

# 分数阶傅里叶域滤波器组的一般化设计方法

孟祥意, 陶然, 王越

(北京理工大学电子工程系, 北京 100081)

**摘要:** 分数阶傅里叶变换相对于传统的傅里叶变换具有灵活的时频分析特性, 在最优分数阶傅里叶域进行滤波可以实现对某些非平稳信号的最优检测和参数估计以及对某些干扰和噪声的滤除。分数阶傅里叶域滤波器组理论的提出弥补了分数阶傅里叶域滤波不具备多尺度分析以及运算量过大的缺点, 但现有的分数阶傅里叶域准确重建滤波器组设计方法不具备形式一般化的特点, 很难满足很多实际工程的需要。本文从分数阶傅里叶域多抽样率信号处理基本理论和分数阶卷积定理出发, 推导出了分数阶傅里叶域准确重建滤波器组的一般化设计方法, 为分数阶傅里叶域滤波器组理论在实际工程中的推广应用奠定了理论基础。最后, 仿真实验验证了本文所提分数阶傅里叶域滤波器组一般化设计方法的有效性。

**关键词:** 分数阶傅里叶变换;  $M$  通道滤波器组; 多相结构; 准确重建; 分数阶卷积

**中图分类号:** TN 911.7      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112(2009)09-2046-06

## Generalized Design Method of Multirate Filter Banks in the Fractional Fourier Domain

MENG Xiang yi, TAO Ran, WANG Yue

(Department of Electronic Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

**Abstract:** The fractional Fourier transform(FRFT) is of better time frequency analysis character than the traditional Fourier transform. The filtering in the optimal fractional Fourier domain(FRFD) can estimate some special cases of nonstationary signals and systems with minimum mean square error. The theorem for the multirate filter bank in the FRFD leads to the efficient structure of filtering in the FRFD and the multi resolution analysis of signal in the FRFD. But the existing perfect reconstruction filter banks in the FRFD are of special form, which cannot satisfy some practices. This paper proposes the generalized design method for the perfect reconstruction filter banks in the FRFD based on the FRFD analysis of sampling rate conversion and the fractional convolution theorem, which are the basis of the applications of filter bank theory in the FRFD. At last, the simulations verify the generalized design method.

**Keywords:** fractional Fourier transform;  $M$ -channel filter banks; signal polyphase representation; perfect reconstruction; fractional convolution

## 1 引言

分数阶傅里叶变换将信号分解到一系列同一调频率不同起始频率的线性调频正交基上, 它在统一的时频域上进行信号处理, 是傅里叶变换的广义形式。因此它相对于传统的傅里叶变换灵活性更强, 适合于进行非平稳信号的处理, 尤其是多分量线性调频信号的检测与参数估计<sup>[1~4]</sup>。因此, 基于分数阶傅里叶变换时频分析特性构建的分数阶傅里叶域滤波器可以通过分数阶傅里叶域变换阶次的选择实现对某些非平稳信号与系统的最优检测和参数估计以及对某些形式干扰和噪声的滤除<sup>[5,6]</sup>。例如, 在基于分数阶傅里叶变换的OFDM系统中, 可以通过对信号调制解调变换阶次的最优选择, 实

现在时变信道下的最优传输信息恢复<sup>[7]</sup>。但是, 传统分数阶傅里叶域滤波器都是基于单采样率的, 因此基于分数阶傅里叶变换的信息处理系统都是单尺度条件下的, 而且运算量很大。

多抽样率信号处理理论通过改变信号的抽样间隔, 可以实现信号在傅里叶域的多分辨率分析, 降低傅里叶域信息处理系统的运算量<sup>[8,9]</sup>。但是, 由于傅里叶变换的局限性, 传统的多抽样率信号处理理论无法实现基于分数阶傅里叶变换信息处理系统的多采样率分析。文献[10~14]提出的分数阶傅里叶域抽样率转换理论、信号在分数阶傅里叶域的多相结构、分数阶傅里叶域准确重建滤波器组设计方法初步构建了基于分数阶傅里叶变换的多抽样率信号处理体系, 建立了分数阶傅里叶域

多分辨率分析思想, 基本解决了分数阶傅里叶域信息处理系统复杂度过大, 无法对非平稳信号实现分数阶傅里叶域多尺度分析的问题, 为分数阶傅里叶域滤波器组理论在多载波通信和数字水印技术等工程实践中的应用奠定了理论基础。

但是, 在文献[12]中提出的准确重建滤波器组设计方法中, 分数阶傅里叶域准确重建滤波器组只能由傅里叶域准确重建滤波器组乘以相应的线性调频信号得到, 其在分数阶傅里叶域形式过于特殊, 没有充分利用分数阶傅里叶域的性质, 在形式上不具有一般化的特点, 无法满足某些工程实际应用的需要, 例如, 基于分数阶傅里叶变换OFDM系统波形成型滤波器的设计。本文基于分数阶傅里叶域多抽样率信号处理基础理论和分数阶卷积定理提出了分数阶傅里叶域准确重建滤波器组设计的一般化方法, 该方法可以利用傅里叶域准确重建滤波器组设计满足某些实际应用需求的分数阶傅里叶域准确重建滤波器组, 为分数阶傅里叶域滤波器组理论在实际工程中的推广应用奠定了理论基础。

本文运算符号说明,  $\{\cdot\}_{l,k=0,1,\dots,M-1}$  表示  $M \times M$  的矩阵, 第一个下标  $l$  为行号, 第二个下标  $k$  为列号;  $\text{diag}\{\cdot\}_{m=0,1,\dots,M-1}$  表示  $M \times M$  的对角阵,  $m$  为矩阵主对角线上元素序号;  $\{\cdot\}_{l=0,1,\dots,M-1}$  为  $M \times 1$  的矩阵, 即列向量  $l$  为列向量中元素序号;  $\odot$  为分数阶卷积算子。

## 2 离散时间分数阶傅里叶变换

分数阶傅里叶变换是近年来出现的一种新的时频工具, 它是傅里叶变换的广义形式。信号的分数阶傅里叶变换是信号在时频平面内坐标轴绕原点逆时针旋转任意角度后的表示方法, 而当这个旋转角度为  $\pi/2$  时, 这个表示则为传统的傅里叶变换。

信号  $x(t)$  的分数阶傅里叶变换定义为<sup>[1,3]</sup>

$$X_p(u) = \left\{ F_p[x(t)] \right\}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) K_p(u, t) dt \quad (1a)$$

其中,  $p = 2\alpha/\pi$  为分数阶傅里叶变换的阶次,  $\alpha$  为分数阶傅里叶域与时域的夹角,  $F_p[\cdot]$  为分数阶傅里叶变换算子,  $K_p(u, t)$  为分数阶傅里叶变换的核函数, 其定义为

$$K_p(u, t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1 - \cot \alpha}{2\pi}} \exp\left(j \frac{t^2 + u^2}{2} \cot \alpha - jut \csc \alpha\right), & \alpha \neq n\pi \\ \delta(t - u), & \alpha = 2n\pi \\ \delta(t + u), & \alpha = (2n \pm 1)\pi \end{cases} \quad (1b)$$

分数阶傅里叶逆变换为

$$x(t) = \left\{ F_{-p}[X_p(u)] \right\}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} X_p(u) K_{-p}(u, t) du \quad (2)$$

在实际工程中研究的都是由模拟信号采样而得的数字信号, 为了理论分析的方便, 文献[10]中由分数阶傅里叶变量  $u$  及离散序列的时域采样间隔  $\Delta t$  定义了分数阶傅里叶域数字频率  $\omega_p$  为

$$\omega_p = u \cdot \Delta t \quad (3)$$

根据文献[15]中离散时间分数阶傅里叶变换的定义, 序列  $x(n)$  可在  $p$  阶分数阶傅里叶域数字频率轴上表示为

$$\widetilde{X}_p(\omega_p) = \sqrt{\frac{1 - \cot \alpha}{2\pi}} e^{\frac{j}{2} \cot \alpha \cdot \left( \frac{\omega_p}{\Delta t} \right)^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-j \left( n \cdot \omega_p \cdot \csc \alpha + \frac{1}{2} \cot \alpha \cdot n^2 \cdot \Delta t^2 \right)} \quad (4a)$$

相应的,  $p$  阶离散时间分数阶傅里叶变换逆变换可以定义为

$$x(n) = \sqrt{\frac{1 + \cot \alpha}{2\pi}} \int_{-\pi \sin \alpha}^{\pi \sin \alpha} \widetilde{X}_p(\omega_p) \cdot e^{-j \left( \frac{n^2 \Delta t^2 + (\omega_p / \Delta t)^2}{2} \cdot \cot \alpha + j \cdot n \cdot \omega_p \cdot \csc \alpha \right)} d\omega_p \quad (4b)$$

## 3 分数阶傅里叶域准确重建滤波器组的设计方法

### 3.1 分数阶傅里叶域 $M$ 通道滤波器组输入输出基本关系

$p$  阶分数阶傅里叶域  $M$  通道滤波器组如图 1 所示, 根据分数阶卷积定理<sup>[16]</sup>, 其准确重建条件可以表示为

$$\begin{aligned} \hat{x}(n) &= c \cdot A_p \cdot x(n - n_0) e^{-j \cot \alpha (m n_0 - n_0^2) \Delta t^2} \\ &= c \cdot [x(n) \underset{p}{\otimes} (n - n_0)] \end{aligned}$$

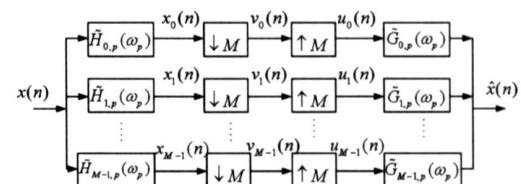


图 1 分数阶傅里叶域  $M$  通道滤波器组

根据分数阶傅里叶域信号抽样率转换理论及分数阶卷积定理, 由文献[12]可以知道, 滤波器组中输入输出信号之间的基本关系为

$$\begin{aligned} \widetilde{X}_p(\omega_p) &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{-j \frac{1}{2} \cot \alpha \left( \frac{\omega_p}{\Delta t} \right)^2} \widetilde{A}_{k,p}(\omega_p) \\ &\quad \cdot \widetilde{X}_p \left( \omega_p - \frac{2k\pi}{M} \sin \alpha \right) \end{aligned} \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} \widetilde{A}_{k,p}(\omega_p) &= e^{-j \cot \alpha \frac{k^2 \pi^2 \sin^2 \alpha - M \omega_p k \pi \sin \alpha}{(M \Delta t)^2}} \\ &\quad \times \sum_{l=0}^{M-1} e^{-j \frac{1}{2} \cot \alpha \left( \frac{\omega_p}{\Delta t} \right)^2} \widetilde{H}_{l,p} \left( \omega_p - \frac{2k\pi}{M} \sin \alpha \right) \\ &\quad \cdot \widetilde{G}_{l,p}(\omega_p) \end{aligned} \quad (6)$$

设  $A(\omega_p) = [\widetilde{A}_{0,p}(\omega_p), \widetilde{A}_{1,p}(\omega_p), \dots, \widetilde{A}_{M-1,p}(\omega_p)]^T$ ,  $p$  阶分数阶傅里叶域  $M$  通道滤波器组准确重建条件可

以表示为<sup>[12]</sup>

$$\mathbf{A}(\omega_p) = \Lambda(\omega_p) \cdot \mathbf{H}(\omega_p) \cdot \mathbf{G}(\omega_p) = \begin{bmatrix} C \cdot K_p(\omega_p, n_0 \Delta t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

其中:

$$\mathbf{H}(\omega_p) = \left\{ \widetilde{H}_{l,p} \left( \omega_p - m \frac{2\pi}{M} \sin \alpha \right) \right\}_{l=0,1,\dots,M-1}$$

$$\mathbf{G}(\omega_p) = \left\{ \widetilde{G}_{l,p}(\omega_p) \right\}_{l=0,1,\dots,M-1}$$

$$\Lambda(\omega_p) = \text{diag} \left\{ e^{-j\frac{1}{2}\cot \alpha \left( \frac{\omega_p}{\Delta t} \right)^2 + j\cot \alpha \frac{4m\pi \sin \alpha M \omega_p^2 - 4m^2 \pi^2 \sin^2 \alpha}{(M\Delta t)^2}} \right\}_{m=0,1,\dots,M-1}$$

### 3.2 分数阶傅里叶域准确重建滤波器组的一般化设计方法

为进一步获得分数阶傅里叶域  $M$  通道滤波器组的一般化设计方法, 对分析滤波器组和综合滤波器组分别进行多相分解。由文献[12]所示分数阶傅里叶域信号 II 型多相表示, 式(7)中矢量  $\mathbf{G}(\omega_p)$  可进一步表示为

$$\mathbf{G}(\omega_p) = \frac{1}{A_p} e^{-j\frac{1}{2}\cot \alpha \left( \frac{\omega_p}{\Delta t} \right)^2} \times \left\{ \widetilde{R}_{kl,p}(M\omega_p) \right\}_{l,k=0,1,\dots,M-1} \\ \left\{ K_p \left[ \omega_p, (M-1-k)\Delta t \right] \right\}_{k=0,1,\dots,M-1} \quad (8)$$

其中,  $\widetilde{R}_{kl,p}(M\omega_p)$  表示第  $l$  个综合滤波器  $\widetilde{G}_{l,p}(\omega_p)$  的第  $k$  个 II 型多相分量。

由文献[12]所示信号在分数阶傅里叶域的 I 型多相表示, 第  $l$  个分析滤波器  $\widetilde{H}_{l,p}(\omega_p)$  可以表示为

$$\widetilde{H}_{l,p}(\omega_p) = \frac{1}{A_p} e^{-j\frac{1}{2}\cot \alpha \left( \frac{\omega_p}{\Delta t} \right)^2} \sum_{k=0}^{M-1} K_p(\omega_p, k\Delta t) \\ \cdot \widetilde{E}_{lk,p}(M\omega_p) \quad (9)$$

其中,  $\widetilde{E}_{lk,p}(M\omega_p)$  表示第  $l$  个分析滤波器  $\widetilde{H}_{l,p}(\omega_p)$  的第  $k$  个 I 型多相分量。那么, 可以进一步有

$$\widetilde{H}_{l,p} \left( \omega_p - m \frac{2\pi}{M} \sin \alpha \right) = \frac{1}{A_p} e^{-j\frac{1}{2}\cot \alpha \left( \frac{\omega_p}{\Delta t} \right)^2} \\ \cdot \sum_{k=0}^{M-1} e^{j\frac{2\pi}{M} km} K_p(\omega_p, k\Delta t) \widetilde{E}_{lk,p}(M\omega_p - m \cdot 2\pi \sin \alpha) \quad (10)$$

由文献[12]所示分数阶傅里叶域信号 I 型多相分量定义,

$$\widetilde{E}_{lk,p}(M\omega_p - m \cdot 2\pi \sin \alpha) = e^{-j\frac{1}{2}\cot \alpha \left( \frac{\omega_p}{\Delta t} \right)^2} \cdot e^{j\frac{1}{2}\cot \alpha \left( \frac{M\omega_p - m \cdot 2\pi \sin \alpha}{M\Delta t} \right)^2} \\ \cdot \widetilde{E}_{lk,p}(M\omega_p) \quad (11)$$

将式(10)和式(11)代入到式(7)中矩阵  $\mathbf{H}(\omega_p)$  有

$$\mathbf{H}(\omega_p) = \frac{1}{A_p} e^{-j\cot \alpha \left( \frac{\omega_p}{\Delta t} \right)^2} \text{diag} \left\{ e^{j\frac{1}{2}\cot \alpha \left( \frac{M\omega_p - m \cdot 2\pi \sin \alpha}{M\Delta t} \right)^2} \right\}_{m=0,1,\dots,M-1} \times \\ \mathbf{W}^H \text{diag} \left\{ K_p(\omega_p, k\Delta t) \right\}_{k=0,1,\dots,M-1} \\ \cdot \left\{ \widetilde{E}_{lk,p}(M\omega_p) \right\}_{k,l=0,1,\dots,M-1} \quad (12)$$

其中,  $\mathbf{W}$  为离散傅里叶变换矩阵。将式(8)、(12)代入到式(7)中有

$$\frac{1}{A_p^2} e^{-j\cot \alpha \left( \frac{\omega_p}{\Delta t} \right)^2} \text{diag} \left\{ e^{-j\frac{1}{2}\cot \alpha \left( \frac{M\omega_p - m \cdot 2\pi \sin \alpha}{M\Delta t} \right)^2} \right\}_{m=0,1,\dots,M-1} \\ \cdot \mathbf{W}^H \times \text{diag} \left\{ K_p(\omega_p, k\Delta t) \right\}_{k=0,1,\dots,M-1} \\ \times \left\{ \widetilde{E}_{lk,p}(M\omega_p) \right\}_{k,l=0,1,\dots,M-1} \\ \times \left\{ \widetilde{R}_{kl,p}(M\omega_p) \right\}_{l,k=0,1,\dots,M-1} \\ \times \left\{ K_p \left[ \omega_p, (M-1-l)\Delta t \right] \right\}_{l=0,1,\dots,M-1} \\ = \left\{ c \cdot K_p(\omega_p, n_0 \Delta t) \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right\}^T \quad (13)$$

根据分数阶傅里叶变换核函数的定义, 上式经化简后可以有

$$\mathbf{W}^H \cdot \text{diag} \left\{ e^{-j\omega_p k \csc \alpha} \right\}_{k=0,1,\dots,M-1} \left\{ \widetilde{E}_{lk}(M\omega_p) \right\}_{k,l=0,1,\dots,M-1} \\ \times \left\{ \widetilde{R}_{kl}(M\omega_p) \right\}_{l,k=0,1,\dots,M-1} \\ \times \left\{ e^{-j\omega_p(M-1-l) \csc \alpha} \right\}_{l=0,1,\dots,M-1} \\ = \left\{ c \cdot e^{-j\omega_p n_0 \csc \alpha + j\frac{1}{2}\cot \alpha (n_0 \Delta t)^2} \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right\}^T \quad (14)$$

其中:

$$\widetilde{E}_{lk}(M\omega_p) = e^{-j\frac{1}{2}\cot \alpha \left( \frac{\omega_p}{\Delta t} \right)^2 + j\frac{1}{2}\cot \alpha k^2 \Delta t^2} \widetilde{E}_{lk,p}(M\omega_p) \quad (15a)$$

$$\widetilde{R}_{kl}(M\omega_p) = e^{-j\frac{1}{2}\cot \alpha \left( \frac{\omega_p}{\Delta t} \right)^2 + j\frac{1}{2}\cot \alpha (M-1-k)^2 \Delta t^2} \widetilde{R}_{kl,p}(M\omega_p) \quad (15b)$$

设矩阵

$$\left\{ \widetilde{P}_{lk}(M\omega_p) \right\}_{l,k=0,1,\dots,M-1} = \left\{ \widetilde{E}_{lk}(M\omega_p) \right\}_{k,l=0,1,\dots,M-1} \times \left\{ \widetilde{R}_{kl}(M\omega_p) \right\}_{l,k=0,1,\dots,M-1}$$

式(14)可以写为

$$\mathbf{W}^H \cdot \text{diag} \left\{ e^{-j\omega_p k \csc \alpha} \right\}_{k=0,1,\dots,M-1} \times \left\{ \widetilde{P}_{lk}(M\omega_p) \right\}_{l,k=0,1,\dots,M-1} \\ \times \left\{ e^{-j\omega_p(M-1-l) \csc \alpha} \right\}_{l=0,1,\dots,M-1} = \left\{ c' \cdot e^{-j\omega_p n_0 \csc \alpha} \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right\}^T \quad (16)$$

其中, 复常数  $c' = c \cdot A_p^2 \cdot e^{j\frac{1}{2}\cot \alpha (n_0 \Delta t)^2}$ 。由文献[17]中多抽样率滤波器组准确重建设计的充要条件可以知道,  $\{P_{lk}(M\omega_p)\}_{l,k=0,1,\dots,M-1}$  对应傅里叶域准确重建滤波器组的多相分量乘积矩阵, 即以  $\{\widetilde{E}_{lk}(M\omega_p)\}_{k,l=0,1,\dots,M-1}$  为 I 型多相分量矩阵的分析滤波器组  $\{h_l(n)\}$  和以  $\{\widetilde{R}_{kl}(M\omega_p)\}_{l,k=0,1,\dots,M-1}$  为 II 型多相分量矩阵的综合滤波器组  $\{g_l(n)\}$  构成傅里叶域的准确重建滤波器组。

可以发现, 在傅里叶域准确重建滤波器组的设计中, 只要多相分量矩阵乘积满足式(16), 即可得到傅里叶域准确重建滤波器组, 因此, 为了得到在分数阶傅里叶域一般化的准确重建滤波器组设计方法, 在满足式(14)条件的前提下, 式(15a)和式(15b)可以进一步修正为

$$\widetilde{E}_{lk,p}(M\omega_p) = \widetilde{C}_{lk}(\omega_p) \cdot e^{j\frac{1}{2}\cot \alpha \left( \frac{\omega_p}{\Delta t} \right)^2 - j\frac{1}{2}\cot \alpha k^2 \Delta t^2} \widetilde{E}_{lk}(M\omega_p) \quad (17a)$$

$$\widetilde{R}_{kl,p}(M\omega_p) = \widetilde{D}_{lk}(\omega_p) e^{j\frac{1}{2}\cot \alpha \left( \frac{\omega_p}{\Delta t} \right)^2 - j\frac{1}{2}\cot \alpha (M-1-k)^2 \Delta t^2} \widetilde{R}_{kl}(M\omega_p) \quad (17b)$$

在式(17a)和(17b)中, 修正因子  $\widetilde{C}_{lk}(\omega_p)$ 、 $\widetilde{D}_{lk}(\omega_p)$

为  $\omega_p$  的复函数, 且  $\tilde{C}_{lk}(\omega_p) \cdot \tilde{D}_{lk}(\omega_p) = d$ ,  $d$  为复常数, 为简单起见, 定义  $d = 1$ . 相应的, 由信号在分数阶傅里叶域的多相结构表示式<sup>[12]</sup>, 可以得到分数阶傅里叶域准确重建滤波器组第  $l$  路分析滤波器和第  $l$  路综合滤波器的表达式为

$$\begin{aligned}\tilde{H}_{l,p}(\omega_p) &= \frac{1}{A_p} \sum_{k=0}^{M-1} e^{-j\frac{1}{2}\cot\alpha \left(\frac{\omega_p}{\Delta t}\right)^2} K_p(\omega_p, k\Delta t) \tilde{E}_{lk,p}(M\omega_p) \\ &= e^{j\frac{1}{2}\cot\alpha \left(\frac{\omega_p}{\Delta t}\right)^2} \sum_{k=0}^{M-1} e^{-j\omega_p k \csc\alpha} \tilde{C}_{lk}(M\omega_p) \tilde{E}_{lk}(M\omega_p)\end{aligned}\quad (18a)$$

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{l,p}(\omega_p) &= \frac{1}{A_p} \sum_{k=0}^{M-1} e^{j\frac{1}{2}\cot\alpha \left(\frac{\omega_p}{\Delta t}\right)^2} K_p(\omega_p, (M-1-l)\Delta t) \\ &\quad \cdot \tilde{R}_{kl,p}(M\omega_p) \\ &= e^{j\frac{1}{2}\cot\alpha \left(\frac{\omega_p}{\Delta t}\right)^2} \sum_{k=0}^{M-1} e^{-j\omega_p(M-1-k) \csc\alpha} \tilde{D}_{lk}(\omega_p) \\ &\quad \cdot \tilde{R}_{kl}(M\omega_p)\end{aligned}\quad (18b)$$

根据傅里叶域中信号多相结构定义<sup>[8]</sup>, 设  $\tilde{E}'_{lk}(M\omega_p) = \tilde{C}_{lk}(M\omega_p) \tilde{E}_{lk}(M\omega_p)$  为滤波器  $\tilde{H}_l(\omega_p) = \tilde{C}_l(\omega_p) \tilde{H}_l(\omega_p)$  在傅里叶域第  $k$  个 I 型多相分量,  $\tilde{R}'_{kl}(M\omega_p) = \tilde{D}_{lk}(M\omega_p) \cdot \tilde{R}_{kl}(M\omega_p)$  为滤波器  $\tilde{G}_l(\omega_p) = \tilde{D}_l(\omega_p) \tilde{G}_l(\omega_p)$  在傅里叶域第  $k$  个 II 型多相分量, 那么式(18a)和(18b)可以进一步写为

$$\begin{aligned}\tilde{H}_{l,p}(\omega_p) &= e^{j\frac{1}{2}\cot\alpha \left(\frac{\omega_p}{\Delta t}\right)^2} \tilde{H}'_l(\omega_p) \\ &= e^{j\frac{1}{2}\cot\alpha \left(\frac{\omega_p}{\Delta t}\right)^2} \tilde{C}_l(\omega_p) \tilde{H}_l(\omega_p)\end{aligned}\quad (19a)$$

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{l,p}(\omega_p) &= e^{j\frac{1}{2}\cot\alpha \left(\frac{\omega_p}{\Delta t}\right)^2} \tilde{G}'_l(\omega_p) \\ &= e^{j\frac{1}{2}\cot\alpha \left(\frac{\omega_p}{\Delta t}\right)^2} \tilde{D}_l(\omega_p) \tilde{G}_l(\omega_p)\end{aligned}\quad (19b)$$

由式(18a)和(18b)可发现, 通过对  $\tilde{C}_l(\omega_p)$  和  $\tilde{D}_l(\omega_p)$  的设定, 可以得到满足各种实际需求的分数阶傅里叶域多抽样率滤波器组. 进而通过对  $\tilde{H}_{l,p}(\omega_p)$  和  $\tilde{G}_{l,p}(\omega_p)$  的分数阶傅里叶域多相分解, 由式(17a)和式(17b)得到分数阶傅里叶域信号多相分量的修正因子, 进而实现分数阶傅里叶域准确重建滤波器组的设计.

特别的, 当  $\tilde{C}_l(\omega_p) = \tilde{D}_l(\omega_p) = 1$  时, 由信号在分数阶傅里叶域的多相分量表达式及离散时间分数阶傅里叶变换表达式可以得到式(17a)和(17b)在时域的对应关系为

$$\begin{aligned}h_{l,p}(Mn+k) &= h_l(Mn+k) \cdot e^{-j\frac{1}{2}\cot\alpha(Mn+k)^2 \Delta t^2} \\ g_{l,p}[Mn+(M-1-k)] &= g_l[Mn+(M-1-k)] \cdot e^{-j\frac{1}{2}\cot\alpha(Mn+(M-1-k))^2 \Delta t^2}\end{aligned}$$

进而可以有

$$h_{l,p}(n) = h_l(n) \cdot e^{-j\frac{1}{2}\cot\alpha n^2 \Delta t^2} \quad (20a)$$

$$g_{l,p}(n) = g_l(n) \cdot e^{-j\frac{1}{2}\cot\alpha n^2 \Delta t^2} \quad (20b)$$

得到的分数阶傅里叶域准确重建滤波器组如文献[12]中定理 1 所示, 这是形式上最简单的分数阶傅里叶域准确重建滤波器组, 那么式(19a)和(19b)可进一步写为

$$\tilde{H}_{l,p}(\omega_p) = \tilde{C}_l(\omega_p) \tilde{H}_{l,sim}(\omega_p) \quad (21a)$$

$$\tilde{G}_{l,p}(\omega_p) = \tilde{D}_l(\omega_p) \tilde{G}_{l,sim}(\omega_p) \quad (21b)$$

其中,  $\tilde{H}_{l,sim}(\omega_p)$  和  $\tilde{G}_{l,sim}(\omega_p)$  分别为式(20a)中  $h_{l,p}(n)$  和式(20b)中  $g_{l,p}(n)$  的离散时间分数阶傅里叶变换.

综上, 可以得到分数阶傅里叶域准确重建滤波器组的一般化设计方法如定理 1 所示.

**定理 1** 已知傅里叶域准确重建滤波器的第  $l$  路分析滤波器为  $\tilde{H}_l(\omega_p)$ 、第  $l$  路综合滤波器为  $\tilde{G}_l(\omega_p)$ ,  $\tilde{E}_{lk}(M\omega_p)$  为  $\tilde{H}_l(\omega_p)$  的第  $k$  个 I 型多相分量,  $\tilde{R}_{lk}(M\omega_p)$  为  $\tilde{G}_l(\omega_p)$  的第  $k$  个 II 型多相分量, 那么由  $\{\tilde{H}_l(\omega_p)\}$  和  $\{\tilde{G}_l(\omega_p)\}$  设计分数阶傅里叶域准确重建滤波器组的步骤如下:

(1) 由傅里叶域准确重建滤波器组的分析滤波器组  $\{\tilde{H}_l(\omega_p)\}$  和综合滤波器组  $\{\tilde{G}_l(\omega_p)\}$  确定  $\{\tilde{H}_{l,sim}(\omega_p)\}$  和  $\{\tilde{G}_{l,sim}(\omega_p)\}$ ;

(2) 根据分数阶傅里叶域准确重建滤波器组的实际设计要求, 构造函数  $\tilde{C}_l(\omega_p)$ , 并由式(21a)确定分数阶傅里叶域滤波器中的分析滤波器  $\{\tilde{H}_{l,p}(\omega_p)\}$ ;

(3) 对  $\{\tilde{H}_{l,p}(\omega_p)\}$  进行相应分数阶傅里叶域 I 型多相分解, 得到  $\tilde{H}_l(\omega_p)$  的第  $k$  个 I 型多相分量  $\tilde{E}'_{lk,p}(M\omega_p)$ , 并通过式(17a)得到修正因子  $\tilde{C}_{lk}(\omega_p)$ ;

(4) 确定分数阶傅里叶域综合滤波器  $\tilde{G}_{l,p}(\omega_p)$  第  $k$  个 II 型多相分量  $\tilde{R}'_{kl,p}(M\omega_p)$  的修正因子  $\tilde{D}_{lk}(\omega_p)$ ;

(5) 由式(17b)得到  $\tilde{G}_{l,p}(\omega_p)$  第  $k$  个 II 型多相分量  $\tilde{R}_{kl,p}(M\omega_p)$ ;

(6) 根据信号在分数阶傅里叶域的 II 型多相结构表达式得到分数阶傅里叶域综合滤波器组  $\{\tilde{G}_{l,p}(\omega_p)\}$ .

由以上步骤设计的分数阶傅里叶域滤波器组具有和由  $\{\tilde{H}_l(\omega_p)\}$  和  $\{\tilde{G}_l(\omega_p)\}$  构成的傅里叶域滤波器组相同的准确重建特性.

#### 4 仿真实验

在本节中, 将利用现在已有的傅里叶域  $M$  通道准确重建滤波器组, 通过文中定理 1 设计满足不同条件的分数阶傅里叶域滤波器组. 在以下仿真中, 使用的是 Soo Chang Pei 在 2000 年提出的离散分数阶傅里叶变换算法<sup>[18]</sup>, 并对分数阶傅里叶变换系数作了归一化处理

$$(1) C(\omega_p) = D(\omega_p) = 1$$

这是一类形式最简单的分数阶傅里叶域准确重建滤波器组, 在本仿真实验中, 傅里叶域滤波器组分析滤波器  $h(n)$  采用文献[17]表 II 中的三通道最大抽取滤波器组. 设该滤波器在时域的采样间隔为  $\Delta t = 1$ , 由式(20a)和式(20b)可以得出  $p = 1/2$  阶分数阶傅里叶域

准确重建滤波器组分析滤波器组和综合滤波器组的时域冲激响应序列。图 2(a)、图 2(b) 分别为傅里叶域准确重建滤波器组和分数阶傅里叶域准确重建滤波器组误差传递函数。

$$\tilde{T}_p(\omega_p) = |\tilde{H}_{0,p}(\omega_p)|^2 + |\tilde{H}_{1,p}(\omega_p)|^2 + |\tilde{H}_{2,p}(\omega_p)|^2$$

的对数幅频特性，其中纵坐标单位为 dB，横坐标为分数阶傅里叶域数字频率轴。通过仿真实验可以发现，该分数阶傅里叶域三通道最大抽取滤波器组与对应的傅里叶域准确重建滤波器组准确重建特性相同。

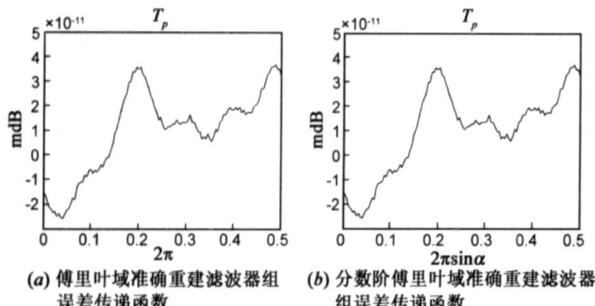


图2

### (2) 分数阶傅里叶域复数调制滤波器组

与傅里叶域复数调制滤波器组类似，在分数阶傅里叶域通过对低通原型滤波器的复数调制得到分数阶傅里叶域带通滤波器和高通滤波器。如文献[13]中所述，基于分数阶傅里叶变换 OFDM 系统的调制解调滤波器组为分数阶傅里叶域复数调制滤波器组，调制滤波器组中第  $l$  路滤波器与原型滤波器的关系为

$$h_{l,p}(n) = h_{0,p}(n) \exp\left[j \frac{2\pi}{M} nl + j \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi l \sin \alpha}{M \Delta t} \right)^2 \cot \alpha\right] \quad (22)$$

其中  $M$  为滤波器组通道总数。由式(22)可以发现，傅里叶域 DFT 滤波器组实际上为分数阶傅里叶域复数调制滤波器组当  $\alpha = \pi/2$  时的特例。因此，在本仿真实验中，采用文献[19]中的傅里叶域 DFT 滤波器组设计分数阶傅里叶域复数调制滤波器组。

假设采用的 DFT 滤波器组分析滤波器组为  $\{h_l(n)\}$ 、综合滤波器组为  $\{g_l(n)\}$ ， $p$  阶分数阶傅里叶域复数调制滤波器组中分析滤波器组如式(22)所示，那么由式(21a)及信号在分数阶傅里叶域的多相分量表达式，可以得到分析滤波器组修正因子为

$$\tilde{C}_l(\omega_p) = \tilde{C}_{lk}(\omega_p) = \exp\left[j \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi l \sin \alpha}{M \Delta t} \right)^2 \cot \alpha\right] \quad (23)$$

因此，由式(19a)及离散时间分数阶傅里叶变换的定义， $p$  阶分数阶傅里叶域复数调制滤波器组第  $l$  路分析滤波器为

$$h_{l,p}(n) = h_l(n) \times$$

$$\exp\left[-j \cdot \frac{1}{2} \left( n \Delta t \right)^2 \cot \alpha + j \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi l \sin \alpha}{M \Delta t} \right)^2 \cot \alpha\right] \quad (24)$$

由分析滤波器修正因子和综合滤波器组修正因子的对应关系可知，对应综合滤波器组的修正因子  $\tilde{D}_l(\omega_p)$  及  $\tilde{D}_{lk}(\omega_p)$  为

$$\tilde{D}_l(\omega_p) = \tilde{D}_{lk}(\omega_p) = \exp\left[-j \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi l \sin \alpha}{M \Delta t} \right)^2 \cot \alpha\right] \quad (25)$$

因此， $p$  阶分数阶傅里叶域复数调制滤波器组第  $l$  路综合滤波器为

$$g_{l,p}(n) = g_l(n) \times \exp\left[-j \cdot \frac{1}{2} \left( n \Delta t \right)^2 \cot \alpha - j \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi l \sin \alpha}{M \Delta t} \right)^2 \cot \alpha\right] \quad (26)$$

在本仿真实验中，假设滤波器长度为  $N = 255$ ，时域采样间隔为  $\Delta t = 1$ 。由式(24)和(26)可以得到  $p = 1/3$  阶分数阶傅里叶域复数调制滤波器组分析滤波器和综合滤波器组的时域冲激响应。图 3(a)、图 3(b) 分别为傅里叶域 DFT 滤波器组和分数阶傅里叶域复数调制滤波器组的误差传递函数。其中纵坐标单位为 dB，横坐标为分数阶傅里叶域数字频率轴。通过仿真实验可以发现，由式(24)和(26)生成的  $p$  阶分数阶傅里叶域复数调制滤波器组具有和对应傅里叶域 DFT 滤波器组相同的准确重建特性。

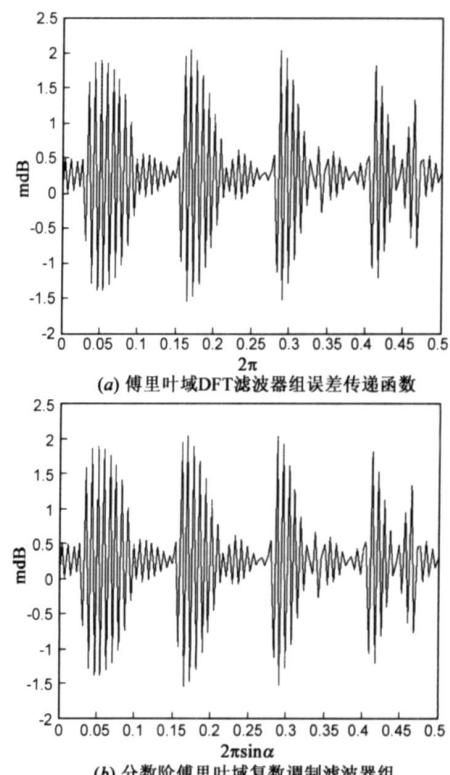


图3

### 5 结论

本文从分数阶傅里叶域信号抽样率转换理论和信号在分数阶傅里叶域的多相结构出发，推导出了分数阶傅里叶域复数调制滤波器组的时域冲激响应。

阶傅里叶域准确重建滤波器组的一般化设计方法。该方法可以利用傅里叶域滤波器组设计满足不同实际工程需求的分数阶傅里叶域准确重建滤波器组，弥补了此前分数阶傅里叶域准确重建滤波器组设计形式过于一般化的缺点。本文所提出的结论完善了分数阶傅里叶域多抽样率滤波器组理论体系，为分数阶傅里叶域准确重建滤波器组的设计提供了一般化的方法，为分数阶傅里叶域滤波器组理论在实际工程中的推广应用奠定了理论基础。

## 参考文献：

- [1] 陶然, 齐林, 王越. 分数阶 Fourier 变换的原理与应用 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2004. 23–49.
- [2] Tao Ran, Deng Bing, Wang Yue. Research process of the fractional Fourier transform in signal processing [J]. Science in China: Series F, 2006, 49(1) : 1–25.
- [3] Almeida L B. The fractional Fourier transform and time frequency representations [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1994, 42(11) : 3084–3091.
- [4] Qi Lin, Tao Ran, Zhou Siyong, et al. Detection and parameter estimation of multicomponent LFM signal based on the fractional Fourier transform [J]. Science in China: Ser F, 2004, 47(2) : 184–198.
- [5] Kutay M A, Ozaktas H M, et al. Optimal filtering in fractional Fourier domains [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1997, 45(5) : 1129–1143.
- [6] Ozaktas H M, Barshan B, et al. Convolution, filtering, and multiplexing in fractional Fourier domains and their relation to chirp and wavelet transforms [J]. Journal of the Optical Society America A, 1994, 11(2) : 547–559.
- [7] Maron M. A multicarrier system based on the fractional Fourier transform for time frequency selective channels [J]. IEEE Transactions on Communications, 2001, 49(6) : 1011–1020.
- [8] Vaidyanathan P P. Multirate digital filters, filter banks, polyphase networks, and applications: A tutorial [J]. Proceedings of the IEEE, 1990, 78(1) : 56–93.
- [9] Vaidyanathan P P. Multirate Systems and Filter Banks [M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1993.
- [10] Meng Xiang yi, Tao Ran, Wang Yue. Fractional Fourier domain analysis of decimation and interpolation [J]. Science in China: Series F, 2007, 50(4) : 521–538.
- [11] 孟祥意, 陶然, 王越. 分数阶傅里叶域两通道滤波器组 [J]. 电子学报, 2008, 36(5) : 919–926.
- Meng Xiang yi, Tao Ran, Wang Yue. Fractional Fourier domain analysis of two channel filter banks [J]. Acta Electronica Sinica, 2008, 36(5) : 919–926. (in Chinese)
- [12] 孟祥意, 陶然, 王越. 分数阶 Fourier 域 M 通道滤波器组 [J]. 自然科学进展, 2008, 18(2) : 186–196.
- [13] Meng Xiang yi, Tao Ran, Wang Yue. Fractional Fourier domain analysis of cyclic multirate signal processing [J]. Science in China: Series E, 2008, 51(6) : 803–819.
- [14] Tao R, Deng B, Zhang W Q, et al. Sampling and sampling rate conversion of band limited signals in the fractional Fourier domain [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008, 56(1) : 158–171.
- [15] Erseghe T, Kraniauskas P, Cariolaro G. Unified fractional Fourier transform and sampling theorem [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1999, 47(12) : 3419–3423.
- [16] Zayed A I. A convolution and product theorem for the fractional Fourier transform [J]. IEEE Signal Processing Letters, 1998, 5(4) : 101–103.
- [17] Vaidyanathan P P. Theory and design of M channel maximally decimated quadrature mirror filters with arbitrary M, having perfect reconstruction property [J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1987, 35(4) : 476–492.
- [18] Pei S C, Ding J J. Closed form discrete fractional and affine Fourier transforms [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2000, 48(5) : 1338–1353.
- [19] Fliege N J. Closed form design of prototype filters for linear phase DFT polyphase filter banks [A]. IEEE International Symposium on Circuits and Systems, 1993 (ISCAS'93) [C]. Florida: CRC Press, 1993. 651–654.

## 作者简介:



孟祥意 男, 1983 年 8 月生于北京, 2005 年 6 月毕业于中国传媒大学(原北京广播学院)电子信息工程系广播技术专业, 获工学学士学位, 2005 年 9 月起在北京理工大学电子工程系硕博连读, 主要研究方向为现代信号处理理论及其在通信信号处理、数字水印中的应用。  
E-mail: mxy0827@bit.edu.cn; mxy0827@hotmail.com



陶然 男, 1964 年 11 月生于安徽南陵, 1993 年于哈尔滨工业大学获博士学位, 中国电子学会会士、理事会理事、青年与志愿者工作委员会副主任、无线电定位技术分会副主任, 国防科工委基础科研“十一五”规划探测、信息与控制专家组成员, 总装某重大项目专家委员会成员, 某 973 项目总体组成员, 某国家自然科学基金重大项目学术领导小组成员, 中国博士后科学基金评审专家, Senior Member of the IEEE.  
E-mail: rantaotao@bit.edu.cn