

# 用于增强信号的自适应广义特征向量跟踪算法

杨 坚, 奚宏生, 杨 锋, 赵 宇

(中国科学技术大学自动化系网络传播系统与控制实验室(218#), 安徽合肥 230027)

**摘 要:** 广义特征分解技术在现代自适应信号处理中占有重要地位. 本文提出了一种新的无约束损失函数用于广义特征分解, 并且分析了损失函数的特性. 通过应用递推最小二乘(RLS)技术来最小化损失函数, 得到了用于求解最大广义特征值对应的广义特征向量的自适应算法. 并将这种算法应用于 CDMA 系统中的智能天线波束形成问题. 仿真结果表明算法具有快速收敛和动态跟踪能力.

**关键词:** 广义特征向量; 自适应算法; 广义特征分解; 递推最小二乘; 自适应波束形成

**中图分类号:** TN911. 72 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112(2005)07-1258-04

## Adaptive Generalized Eigenvector Tracking Algorithm for Signal Enhancement

YANG Jian, XI Hongsheng, YANG Feng, ZHAO Yu

(School of Information Science and Technology, Univ. of Science & Technology of China, Hefei, Anhui 230027, China)

**Abstract:** The generalized eigen decomposition plays important roles in modern adaptive signal processing applications. In this paper, a novel unconstrained cost function for the generalized eigen decomposition is presented and the properties of the cost function are analyzed. By applying recursive least squares technique to minimize the cost function, an adaptive algorithm is proposed for finding the most dominant generalized eigenvector. The algorithm is also applied for the beamforming of the smart antenna in CDMA systems. The simulation results show the proposed algorithm has fast convergence and dynamic tracking capability.

**Key words:** generalized eigenvector; adaptive algorithm; generalized eigen decomposition; recursive least squares; adaptive beamforming

## 1 引言

自适应广义特征分解技术是一种有效的信号处理方法, 近年来受到了广泛的重视. 典型的应用如 CDMA 系统中的自适应阵列处理<sup>[1, 2]</sup>. 在这些实时应用中, 往往只能获得两个采样向量序列, 并且系统可能是时变的. 因此, 需要一种快速收敛的, 具有跟踪能力的在线自适应迭代广义特征分解算法.

广义特征问题被归结为下述形式:(注:本文中用加粗的大写字母表示矩阵, 加粗的小写字母表示向量, 斜体字母表示标量)

$$R_y w = \lambda R_x w \quad (1)$$

其中  $R_y$  和  $R_x$  是对称的正定矩阵,  $\lambda$  和  $w$  分别称为矩阵束  $(R_y, R_x)$  的广义特征值和广义特征向量. 早先, 对于求解矩阵束  $(R_y, R_x)$  的广义特征向量问题, 研究人员假设协方差矩阵  $R_y, R_x$  给定, 然后提出一些方法用于求解广义特征向量问题<sup>[3, 4]</sup>. 这些基于数值分析的算法计算量大, 并且需要给定矩阵  $R_y, R_x$ . 而在自适应实时信号处理应用中, 协方差矩阵  $R_y, R_x$  往往是需要估计的. 因此, 这些基于数值分析的算法不适合于实时自适应信号处理. 后来, 提出了一些自适应算法, 绝

大部分都是基于梯度的算法<sup>[1, 2, 5]</sup>. 但是基于梯度算法的问题在于收敛速度慢, 并且这种算法的性能与迭代步长的大小选择相关. 因此, 需要一种更加有效的自适应在线学习算法.

众所周知, 与基于梯度的算法相比, 递推最小二乘法收敛速度快, 并且具有动态跟踪能力<sup>[6]</sup>. 本文采用 RLS 技术来实现广义特征向量自适应跟踪算法. 为了适于应用 RLS 算法, 给出了一种新的无约束目标函数. 然后, 通过应用 RLS 算法最小化目标函数来计算对应于最大广义特征值的广义特征向量.

## 2 问题描述

在很多信号处理应用中, 常常可以获得一个复合的  $N$  维的时间序列向量:

$$x(n) = s(n) + u(n) \quad (2)$$

其中  $s(n)$  是某个潜在的目标信号  $s(n)$  的多个测量值组成的向量, 而  $u(n)$  是干扰或噪声向量. 本文中, 假设信号估计器应用线性处理方法来最大化输出信号功率, 同时最小化干扰输出功率. 因此,  $s(n)$  的线性估计为

$$\hat{s}(n) = w^H x(n) \quad (3)$$

其中  $w = [w_1, w_2, \dots, w_N]^T$  为用于线性估计的权重向量.

自适应算法的目标是搜索最优的  $w$ , 使得输出信号功率最大而输出干扰功率最小. 因此, 可以采用的信号与干扰比 (SIR) 作为目标函数

$$\varepsilon = \frac{P_s}{P_u} = \frac{w^H R_s w}{w^H R_u w} \quad (4)$$

其中协方差矩阵  $R_s = E\{s(n)s^H(n)\}$ ,  $R_u = E\{u(n)u^H(n)\}$ .

目标函数(4)是著名的瑞利商问题. 最大化(4)的  $w$  是矩阵束  $(R_s, R_u)$  的最大广义特征值对应的广义特征向量. 在本文中, 为了便于阐述算法, 假设信号向量和干扰向量可以分离. 事实上, 要直接分离信号向量  $s(n)$  和干扰向量  $u(n)$  比较困难, 但可以用类似于文献[1, 2]中的方法避免直接分离  $s(n)$  和  $u(n)$ .

### 3 无约束目标函数

假设  $s$  和  $u$  是两个  $N$  维的随机向量过程. 由于  $R_u$  正定, 因此  $R_u^{-1}$  也正定, 故可以令  $R_u^{-1} = PP^H$ ,  $R_u = (P^{-1})^H P^{-1}$ , 其中  $P$  为  $N \times N$  的可逆阵. 考虑下面的无约束损失函数

$$\begin{aligned} J(w) &= E \| R_u^{-1} s - w w^H s \|^2_{R_u} \\ &= E [s^H R_u^{-1} s] - 2E [s^H w w^H s] + E [s^H w w^H R_u w w^H s] \\ &= \text{tr}(P^H R_s P) - 2w^H R_s w + (w^H R_u w)(w^H R_s w) \end{aligned} \quad (5)$$

其中  $\text{tr}(\cdot)$  表示矩阵的迹. 设  $\lambda_i$  ( $\lambda_i > 0$ ) 和  $v_i$  ( $1 \leq i \leq N$ ) 是矩阵束  $(R_s, R_u)$  的广义特征值和相应的正交规范化广义特征向量, 即  $v_i^H R_u v_j = \delta_{ij}$ , 其中  $\delta_{ij}$  是 Kronecker delta 函数.

正如下面的两个定理, 无约束准则(4)等价于最大化信干比准则. 假设矩阵束  $(R_s, R_u)$  只有一个最大广义特征值(对于多个广义特征值情形在后面讨论):

**定理 1** 当且仅当  $w$  是矩阵束  $(R_s, R_u)$  的广义正交规范化特征向量时,  $w$  是  $J(w)$  的平稳点. 并且在平稳点  $w$ ,  $J(w)$  等于除了与  $w$  相对应的广义特征值外的所有的广义特征值的和.

证明:  $J(w)$  的梯度为

$$\frac{1}{2} \nabla J(w) = -2R_s w + R_u w (w^H R_s w) + R_s w (w^H R_u w) \quad (6)$$

对于  $w = v_i$  ( $1 \leq i \leq N$ ), 注意到  $v_i^H R_u v_i = 1$ ,  $R_s v_i = \lambda_i R_u v_i$ ,  $v_i^H R_s v_i = \lambda_i v_i^H R_u v_i = \lambda_i$ , 故有  $\frac{1}{2} \nabla J(w) \Big|_{w=v_i} = 0$ . 因此, 所有广义正交规范特征向量, 都是  $J(w)$  的平稳点.

另一方面, 对于  $\nabla J(w) = 0$ , 有

$$w^H \frac{1}{2} \nabla J(w) = 2(w^H R_u w)(w^H R_s w) - 2w^H R_s w = 0 \quad (7)$$

由于  $R_s$  正定, 对于任何  $w \neq 0$ , 都有  $w^H R_s w > 0$ . 根据式(7)有,  $w^H R_u w = 1$ . 将此结果用于  $\nabla J(w) = 0$ , 有  $R_s w = (w^H R_s w) R_u w$ . 所以,  $w$  为矩阵束  $(R_s, R_u)$  的广义标准规范化特征向量, 相应的广义特征值为  $w^H R_s w$ .

由于  $R_s v_i = \lambda_i R_u v_i$ ,  $(P^H R_s P)(P^{-1} v_i) = \lambda_i (P^{-1} v_i)$ , 这表明  $\lambda_i$  和  $P^{-1} v_i$  是  $P^H R_s P$  的特征值和相应的特征向量, 因此,  $\text{tr}(P^H R_s P) = \sum_{i=1}^N \lambda_i$ . 当  $w = v_i$  时,

$$J(w) \Big|_{w=v_i} = \sum_{j=1}^N \lambda_j - 2\lambda_i + \lambda_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N \lambda_j \quad (8)$$

**定理 2** 矩阵束  $(R_s, R_u)$  的最大广义特征值对应的广义特征向量是  $J(w)$  的唯一全局极小值点, 而其他广义特征向量是鞍点. 在极小值点时,  $J(w)$  为除了最大广义特征值外所有广义特征值之和.

证明: 令  $H = \frac{1}{2} \nabla \nabla^H J(w)$  为  $J(w)$  的 Hessian 矩阵, 经过计算后, 可以表示为

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} H &= -2R_s + (w^H R_s w) R_u + 2R_s w w^H R_u \\ &\quad + (w^H R_u w) R_s + 2R_u w w^H R_s \end{aligned} \quad (9)$$

由于  $\lambda_i$  和  $q_i = P^{-1} v_i$  为矩阵  $P^H R_s P$  的特征值和相应的特征向量. 用矩阵形式可表示为  $V = PQ$ ,  $Q^H Q = I$ ,  $V^H R_u V = I$ , 其中  $V = [v_1, \dots, v_N]$  和  $Q = [q_1, \dots, q_N]$ .

不妨设  $\lambda_1$  和  $v_1$  为矩阵束  $(R_s, R_u)$  的任意广义特征值和相应的广义特征向量. 因此, 在平稳点  $v_1$  有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} H \Big|_{w=v_1} &= -R_s + \lambda_1 R_u + 4\lambda_1 R_u v_1 v_1^H R_u \\ &= (P^{-1})^H (-P^H R_s P + \lambda_1 I + 4\lambda_1 q_1 q_1^H) P^{-1} \end{aligned} \quad (10)$$

利用下述结论:  $P^H R_s P = Q \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) Q^H$ ,  $QQ^H = I$  和  $4\lambda_1 q_1 q_1^H = Q \text{diag}(4\lambda_1, 0, \dots, 0) Q^H$ . 式(10)可以表示为

$$\frac{1}{2} H \Big|_{w=v_1} = (P^{-1})^H Q \text{diag}(4\lambda_1, \lambda_1 - \lambda_2, \dots, \lambda_1 - \lambda_N) Q^H P^{-1} \quad (11)$$

因此, 当且仅当  $\lambda_1$  为最大广义特征值时, Hessian 阵  $H$  为正定阵, 否则,  $H$  既不正定也不负定. 故对应于矩阵束  $(R_s, R_u)$  的最大的广义特征值的广义特征向量是  $J(w)$  的全局唯一极小值点, 而其他的平稳点均为鞍点. 不妨设最大的广义特征值为  $\lambda_1$ , 则

$$\min J(w) = J(v_1) = \sum_{j=2}^N \lambda_j \quad (12)$$

根据上述两个定理, 给出关于无约束损失函数(5)的两点说明:

- 对于矩阵束  $(R_s, R_u)$  只有一个最大广义特征值时, 无约束损失函数  $J(w)$  具有全局唯一极小值点, 不存在任何其他局部极小值点, 所以, 利用迭代算法最小化  $J(w)$  来计算最大广义特征值所对应的广义特征向量, 可以保证全局收敛. 当矩阵束  $(R_s, R_u)$  具有多个最大广义特征值时, 从式(12)可以看出  $J(w)$  具有多个局部极小点, 因此, 在用迭代算法最小化  $J(w)$  时, 可能会收敛到某个局部极小值点, 但是这并不影响本文要解决的问题, 因为这些局部极小点都是矩阵束  $(R_s, R_u)$  的最大广义特征值对应的广义特征向量.

- 通过最小化  $J(w)$ , 可以导出  $w^H R_u w = 1$ , 这样使得这种新的损失函数不同于其他文献中的有约束条件损失函数. 例如, S Choi<sup>[1]</sup>通过  $\max_w w^H R_s w, s. t. w^H R_u w = 1$  来搜索最大广义特征值对应的广义特征向量, 这是一个有约束优化问题.

### 4 自适应算法

用下面的指数加权式代替(5)中的期望表达式

$$J(\mathbf{w}(t)) = \sum_{i=1}^L \beta^{L-i} \|\mathbf{R}_u^{-1} s(i) - \mathbf{w}(t) \mathbf{w}^H(t) s(i)\|_{\mathbf{R}_u}^2$$

$$= \text{tr}(\mathbf{P}^H \mathbf{R}_s(t) \mathbf{P}) - 2 \mathbf{w}^H(t) \mathbf{R}_s(t) \mathbf{w}(t)$$

$$+ (\mathbf{w}^H(t) \mathbf{R}_u(t) \mathbf{w}(t)) (\mathbf{w}^H(t) \mathbf{R}_s(t) \mathbf{w}(t))$$

式中所有在时刻  $1 \leq i \leq L$  的采样向量都是可以获得的。遗忘因子  $0 < \beta \leq 1$ , 用于消弱旧的数据对当前估计的影响, 从而提供动态跟踪能力。  $J(\mathbf{w}(t))$  与  $J(\mathbf{w})$  完全相同, 除了使用了指

数加权采样协方差矩阵,  $\mathbf{R}_s(t) = \sum_{i=1}^L \beta^{L-i} s(i) s^H(i) = \beta \mathbf{R}_s(t-1) + s(t) s^H(t)$ , 代替协方差矩阵  $\mathbf{R}$ 。因此, 上面的两个定理同样适用于  $J(\mathbf{w}(t))$ 。也就是说, 通过最小化  $J(\mathbf{w}(t))$  可以搜索最大广义特征值对应的广义特征向量。

注意到,  $J(\mathbf{w}(t))$  是  $\mathbf{w}(t)$  的四阶函数, 为了能够应用 RLS 技术, 将采用下面的逼近方法来简化损失函数: 用  $z(i) = \mathbf{w}^H(i-1) s(i)$  来近似  $\mathbf{w}^H(t) s(i)$ 。这样, 损失函数可以修改为

$$J(\mathbf{w}(t)) = \sum_{i=1}^L \beta^{L-i} \|\mathbf{R}_u^{-1} s(i) - \mathbf{w}(t) z(i)\|_{\mathbf{R}_u}^2 \quad (13)$$

对于静态或慢时变信号,  $\mathbf{w}^H(i-1) s(i)$  与  $\mathbf{w}^H(t) s(i)$  之间的误差是比较小的, 特别是  $i$  接近与  $t$  时; 当  $i \ll t$  时, 误差可能比较大, 但是通过加权遗忘, 随着  $t$  的增加, 旧的数据对当前估计的影响会变得越来越小。因此, 通过最小化  $J(\mathbf{w}(t))$  获得的  $\mathbf{w}(t)$  是最大广义特征值对应的广义特征向量的一个很好的估计。

现在, 可以应用 RLS 技术来求解最大特征值对应的广义特征向量, 算法的自适应迭代步骤如下:

$$z(t) = \mathbf{w}^H(t-1) s(t) \quad (14)$$

$$d(t) = \beta d(t-1) + |z(t)|^2 \quad (15)$$

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{R}_u^{-1} s(t) - \mathbf{w}(t-1) z(t) \quad (16)$$

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{w}(t-1) + \mathbf{e}(t) [\mathbf{z}^H(t)/d(t)] \quad (17)$$

注意到算法中包含了确定性矩阵  $\mathbf{R}_u^{-1}$ , 因此, 此算法适用于已知协方差矩阵  $\mathbf{R}_u$  的自适应信号处理的应用。为了使算法适用于  $\mathbf{R}_u$  未知的信号处理应用, 采用指数遗忘加权来估计协方差矩阵  $\mathbf{R}_u$ , 即

$$\mathbf{R}_u(t) = \mu \mathbf{R}_u(t-1) + u(t) u^H(t) \quad (18)$$

其中  $\mu (0 < \mu \leq 1)$  为遗忘因子。应用矩阵求逆定理, 并且令  $\mathbf{Q}(t) = \mathbf{R}^{-1}(t)$ , 则  $\mathbf{Q}(t)$  迭代式为

$$\mathbf{Q}(t) = \frac{1}{\mu} (\mathbf{Q}(t-1) - \frac{\mathbf{Q}(t-1) u(t) u^H(t) \mathbf{Q}(t-1)}{\mu + u^H(t) \mathbf{Q}(t-1) u(t)}) \quad (19)$$

用  $\mathbf{Q}(t)$  代替算法(14~17)中的  $\mathbf{R}_u^{-1}$ , 可以获得真正的在线自适应算法。在线算法的初始值可以取为  $\mathbf{Q}(0) = \mathbf{I}$ ,  $d(0) = 1$ ,  $\mathbf{w}(0) = [1, 0, \dots, 0]^T$ 。此算法的计算复杂度为  $3N + N^2 + O(N^2)$ 。

## 5 仿真

为了验证本文给出的自适应算法的性能, 将其应用于 CDMA 系统智能天线盲自适应波束形成问题。

假设 CDMA 通信系统中, 小区基站配有  $N$  个均匀线性天线阵列而移动台用单个全向天线, 并且小区中共有  $K$  个移动台收发信号。本文仅考虑反向链路。由于信号在传播过程中可能经过折射、绕射和散射等, 产生多径效应, 使得到达基站接

收机的信号发生衰落, 因而  $K$  个移动台通过各自的信道到达基站的合成基带信号可表示为<sup>[7]</sup>:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^K \alpha_i A_i b_i(t - \tau_i) c_i(t - \tau_i) e^{-j\phi_i} \mathbf{a}(\theta_i) + \mathbf{n}(t) \quad (20)$$

其中  $A_i$  是第  $i$  个用户的信号幅度,  $\alpha_i$ ,  $\phi_i$  和  $\tau_i$  表示信号的衰弱因子、相位和时延。  $b_i(t)$  和  $c_i(t)$  是码元波形和扩频码波形, 周期分别为  $T_s$  和  $T_c$ ,  $L = T_s/T_c$  为扩频增益。  $\mathbf{a}(\theta_i)$  是到达方向为  $\theta_i$  的  $N \times 1$  为信号阵列响应向量,  $\mathbf{n}(t)$  是均值为 0 的热噪声, 其方差为  $E\{\mathbf{n}(t_1) \mathbf{n}^H(t_2)\} = \sigma^2 \mathbf{I} \delta(t_1 - t_2)$ , 其中  $\sigma^2$  表示每个天线阵元的噪声功率。

假设用户 1 的信号是接收信号, 将接收到的信号  $\mathbf{x}(t)$  通过解调并通过与码片波形相匹配的滤波器, 然后按码片速率采样, 则第  $n$  个码元的第  $l$  个码片的采样  $N \times 1$  维信号向量记为  $\mathbf{x}(l, n)$ , 经过用户 1 的伪码相关器后, 得到的  $n \times 1$  维信号向量记为  $\mathbf{y}(n)$ 。在文献[1]中, 给出了等价与最大化信号与干扰噪声比 (Signal to Interference plus noise ratio, MSINR)<sup>[8]</sup> 的性能函数, 用于求解最优波束权向量, 即

$$\mathbf{w}_{\text{MSINR}} = \arg \max_{\mathbf{w}} \frac{\mathbf{w}^H \mathbf{R}_y \mathbf{w}}{\mathbf{w}^H \mathbf{R}_x \mathbf{w}} \quad (21)$$

其中  $\mathbf{R}_y = E\{\mathbf{y}(n) \mathbf{y}^H(n)\}$ ,  $\mathbf{R}_x = E\{\mathbf{x}(l, n) \mathbf{x}^H(l, n)\}$ 。

在仿真中, 采用上面的信号模型, 设基站配有阵元数  $N = 12$  的线性阵列。每个用户分配一个长度为  $L = 31$  的 golden 扩频序列。假设目标用户的到达方向角为 0 度, 其他用户的到达方向服从  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  的均匀分布。目标用户的接收功率为 1 个单位, 并且信噪比为 20dB。在仿真开始时, 系统中有 8 个接收功率比目标用户高 10dB 的干扰用户。在时刻 300, 有 5 个接收功率高于目标用户 20dB 的干扰用户加入系统。

为了比较算法性能, 仿真中同时实现了本文提出的算法和文献[1]中提出的基于 LMS 的算法, 在图中分别称为算法 1 和算法 2。对于算法 1, 初始值分别取为  $\mathbf{w}(0) = [1, 0, \dots, 0]^T$ ,  $\mathbf{Q}(0) = \mathbf{I}$ ,  $\beta = 0.90$  和  $u = 0.95$ 。对于算法 2, 初始权向量  $\mathbf{w}(0) = [1, 0, \dots, 0]^T$ , 迭代步长  $u = 0.0001$ 。图 1~3 显示了仿真结果。

从图 1 可以看到在第一阶段, 算法 2 能够较好的工作, 而本文提出的算法具有更快的收敛速度和更高的 SINR。在第二阶段, 算法 2 已经无法正常工作, 而本文提出的算法能迅速的跟踪变化的最优波束形成向量。这种现象不足为奇。因为对于基于梯度的算法, 很难选取最优的步长, 所有它没有本文提出的算法那么快的收敛速度和估计精度。同时基于梯度的算法没有自动调整迭代步长, 从而导致其无法在时变环境下正常工作。而本文提出的算法能够自动调整步长, 达到近似最优, 从而使其具有快速收敛和动态跟踪能力。图 2 和图 3 分别为应用本文提出的算法后, 获得的波束模式, 图中的黑点表示目标用户, 而星号表示干扰用户, 从图中可以看到, 主波束迅速的对准目标用户, 而很多干扰用户位于智能天线的零点方向上, 并且几乎与理论最优波束模式相重合。因此, 本文提出的算法能够最大限度的增强目标用户的信号, 同时最大限度的抑制干扰用户的信号。

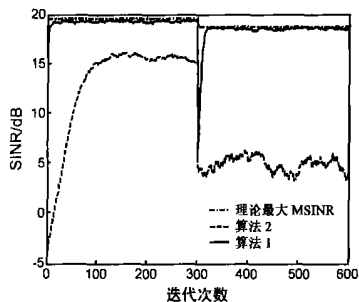


图 1 两种算法的 SINR 性能曲线图

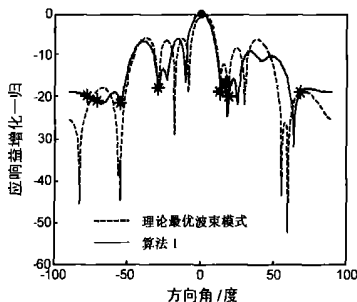


图 2 在第 50 次迭代, 干扰用户数为 8 时的波束模式

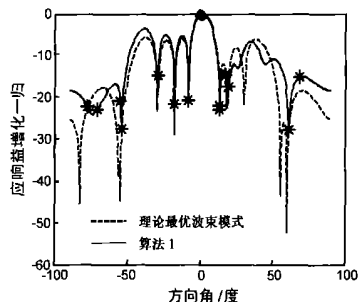


图 3 在第 350 次迭代, 干扰用户数为 13 时的波束模式

## 6 结论

本文讨论了自适应在线广义特征分解问题, 提出了用于广义特征分解的新的无约束损失函数, 给出了基于递推最小二乘的自适应广义特征跟踪算法. 通过将此算法应用于 CDMA 系统盲自适应波束形成问题, 说明了算法适用于自适应实时信号处理中. 通过计算机仿真, 验证了提出的这种自适应广义特征算法具有快速收敛性和动态跟踪能力.

### 参考文献:

- [ 1 ] S Choi, J Choi, H J Im, B Choi. A novel adaptive beamforming algorithm for antenna array CDMA systems with strong interferers[J]. IEEE Trans Vehicular Technology, 2002, 51(5): 808–816.
- [ 2 ] T F Wong, T M Lok, J S Lehnert, M D Zoltowski. A linear receiver for direct sequence spread spectrum multiple access systems with antenna arrays and blind adaptation[J]. IEEE Trans Information Theory, 1998, 44(2): 659–676.
- [ 3 ] C B Moler, G W Stewart. An algorithm for generalized matrix eigenvalue problems[J]. SIAM J Numerical Anal., 1973, 10: 241–256.
- [ 4 ] W Shougen, Z Shuqin. An algorithm for  $Ax = \lambda Bx$  with symmetric and positive definite  $A$  and  $B$  [J]. SIAM J Matrix Anal Applications, 1991, 12(4): 654–660.

- [ 5 ] C Chatterjee, V P Roychowdhury, J Ramos, M D Zoltowski. Self organization algorithms for generalized eigendecomposition[J]. IEEE Trans Neural Networks, 1997, 8(6): 1518–1530.
- [ 6 ] S Haykin. Adaptive Filter Theory (4<sup>th</sup> Edition) [M]. New Jersey: PrenticeHall, 2002.
- [ 7 ] 雷万明, 黄顺吉. CDMA 中小扩频增益下波束形成[J]. 电波科学学报, 2001, 16(2): 168–171.  
Lei Wanming, Huang Shunji. The method of beamforming of CDMA in small spreading gain[J]. Chinese Journal of Radio Science, 2001, 16(2): 168–171 (in Chinese).
- [ 8 ] R A Monzingo, T W Miller. Introduction to Adaptive Arrays[M]. New York: Wiley, 1980.

### 作者简介:

杨 坚 男, 1977 年出生于浙江, 中国科学技术大学博士生, 研究方向 CDMA 系统盲自适应干扰抑制、自适应滤波算法研究及其应用、盲源分离算法研究及其应用。

奚宏生 男, 1950 年出生于上海, 教授, 博士生导师, 研究方向自适应滤波理论、离散事件动态系统研究、流媒体技术研究与应用、网络安全技术研究. E-mail: xih@s@ustc.edu.cn.

杨 锋 男, 1979 年出生于浙江, 中国科学技术大学博士生, 研究方向 CDMA 系统智能天线技术、广义特征分解算法研究及其在信号处理中应用。