(8)是式(7)的一个近似解. 设  $F$  表示离散曲线波变换矩阵, 我们用蒙特卡洛法来估计  $FF^T$  的对角元素. 这可以通过对一些标准的高斯白噪声图像进行曲线波变换, 然后对曲线波变换系数求平均值. 设  $\tau$  是  $FF^T$  的对角元素的近似, 并且令  $\tau = \tau \cdot b$ . 我们用依赖于指标的阈值公式, 其相应的阈值结果为:

$$\tilde{v}_i = \left( 1 + 2^{-4|s_1|} \right)^{-1} \left[ f - S_{b \cdot \tau \cdot 2^{-|s_2|} | (2^{4|s_1|} + 1)^{-1}}(f) \right] c_{s_2, s_3}$$

$$\text{和 } \tilde{u}_i = f_1 + S_{b \cdot \tau \cdot 2^{-|s_2|} | (2^{4|s_1|} + 1)^{-1}}(f) c_{s_2, s_3} \quad (9)$$

#### 4 数值试验

我们首先对一幅几何图像加入方差  $\sigma^2=20$  的高斯白噪声, 并且用三种不同的方法进行去噪试验. 对于一幅含噪声的有界变差图像, 噪声就是其文本部分, 原始图像就是其卡通部分. 在图 1 中我们分别列举了小波软阈值算法, 标准的曲线波

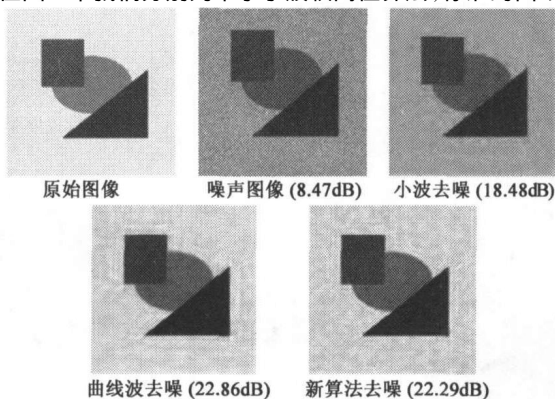


图 1 用三种不同方法对几何图像进行去噪

阈值算法和本文的方法所得出的结果, 其中  $b=0.0000045$ ,  $\sigma^2=0.01$ . 信噪比的单位是 dB. 我们可以看出本文的方法和标准的曲线波阈值算法都获得了很好的效果, 但是小波软阈值算法将图像边缘变得模糊. 因此, 新算法对噪声具有很强的鲁棒性. 在图 2 和图 3 中我们用提出的算法将两幅噪声 Barbara 图像 ( $\sigma^2=10$ ) 分解为卡通部分和文本部分, 其中  $b=0.00025$ ,  $\sigma^2=0.01$ . 比较本文的结果和文献[8]的结果, 我们可以看出新算法得到的图像边缘稳定并且视觉效果较好.

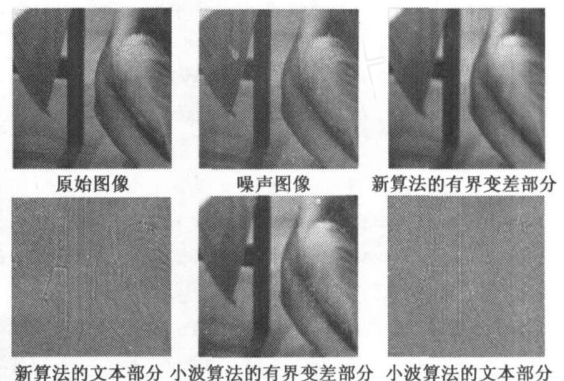


图 2 两种算法在一幅 Barbara 图像上的比较

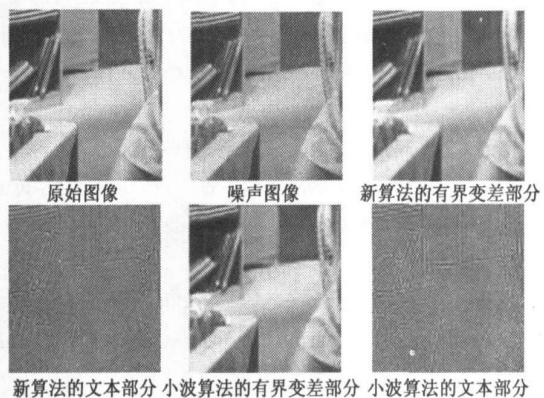


图 3 两种算法在另一幅 Barbara 图像上的比较

#### 5 结论

本文提出了一种新的图像分解算法, 既基于数字曲线波变换的图像分解算法. 该算法通过对数字曲线波变换系数进行一种依赖于尺度的阈值, 从而将图像分解为有界变差部分和文本部分. 我们用提出的方法对一幅几何图像进行去噪并且将两幅 Barbara 图像分解为卡通部分和文本部分. 实验结果表明新算法可以使图像边缘保持稳定并且视觉效果比文献[8]的算法要好. 由此可以看出, 新算法非常适合图像分解. 但是数字曲线波算法计算量较大. 最近, Candes 改进了原始的算法并且提出了一个快速离散曲线波算法[16]. 新算法大大降低了计算量并且完全适合我们的图像分解算法, 所以我们期望一个快速的图像分解算法.

#### 参考文献:

- [1] Rudin L I, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based

- noise removal algorithms[J]. Physica D, 1992, 60: 259 - 268.
- [2] Meyer Y. Oscillating patterns in image processing and nonlinear evolution equations [R]. Boston, USA: American Mathematical Society, 2001.
- [3] Vese L A, Osher S J. Modeling textures with total variation minimization and oscillating patterns in image processing[J]. Journal of Scientific Computing, 2003, 19(1/3): 553 - 572.
- [4] Aujol J F, Chambolle A. Dual norms and image decomposition models[J]. International Journal of Computer Vision, 2005, 63(1): 85 - 104.
- [5] Levine S E. An adaptive variational model for image decomposition [OL]. <http://ddma.lanl.gov/public/speaker/2005-03-21713h30.shtml>.
- [6] Lieu L, Vese L A. Image restoration and decomposition via bounded total variation and negative Hilbert-Sobolev spaces [OL]. <http://www.math.ucla.edu/~llieu/ams-meeting1009-slides.pdf>.
- [7] Chan T F, Esedoglu S, Frederick E P. Image decomposition combining staircase reduction and texture extraction [OL]. <http://www.math.ucla.edu/applied/cam/>.
- [8] Daubechies I, Teschke G. Variational image restoration by means of wavelets: Simultaneous decomposition, deblurring, and denoising[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2005, 19(1): 1 - 16.
- [9] Candes E J, Donoho D L. Curvelets—A Surprising effective nonadaptive representation for objects with edges [A]. Curve and Surface Fitting [C]. Nashville: Vanderbilt University Press, 1999.
- [10] Donoho D L. Orthonormal ridgelet and linear singularities[J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 2000, 31(5): 1062 - 1099.
- [11] Donoho D L, Duncan M R. Digital curvelet transform: Strategy, implementation and experiments [A]. Proc. SPIE, Wavelet Application VII [C]. Orlando, USA, 2000, 4056, 12 - 29.
- [12] Strack J L, Elad M, Donoho D L. Image decomposition via the combination of sparse representations and a variational approach[J]. IEEE Trans Image Processing, 2005, 14(10): 1570 - 1582.
- [13] Starck J L, Candes E J, Donoho D L. The curvelet transform for image denoising[J]. IEEE Trans Image Processing, 2002, 11(6): 670 - 684.
- [14] Donoho D L, Flesia A G. Digital ridgelet transform based on true ridge functions [OL]. <http://www.stat.Stanford.edu/donoho/Report>.
- [15] BAI Jian, FENG Xiang-Chu. Digital ridgelet reconstruction based on local dual frame[J]. Science in China Series F: Information Science, 2005, 48(6): 782 - 794.
- [16] Candes E J, Demanet L, Donoho D L, Ying L. Fast discrete curvelet transforms [OL]. <http://www.acm.caltech.edu/~demanet/papers/FDCT.pdf>.

#### 作者简介:



白 键 1979 年 12 月出生, 2002 年 7 月于西安电子科技大学获应用数学学士学位, 现为西安电子科技大学博士生. 主要研究方向为图像的多尺度几何分析、小波分析及其在图像处理中的应用. E-mail: keywhite@sina.com



冯象初 1984 年在西安交通大学获计算数学学士学位; 1989, 1999 在西安电子科技大学数学系获应用数学硕士学位和博士学位, 现为西安电子科技大学数学系教授, 博士生导师, 陕西省计算数学协会副理事长. 主要研究方向为现代数值分析方法、小波理论及其应用和图像处理的偏微分方程方法.