

# 相参脉冲信号频率估计算法研究

张刚兵, 刘 渝, 邓振淼

(南京航空航天大学信息科学与技术学院, 江苏南京 210016)

**摘 要:** 给出了一种适用于相参脉冲串的频率估计算法, 通过脉内相关积累, 提高了信噪比. 分析了本算法实现相参频率估计的条件, 推导了相应的信噪比门限的解析表达式, 指出了信噪比门限与信号样本总数、占空比之间的关系. 仿真结果表明: 上述结论是正确的, 在满足信噪比门限条件下, 频率估计的精度接近相参脉冲串频率估计的克拉美-罗限.

**关键词:** 相参脉冲串; 频率估计; 信噪比门限

**中图分类号:** TN911.23

**文献标识码:** A

**文章编号:** 0372-2112 (2009) 09-2058-04

## Frequency Estimation for Coherent Pulse Train

ZHANG Gang-bing, LIU Yu, DENG Zhen-miao

(College of Information Science and Technology, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, Jiangsu 210016, China)

**Abstract:** A high accurate frequency estimation algorithm of coherent pulse train (CPT) was presented. The output signal to noise ratio (SNR) was enhanced through intrapulse correlation accumulation. The requirement for coherent frequency estimation was analyzed and the close form of the input SNR threshold was derived. Subsequently, we investigated the relationship of the SNR threshold, the total number of samples and the duty cycle. Simulation results show that the performance of the proposed algorithm approaches the Cramer Rao lower bound of the coherent sinusoidal pulse train when the SNR is higher than the SNR threshold.

**Key words:** coherent pulse train; frequency estimation; signal to noise ratio threshold

### 1 引言

利用差分多普勒(Differential Doppler)可以对辐射源进行无源定位, 其定位速度与精度优于传统的测向定位方法<sup>[1]</sup>. 在无源定位中, 多普勒频率的估计精度通常要精确到赫兹数量级甚至更低<sup>[2]</sup>, 因此高精度的频率估计是实现这一类无源定位的关键技术. 文[3]在高信噪比条件下将接收噪声等效为相位噪声, 利用线性回归估计正弦波的频率, 其方差接近克拉美-罗限(Cramer Rao Lower Bound, CRLB), 文[4]提出了相位平均和加权平均的正弦波频率估计算法. 文[3, 4]都是对单脉冲估计频率, 由单脉冲频率估计的克拉美-罗限<sup>[5]</sup>知, 实现高精度频率估计要求高信噪比或大脉宽, 其实质是要求被处理信号的能量足够大, 但实际应用中这些条件难以满足.

近二十年来多位学者研究利用相参雷达脉冲串实现高精度频率估计<sup>[2, 6-9]</sup>. 文[2]给出了相参脉冲串(Coherent Pulse Train, CPT)频率估计的CRLB, 该公式表明频率估计的均方根误差与被处理脉冲串的观测时间成反

比. 利用相参信息实质是扩大了信号的时间孔径, 即脉冲串的空隙也能为改善频率估计的精度作出贡献. 文[6]针对CPT提出了基于卡方检测的频率估计算法, 该算法的性能与克拉美-罗限相差甚远<sup>[7]</sup>. 文[8]先对各单脉冲进行非相参估计, 然后在一定范围内进行搜索去频率模糊, 其估计精度和收敛速度取决于搜索的步长. 文[9]提出了一种适用于CPT的多级频率估计算法, 在高信噪比条件下的估计性能接近CRLB, 模型近似成立的信噪比阈值为10dB.

本文先估计单脉冲的频率, 以多个单脉冲频率估计值的均值作为参考, 将相参脉冲串下变频至基带, 在脉内对基带信号求和可得到一个正弦波. 利用该正弦波频率的估计值修正参考频率就能获得CPT频率的高精度估计. 根据实现CPT频率估计的条件推导了本算法的信噪比门限, 它与信号总样本数和占空比平方的乘积成反比, 因此被处理信号的瞬时信噪比可能远低于10dB. 在满足信噪比门限条件下, 本算法频率估计的精度接近CPT频率估计的克拉美-罗限.

## 2 相参脉冲串数学模型和克拉美-罗限(CRLB)<sup>[2]</sup>

对辐射源发射的 CPT 中频信号进行采样可得到

$x(n+Kp) = A_p \exp[j\varphi_0 + 2\pi f(n+Kp)t_s] + \varepsilon(n+Kp)$   
 $n = 0, 1, \dots, N-1, p = 0, 1, \dots, P-1$  (1)  
 $A_p$  为第  $p$  个脉冲的幅度,  $\varphi_0$  为恒定的初始相位,  $f$  为信号的频率,  $K$  为脉冲重复周期  $T_r$  内的采样点数,  $t_s$  为采样间隔,  $N$  为脉宽  $T_p$  内的信号样本数,  $P$  为脉冲个数.  $\varepsilon$  是均值为 0、方差为  $\sigma^2$  的复高斯白噪声.

文献[2]给出了正弦 CPT 频率估计的 CRLB

$$\text{var}(f) \geq \frac{6\sigma^2}{(2\pi t_s)^2 NB[N^2 - 1 + 12(D/B - C^2/B^2)]} \quad (2)$$

其中  $B = \sum_{p=0}^{P-1} A_p^2$ ,  $C = \sum_{p=0}^{P-1} Kp A_p^2$ ,  $D = \sum_{p=0}^{P-1} K^2 p^2 A_p^2$ .

当信号为单一重复频率、幅度不变的正弦 CPT 时, 式(2)变为<sup>[2]</sup>

$$\text{var}(f) \geq \frac{6}{(2\pi t_s)^2 \text{SNR}_{\text{in}} [N^2 - 1 + K^2(P^2 - 1)]P} \approx \frac{6}{(2\pi)^2 T^2 \text{SNR}_{\text{in}} P N} \quad (3)$$

其中  $\text{SNR}_{\text{in}}$  为输入信噪比, 定义为  $\text{SNR}_{\text{in}} = A^2/\sigma^2$ ,  $T = PKt_s = PT_r$  为观测时间.

式(3)表明 CPT 频率估计的精度与整个观测时间有关, 即各脉冲之间的空隙也能对频率估计的精度有贡献.

## 3 利用相参信息进行频率估计

对式(1)定义的 CPT 采样序列  $x(n+Kp)$ , 假定利用非相参方法已得到信号频率  $f$  的初估计值  $\hat{f}_0$ , 现构造序列

$$y(n+Kp) = \exp[-j2\pi\hat{f}_0(n+Kp)t_s] \quad n = 0, 1, \dots, N-1, p = 0, 1, \dots, P-1 \quad (4)$$

将式(1)和式(4)相乘

$$z(n+Kp) = x(n+Kp)y(n+Kp) = A \exp[j\varphi_0 + 2\pi\Delta f_0(n+Kp)t_s] + \varepsilon'(n+Kp) \quad (5)$$

$\varepsilon'$  是均值为 0、方差为  $\sigma^2$  的复高斯白噪声,  $\Delta f_0 = f - \hat{f}_0$  为初估计  $\hat{f}_0$  的误差.

对  $z(n+Kp)$  中第  $p$  个脉冲的序列求和, 得

$$S(p) = A' \exp[j(2\pi\Delta f_0 p T_r + \varphi_0)] + \varepsilon''(p) \quad (6)$$

其中:  $A' = A \sin(\pi\Delta f_0 N t_s) / \sin(\pi\Delta f_0 t_s)$ ,

$$\varphi_0 = \varphi_0 + \pi\Delta f_0(N-1)t_s,$$

$$T_r = Kt_s, \quad \varepsilon''(p) = \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon'(n+Kp).$$

观察式(6),  $\{S(p)\}$  是一个频率为  $\Delta f_0$ 、采样间隔为脉冲重复周期  $T_r$  的  $P$  点正弦波序列. 对  $\{S(p)\}$  进行频

率估计可得到频偏  $\Delta f_0$  的估计值  $\hat{\Delta f}_0$ . 式(6)中的噪声项是均值为 0、方差为  $N\sigma^2$  的高斯过程, 而信号项的幅度  $A'$  与频偏  $\Delta f_0$  有关. 考虑利用基于离散傅里叶变换(DFT)的准最佳方法对载频  $f$  作非相参估计, 首先对  $P$  个脉冲信号分别进行频率估计, 然后对  $P$  个频率估计值作算术平均, 得到  $\hat{f}_0$ . 当输入信噪比  $\text{SNR}_{\text{in}} = A^2/\sigma^2$  不太小并且脉冲个数  $P$  较大时,  $\Delta f_0 \ll 1/(Nt_s)$ , 则  $A' \approx NA$ , 所以序列  $\{S(p)\}$  的信噪比  $\text{SNR}_{\text{out}} \approx NA^2/\sigma^2$ . 信号  $\{S(p)\}$  的持续时间为  $T = PT_r$ , 它的量化频率等于  $1/T$ . 假如  $T$  为 0.01s 量级, 那么量化频率在几十赫兹量级. 经过相关积累后,  $\{S(p)\}$  的信噪比有  $N$  倍的增益, 采用准最佳频率估计算法对频偏  $\Delta f_0$  进行估计, 误差达到赫兹量级或者更小是可能的.  $\{S(p)\}$  是采样间隔为  $T_r$  的复正弦波序列, 根据奈奎斯特采样定理, 能对  $\{S(p)\}$  进行无模糊频率估计的条件是

$$|\Delta f_0| < 1/(2T_r) \quad (7)$$

文献[10]给出了一次牛顿迭代估计正弦波信号的频率估计算法, 在整个频段上的性能接近 CRLB. 本文先用 MRife 算法对各脉冲作非相参频率估计, 然后用文献[10]中的算法估计序列  $\{S(p)\}$  的频偏  $\Delta f_0$ .

综合以上分析, 本算法的实现步骤为:

(1) 用 MRife 算法对  $P$  个脉冲分别进行频率估计, 得到  $\hat{f}_p, p = 0, 1, \dots, P-1$ ;

(2) 对  $\hat{f}_p$  求算术平均得到频率的初始估计值

$$\hat{f}_0 = \sum_{p=0}^{P-1} \hat{f}_p / P;$$

(3) 按照式(4)、(5)、(6) 得到序列  $\{S(p)\}, p = 0, 1, \dots, P-1$ ;

(4) 利用文献[10]的算法对  $\{S(p)\}$  进行载频估计, 得到频偏  $\Delta f_0$  的估计值  $\hat{\Delta f}_0$ ;

(5) 用频偏  $\Delta f_0$  的估计值  $\hat{\Delta f}_0$  得到频率估计值  $\hat{f} = \hat{f}_0 + \hat{\Delta f}_0$ .

## 4 信噪比门限和性能分析

现对本算法进行定量分析.

单脉冲正弦波信号频率估计  $\hat{f}_p$  的 CRLB<sup>[5]</sup> 为

$$\text{var}(\hat{f}_p) \geq \frac{6\sigma^2}{(2\pi t_s)^2 N(N-1)A^2} \approx \frac{6}{(2\pi)^2 T_p^2 \text{SNR}_{\text{in}} N} \quad (8)$$

$T_p = Nt_s$  是单脉冲宽度. 对  $P$  个频率估计值作算术平均, 得到的频率估计值  $\hat{f}_0$  的克拉美-罗限为

$$\text{var}(\hat{f}_0) = \frac{1}{P} \text{var}(\hat{f}_p) \geq \frac{6}{(2\pi)^2 T_p^2 \text{SNR}_{\text{in}} P N} \quad (9)$$

在常规信噪比条件下, MRife 算法的均方根误差约为 1.1 倍 CRLB<sup>[10]</sup>. 初始估计误差  $\Delta f_0$  是随机变量, 以很大概率分布在其 3 倍均方根误差范围之内. 式(7) 是对

CPT 的频率作高精度估计的条件, 因此采用 MRife 算法估计单脉冲  $\{S(p)\}$  的频率时, 能以较大概率无模糊估计频率的条件是

$$3 \times 1.1 \times \sqrt{\frac{6}{(2\pi)^2 T_p^2 \text{SNR}_{\text{in}} PN}} < \frac{1}{2T_r} \quad (10)$$

化简式(10)得

$$\text{SNR}_{\text{in}} > \frac{65.34}{\pi^2 PN} \left( \frac{T_r}{T_p} \right)^2 \quad (11)$$

$T_p/T_r$  是占空比,  $PN$  是脉冲信号的总样本点数。

$\{S(p)\}$  是一个信噪比为  $\text{SNR}_{\text{out}}$ 、采样间隔为  $T_r$  的  $P$  点正弦波序列,  $\{S(p)\}$  的频率估计的 CRLB 为

$$\text{var}(\hat{\Delta f}_0) \geq \frac{6}{(2\pi T_r)^2 P(P^2 - 1) \text{SNR}_{\text{out}}} \approx \frac{6}{(2\pi)^2 T^2 \text{SNR}_{\text{in}} PN} \quad (12)$$

由式(12)定义的 CRLB 与式(3)一样, 就是 CPT 频率估计的 CRLB。因此, 当测量信号的信噪比满足式(11)时, 本算法能以较大概率对 CPT 进行频率精确估计, 其精度接近 CPT 频率估计的 CRLB。

信噪比门限与信号总样本数和占空比平方的乘积成反比, 因此本算法与传统的相位展开法相比, 不受瞬时信噪比远大于 1 的限制, 在较低信噪比条件下也可能实现 CPT 的频率精确估计。

## 5 相参相位编码信号的频率估计

相位编码信号是一种常用的脉压信号, 对  $M$  相调制信号进行  $M$  次方运算可把它变换成正弦波信号, 于是相参相位编码信号变成了相参正弦波信号, 利用本文上述算法可对信号载频进行频率精确估计。  $M$  次方运算将导致信噪比下降, 但通常相位编码信号的脉冲宽度较大, 单脉冲的频率估计精度较高, 在占空比较大的情况下, 信噪比门限也可能较低。因此仍然可在较低信噪比条件下对 BPSK CPT 的载频实现精确估计, 但 BPSK CPT 信号的信噪比门限将比相同条件下的正弦 CPT 信号高 6dB 以上。

## 6 仿真分析

当信号为正弦 CPT 时, 为验证本算法的有效性和式(11)的正确性, 对其性能进行了仿真。设采样频率为  $f_s = 100\text{MHz}$ , 信号频率为  $f = 21.74678\text{MHz}$ , 给出两种仿真条件, 观测时间  $T = 0.012\text{s}$ 。

①重频 PRF = 20kHz, 脉宽  $T_p = 0.25\mu\text{s}$ ; ②重频 PRF = 40kHz, 脉宽  $T_p = 0.5\mu\text{s}$ 。

按以上参数对本算法和多级估计法<sup>[9]</sup>的性能进行仿真, 给出了两种算法在两种条件下的性能对比, 每种条件下各进行 300 次独立的仿真。根据第 4 节的式(11), 本算法在上述两种条件下的信噪比门限分别为

16.4dB 和 -1.6dB。对上述两种情况进行仿真, 估计的性能曲线如图 1 所示。图中给出了本算法、多级估计法性能的门方根误差及 CRLB, 图中横轴为线性坐标, 纵轴为对数坐标。

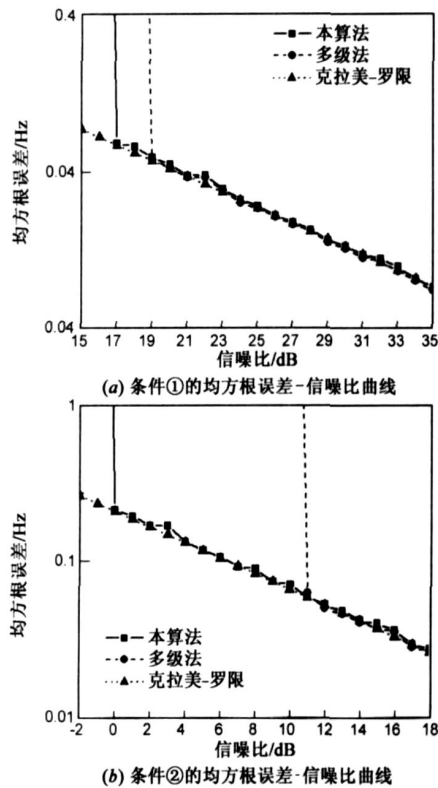


图1 正弦CPT的性能曲线

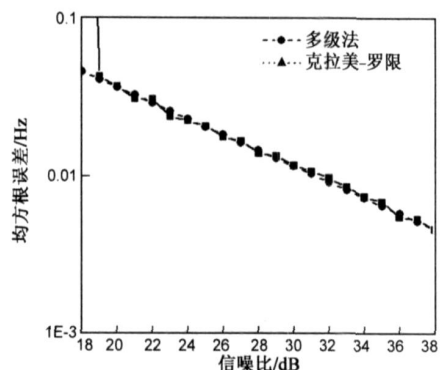
图 1 的仿真结果表明, 本算法具有低于多级频率估计法的信噪比门限, 能在比后者低的信噪比条件下实现相参频率估计。在满足信噪比门限条件下, 本算法的性能接近克拉美-罗限, 验证了本算法的有效性。图 1 中(b)的信噪比门限高于式(11), 这种现象是由于较低信噪比条件下单脉冲的频率估计精度无法接近 CRLB 造成的。对于多级频率估计法, 在信噪比低于 10dB 时, 所使用的模型失效。

当信号为 BPSK CPT 时, 仿真的采样频率为  $f_s = 100\text{MHz}$ , 中频信号的频率为  $f = 21.74678\text{MHz}$ , 观测时间为  $T = 0.012\text{s}$ , 编码序列为 13 位巴克码(Barker), 分别给定仿真条件:

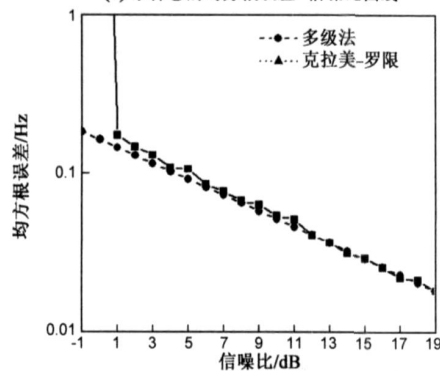
①重频 PRF = 2kHz, 脉宽  $T_p = 3.25\mu\text{s}$ ; ②重频 PRF = 5kHz, 脉宽  $T_p = 6.5\mu\text{s}$ 。

根据第 4 节的式(11), 在上述两种条件下, 正弦 CPT 的信噪比门限分别为 13.0dB 和 -7.9dB。由于 BPSK 信号平方后信噪比会损失 6dB 以上, 因此, BPSK CPT 信号的信噪比门限应在上述门限基础上增加 6dB, 它们分别为 19.0dB 和 -1.9dB。上述两种情况仿真的性能曲线如图 2 所示, 图中给出了本算法的均方根误差曲线以及

相同条件下正弦 CPT 对应的 CRLB, 图中横轴为线性坐标, 纵轴为对数坐标



(a) 条件①的均方根误差-信噪比曲线



(b) 条件②的均方根误差-信噪比曲线

图2 BPSK CPT性能曲线

图2的仿真结果表明, 在满足信噪比门限条件下, 本算法的性能接近 CRLB, 验证了本算法的有效性以及式(11)的正确性。

## 7 结论

本文分析了实现相参脉冲串频率精估计的条件, 根据该条件推导了本算法适用的信噪比门限。在满足信噪比门限条件下, 频率估计的性能接近 CRLB。本算法可以在较低信噪比条件下实现相参脉冲串频率精确估计, 有助于增加无源定位的作用距离。

## 参考文献:

- [1] Torrieri D J. Statistical theory of passive location systems[J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems, 1984, 20(2): 183-198.
- [2] Howard S D, Lavoie P. Analysis of SNR threshold for differential Doppler frequency measurement in digital receivers[A]. 2000 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing[C]. NJ, USA: IEEE, 2000. 289-292.
- [3] Tretter S. Estimating the frequency of a noisy sinusoid by linear regression[J]. IEEE Trans on Information Theory, 1985, 31(6): 832-835.
- [4] Kay S M. A fast and accurate single frequency estimator[J]. IEEE Trans on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1989, 37(12): 1987-1990.
- [5] Rife D C, Boorstyn R R. Single tone parameter estimation from discrete time observations[J]. IEEE Trans on Information Theory, 1974, 20(5): 591-598.
- [6] Becker K. New algorithm for frequency estimation from short coherent pulses of a sinusoidal signal[J]. IEE Proceedings, 1990, 137(4): 283-288.
- [7] Johnson J A, Fowler M L. Cramer-Rao lower bound on Doppler frequency of coherent pulse trains[A]. 2008 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, ICASSP[C]. NJ, USA: Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc, 2008. 2557-2560.
- [8] Gai J, Chan F, Chan Y T. Frequency estimation of uncooperative coherent pulse radars[A]. Military Communications Conference, MILCOM 2007[C]. NJ, USA: Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc, 2007. 3323-3329.
- [9] 龚享钺, 周良柱. 一种关于相参脉冲信号频率的最优估计算法[J]. 电子与信息学报, 2004, 26(10): 1594-1600. GONG Xiang yi, ZHOU Liang zhu. Frequency estimation from coherent pulses[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2004, 26(10): 1594-1600. (in Chinese)
- [10] 邓振淼, 刘渝. 正弦波频率估计的牛顿迭代方法初始值研究[J]. 电子学报, 2007, 35(1): 104-107. DENG Zhen miao, LIU Yu. The starting point problem of sinusoid frequency estimation based on Newton's method[J]. Acta Electronica Sinica, 2007, 35(1): 104-107. (in Chinese)

## 作者简介:



张刚兵 男, 1978年11月生于湖北省仙桃市, 现为南京航空航天大学博士研究生。主要研究方向为信号处理, 信号检测与估计, 电子侦察。  
E-mail: caeppub@sohu.com



刘渝 男, 博士生导师, 1945年6月生于重庆市。1968年和1981年在中国科学技术大学获工学学士和工学硕士学位, 现为南京航空航天大学教授, 博士生导师。主要研究方向为信号处理, 信号检测与估计, 电子侦察和电子智能化系统。  
E-mail: liuyu\_nuaa@yahoo.com.cn