

# 基于不变分布的开关变换器混沌 PWM 特性分析及频谱优化设计

杨 汝<sup>1,2</sup>, 张 波<sup>2</sup>

(1. 广州大学物理与电子工程学院, 广东广州 510400; 2. 华南理工大学电力学院, 广东广州 510640)

**摘 要:** 本文利用统计分析工具, 采用不变分布作为新的参数指标来研究混沌 PWM, 调制开关变换器的动态行为, 基于不变分布分析了混沌开关变换器 PWM 驱动脉冲的频率特性, 量化分析得到其特征参数和频谱特征. 研究表明初值敏感不影响混沌开关变换器的电流、电压、驱动脉冲的分布, 不影响频谱的形状, 所以研究不变分布从而提取混沌开关变换器的整体特征是研究混沌开关变换器的有效手段, 并且可以由此优化设计频谱有效抑制 EMI.

**关键词:** 开关变换器; 不变分布; 混沌频谱; 电磁辐射

**中图分类号:** TM219, TM17 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2007) 11-2150-06

## Spectrum Characteristics and Spectrum Optimizing Design of Chaotic PWM Based on Invariable Distribution

YANG Ru<sup>1,2</sup>, ZHANG Bo<sup>2</sup>

(1. School of Physics and Electronic Engineering, Guangzhou University, Guangzhou, Guangdong 510400, China;

2. Electric Power College, South China University of Technology, Guangzhou, Guangdong 510640, China)

**Abstract:** The article has studied the dynamic behavior of the chaotic PWM based on statistical tool and invariable distribution. The frequency characteristics of chaotic PWM have been analyzed based on the invariable distribution, characteristic parameters and spectrum characteristics are gained also. Simulation and experiment results show that the spectrum waveforms of drive pulse, switch voltage and inductance current have the same shape as the invariable distribution, so invariable distribution becomes a new effective method to abstract entail characteristics of chaotic converters, people can optimize the spectrum distribution of converter based on invariable distribution and get the best EMI suppressing effect.

**Key words:** switch converter; invariable distribution; chaotic spectrum; EMI

### 1 引言

近年来研究表明, 混沌开关变换器在一个有界的范围内呈现无穷多的工作点, 从而可以利用混沌理论实现开关变换器电磁频谱的连续化, 降低开关变换器的 EMI, 使得从根本上解决开关变换器的 EMI 问题成为可能<sup>[1~3]</sup>. 该研究目前已引起了学术界和企业界的极大兴趣, 并取得了一些实验结果<sup>[4~7]</sup>.

然而, 与开关变换器混沌相关的理论分析一直很缺乏, 困难在于混沌状态下开关变换器系统状态复杂, 常规的通过观察时域轨迹获取系统特征的方法作用很有限, 不能得到混沌态开关变换器的典型行为, 因此也不能得到系统的完整特征.

众所周知, 混沌态具有初值敏感性, 不同的初值轨迹变化很大, 所以如果从时域的角度研究单一的轨迹把握不了混沌开关变换器的整体特征. 为了把握长时间演化后混沌开关变换器系统的典型行为, 必须发展新的研究工具, 新的指标参数.

应用从随机过程理论中发展而来的统计工具分析混沌开关频率, 量化混沌开关变换器的频谱就是这样一个新的分析工具. 混沌现象从时域看是不可预测的, 但是从统计的观点看混沌状态的概率密度是一定的<sup>[8]</sup>. 常见的 tent 映射、n-way Bernoulli 映射、Rényi 映射等分段仿射混沌映射<sup>[9]</sup>的概率密度是分段线性不变的, 因此又叫不变分布. 不变分布是研究混沌开关变换器的新的指标参数.

## 2 基于不变分布的混沌变换器开关频率特性分析

### 2.1 混沌调制开关频率的不变分布定义

混沌 PWM 驱动脉冲如图 1 所示,其中  $\tau_k$  为第  $k$  个混沌驱动脉冲的到达时间,  $T_k$  为第  $k$  和  $k-1$  个混沌驱动脉冲的时间间隔.混沌 PWM 的第  $k$  个驱动脉冲的频率为

$$f_{k+1} = f_s + \Delta f = k_1 v_s + k_2 M(x_k) \quad (1)$$

其中  $f_s$  为 PWM 基准开关频率,  $v_s$  是决定基准开关频率的固定电压;  $\Delta f$  为频率偏移,  $M(x_k)$  是混沌调制电压,  $k_2 M(x_k)$  决定了 PWM 频率偏移  $\Delta f$ ,  $k_1, k_2$  是压控系数.

如图 1 所示,混沌调制后 PWM 驱动脉冲的时域波形没有规律,但用统计工具分析混沌调制后开关频率的特性可以提取系统特征.

为了建立统计理论分析的框架,引入数学工具 PFO 算子 (Perron-Frobenius Operator).

**PFO 定义<sup>[10]</sup>** Lebesgue 可积函数  $\phi: X \mapsto \mathbb{C}$  构成  $L$  空间,  $L$  空间的范数为  $\|\cdot\| = \int_X |\cdot|$ ,  $A$  是  $X$  的  $\sigma$  代数子集,  $(X, A, \mu)$  构成一个测度空间,  $\mu$  是 Lebesgue 测度.

如果  $M$  是非奇异的映射,则算子 PFO 定义为

$$\begin{aligned} [P\phi](x) &= \frac{d}{dx} \int_{M^{-1}([0,x])} \phi(\xi) d\xi \\ &= \int_X \phi(\xi) \delta(\xi - M(x)) d\xi \end{aligned} \quad (2)$$

后一个等式是 Dirac 通用函数,例如在式(1)中混沌 tent 映射调制的 PWM 驱动脉冲频率的 PFO 为

$$[P\phi](x) = \frac{d}{dx} \left( \int_0^{f/2} \phi(\xi) d\xi + \int_{f_{\max}-f/2}^{f_{\max}} \phi(\xi) d\xi \right) \quad (3)$$

n-way Bernoulli 映射调制的驱动脉冲频率的 PFO 为

$$[P\phi](x) = \frac{d}{dx} \left( \sum_{i=0}^{n-1} \int_{i/n}^{(f+i)/n} \phi(\xi) d\xi \right) \quad (4)$$

式(2)可以得出 PFO 由非奇异的混沌映射  $M$  决定,如果初始概率密度  $\rho_0$  决定的 PWM 初始频率值为  $f_0$ ,则  $k$  次演化后开关频率  $f_k$  的概率密度  $\rho_k$  为

$$\rho_k = P\rho_{k-1} = P^k\rho_0 \quad (5)$$

可以将式(5)看作是动态混沌 PWM 开关变换器系统的状态方程,因为式(5)的密度状态决定了式(1) PWM 驱动脉冲频率的分布状态.通过研究式(5)的密度演化来研究混沌系统特征的优点是式(5)是线性的;而且不同于时域波形它很有规律,呈现一种分段线性的特征<sup>[10]</sup>,因此又叫不变分布.

这个不变分布也是 PFO 的固定点,即  $P\bar{\rho} = \bar{\rho}$ .由 PFO 的定义式(2),只有测度  $d\bar{\mu} = \bar{\rho}dx$  是  $M$  下不变的,

才有  $P\bar{\rho} = \bar{\rho}$ ,所以相应  $\bar{\mu}$  是混沌 PWM 式(1)的不变测度.

因为不变分布的定义是基于  $M$  的,所以不同混沌信号调制的 PWM 驱动脉冲的不变分布  $\bar{\rho}$  决定于混沌 PWM 频率映射式(1).

由式(5)PFO 的表达式可以得到  $\lim_{k \rightarrow \infty} P^k\rho_0 = \bar{\rho} = 1$ ,即 tent 映射调制的 PWM 开关频率具有均一的分布. tent 映射调制的混沌 PWM 开关频率数值仿真的结果如图 2(a)所示,直方图反映了长时间演化后 PWM 频率状态的区域分布,从图中可以看到 tent 映射调制后开关频率的均一分布.

bended up-down 混沌映射调制 PWM 开关频率的数值仿真的结果如图 2(b)所示,可以看出分段线性分布特性;n-way Bernoulli 映射调制的混沌 PWM 开关频率值的数值仿真结果如图 2(c)所示,可以看到调制后的开关频率也具有均一的分布.图 2 数值仿真在不同的初始频率下得出的频率分布相同,既初值敏感不影响混沌调制开关频率的分布.

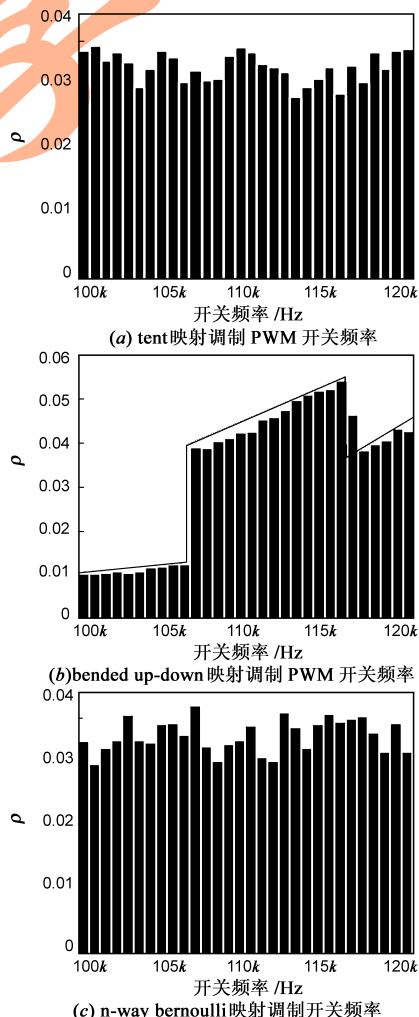


图 2 混沌映射调制的 PWM 开关频率的分布

## 2.2 混沌开关调制频率具有唯一不变分布条件

**定理 1**<sup>[10]</sup> 设测度空间  $(X, A, \mu)$ ,  $M$  是非奇异的变换,  $P$  是相应 PFO 的算子, 若  $M$  遍历, 则  $P$  最多只有一个不变分布  $\bar{\rho}$ ; 进一步如果  $P$  只有一个不变密度  $\bar{\rho}$ , 并且  $\bar{\rho} > 0$  处处成立, 则  $M$  是遍历的.

由以上定理可以得到混沌调制开关频率具有唯一不变分布的条件: 混沌 PWM 具有唯一不变分布的充分必要条件是开关频率映射式(1)的遍历性.

图 4 的混沌 PWM 开关频率数值仿真可以看出 tent 映射、n-way Bernoulli 映射、banded up-down 映射调制的混沌开关频率的遍历性, 此时开关变换器的混沌调制频率有唯一的不变分布.

**定理 2**<sup>[11]</sup> 对于概率空间  $(X, A, \mu)$ , 映射  $M: X \rightarrow X$  可测和遍历, 则对任意函数  $\phi \in L$ ,  $\phi$  沿  $M$  轨迹的平均值处处等于  $\phi$  在  $X$  上的数学期望  $E(\phi)$

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} \phi(M^k(x_0)) = \int_X \phi(x) \bar{\rho}(x) dx \quad (6)$$

由式(6), 已知混沌 PWM 的不变分布可以计算 Lyapunov 指数和熵; 反之, 已知混沌 PWM 的系统轨迹可以计算混沌调制开关频率的不变分布或不变测度.

## 3 线性分段仿射混沌映射调制 PWM 的不变分布

线性分段仿射混沌映射是很常见的一类混沌映射, tent 映射、n-way Bernoulli 映射、Rényi 映射等都是这类映射, 其通用表达式如下<sup>[12]</sup>:

$$M(x) = \{M_i(x) = a_i x + b_i, x \in J_i, i = 1, 2, \dots, m\} \\ \forall i: M: J_i \rightarrow x = (0, 1) \quad (7)$$

其状态如图 3 所示.

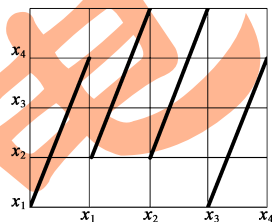


图 3 线性分段仿射混沌映射

线性分段仿射混沌映射调制的开关频率, 其表达式如下

$$f(x) = \left\{ \begin{aligned} &f_i(x) = f_0 + kM_i(x) = f_0 + k(a_i x + b_i) \\ &\forall i: M: J_i \rightarrow F = (f_0, f_{\max}) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

混沌 PWM  $\{T_1, \dots, T_k\}$  的特征函数为

$$\Theta_{T_1, \dots, T_k}(\omega_1, \dots, \omega_k) = E(\exp(j \sum_{i=1}^k \omega_i \cdot x_i)) \\ = \int_x \dots \int_x e^{j \sum_{i=1}^k \omega_i \cdot x_i} \rho_{T_1, \dots, T_k}(x_1, \dots, x_k) dx_1, \dots, dx_k \quad (9)$$

式(9)内部积分可以得到线性分段仿射混沌映射调制

的开关频率的递推方程<sup>[13]</sup>

$$\Theta_{T_1, \dots, T_k}(\omega_1, \dots, \omega_k) = \sum_{l=1}^m \frac{e^{-j(\omega_l b_l / a_l)}}{|\alpha_l|} \Theta_{T_1, \dots, T_{k-1}} \\ \times \left( \omega_2 + \frac{\omega_1}{\alpha_1}, \omega_3, \dots, \omega_k \right) \quad (10)$$

它的解为

$$\Theta_{T_k}(\omega) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}=1}^m \lambda_1(f, k) e^{-j \cdot \omega \lambda_2(f, k)} \Theta_1(\omega \lambda_3(f, k)) \quad (11)$$

这里

$$\Theta_1(\omega) = \int_F e^{j\omega f} p_T(f) df = \int_0^1 e^{j\omega f} df = (e^{j\omega} - 1) / j\omega$$

$$\text{且 } \lambda_1(f, k) = \prod_{n=1}^{k-1} \frac{1}{|\alpha_{i_n}|} \\ \lambda_2(f, k) = \sum_{n=1}^{k-1} \sum_{p=n}^{k-1} b_{i_p} \cdot \prod_{l=1}^p \frac{1}{|\alpha_{i_l}|} \\ \lambda_3(f, k) = \sum_{n=1}^{k-1} \prod_{p=n}^{k-1} \frac{1}{|\alpha_{i_p}|} + 1$$

特征函数  $\Theta_{T_k}(\omega)$  唯一确定了混沌 PWM 驱动脉冲间隔  $T_k$  的概率密度, 由式(11)反向 Fourier 变换, 有

$$\rho_{T_k}(x) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}=1}^m \frac{\lambda_1(f, k)}{\lambda_3(f, k)} [\text{sign}(x + \lambda_2(f, k)) \\ - \text{sign}(x + \lambda_2(f, k) - \lambda_3(x, k))]$$

因此线性分段仿射混沌映射调制的 PWM 驱动脉冲周期  $T_k$  的概率密度是一个分段常数, 而且有  $m^{k-1}$  段, 如图 7 所示.

当式(1)的混沌开关频率由 Rényi 映射调制

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) \\ = \alpha(1 - x_k \bmod 1) \quad (12)$$

则混沌混杂动态系统

中 PWM 驱动脉冲频率的表达式为

$$f_{n+1} = f_s + f_n = f_s + k\varphi(x, t) \quad (13)$$

Rényi 映射调制的混沌 PWM 驱动脉冲的叠代映射如图 5 所示, 可见这是一种典型的分段仿射混沌映射. Rényi 映射扩频后 PWM 驱动脉冲时间间隔  $T_k$  的不变分布如图 6 所示, 可以看出当  $k \rightarrow \infty$  时线性分段仿射混沌

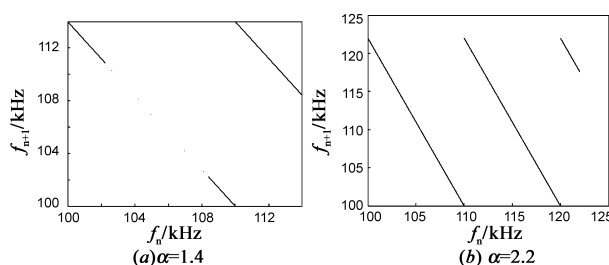


图 5 Rényi 映射调制的混沌 PWM 开关频率的映射

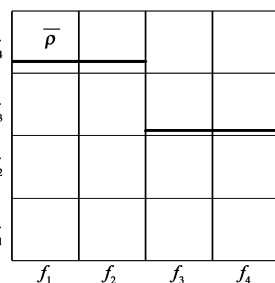


图 4 线性分段仿射混沌映射调制的驱动脉冲的不变分布

映射调制的开关频率趋向于分段均一分布,和频率的初始值无关。

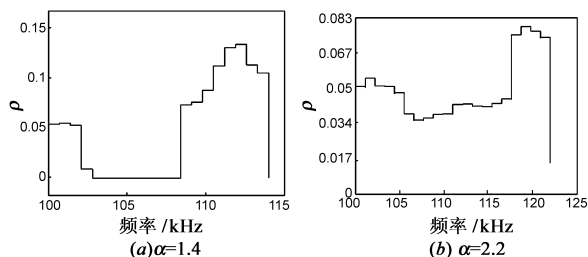


图 6 Rényi映射调制的 PWM 开关频率的不变分布

#### 4 基于不变分布的混沌变换器频谱优化设计

开关变换器驱动脉冲的频谱决定了变换器的频谱和变换器的 EMI 特性,为此根据前节研究,逆设计开关变换器的混沌频谱,以达到优化设计和最佳抑制其 EMI 的目的。

开关变换器混沌 PWM 调制后第  $k$  个驱动脉冲的周期为  $T_k$  ( $T_k = 1/f_k$ ),则驱动脉冲的频谱  $\xi(f)$  为<sup>[14]</sup>

$$\xi(f) \approx \frac{E[|G(f)|^2] + 2\text{Re}\left\{\frac{E[G(f)e^{j2\pi f T_k}]E[G^*(f)]}{1 - E[e^{j2\pi f T_k}]}\right\}}{E(T_k)} \quad (14)$$

其中

$$G(f) = A \int_0^{DT_k} e^{-j2\pi f t} dt = \frac{j}{2\pi f} (Ae^{-j2\pi f DT_k} - A)$$

$$E[|G(f)|^2] = \int_{T_1}^{T_2} \rho(T_k) G(f) G^*(f) d(T_k)$$

$$E[G(f)e^{j2\pi f T_k}] = \int_{T_1}^{T_2} \rho(T_k) G(f) e^{j2\pi f T_k} d(T_k)$$

$$E[|G^*(f)|] = \int_{T_1}^{T_2} \rho(T_k) G^*(f) d(T_k)$$

$$E[e^{j2\pi f T_k}] = \int_{T_1}^{T_2} \rho(T_k) e^{j2\pi f T_k} d(T_k)$$

$A$  为混沌 PWM 驱动脉冲的幅度,  $\rho(T_k)$  是第  $k$  个混沌 PWM 驱动脉冲频率的不变分布  $\bar{\rho}$ ,由文献[15]当慢调制时式(14)有

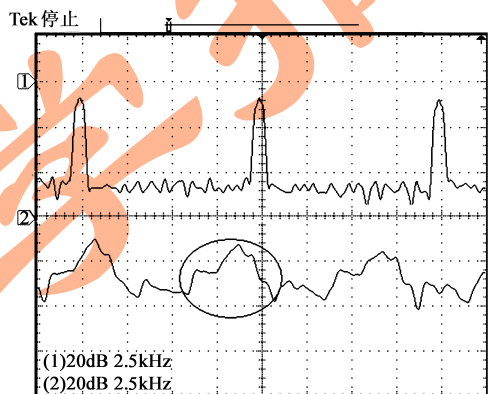
$$\lim_{m \rightarrow \infty} \xi(f) \propto \frac{1}{2\Delta f} \bar{\rho}\left(\frac{f}{\Delta f}\right) \quad (15)$$

即混沌扩频后 PWM 驱动脉冲的频谱和驱动脉冲的不变分布具有一致的形状。

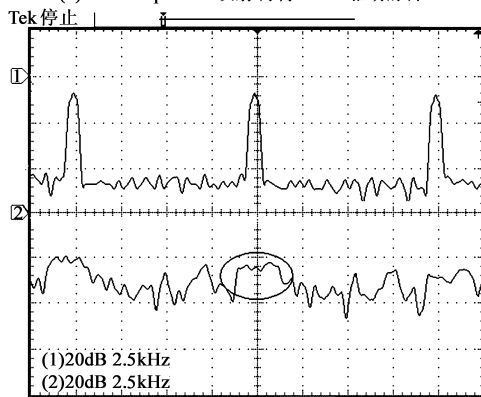
#### 5 实验结果与分析

在一台采用 SVPWM 控制策略的逆变器上进行了相关实验,主电路采用 500W 的集成功率模块(IPM) I-RAMS06UP60A,控制电路采用飞利浦嵌入式芯片 LPC2132 作为算法的主控部件。载波频率 10K,调制度 0.5,调制波频率 50Hz。频率调制范围为 0~20%。

PWM 驱动脉冲的实验波形如图 7 所示。图 7(a)、(b)的波形 1 是固定开关频率的频谱,可以看到频谱的离散,能量集中在开关频率倍数的频点,这就是开关电源 EMI 的源头。分别用 bended up-down map 和 tent 映射混沌调制开关频率得到的 PWM 开关频率频谱实验波形如图 7(a)、(b)的波形 2 所示,可以看到频谱能量的扩展,峰值降低,EMI 降低,重要的是调制后频谱的形状(如图中圆圈所示)和开关频率不变分布的形状(图 2(b)、(a))一致。因此根据不变分布可以得到一定分布的开关变换器频谱。而且 tent 映射混沌调制 PWM 驱动得到的频谱比 bended up-down map 映射混沌调制 PWM 驱动得到的频谱更为平滑,且峰值要小,可以预测 tent 映射调制比 bended up-down map 映射调制的 EMI 抑制效果要好。



(a) bended up-down 映射调制 PWM 驱动脉冲



(b) tent 映射调制 PWM 驱动脉冲

图 7 混沌调制的 PWM 频谱实验波形

实验电路还用 Rohde & Schwarz 的 EMI 测试仪在屏蔽室作了传导干扰的 EMI 测试。传导干扰的频率测量范围是 150K 到 30M。采用的测试标准为 CISPR 标准,上面一条基准线为 QP 值(准峰值),下面一条基准线为 AV 值(平均值)。图 8(a)是固定载波的 EMI 测试结果,可以看出在圆圈所示的位置平均值测试超标,图 8(b)、(c)经过混沌调制后电磁辐射的峰值减小,而且 tent 映射调制的 EMI 抑制效果比 bended up-down map 映射调



制 EMI 抑制效果略好。

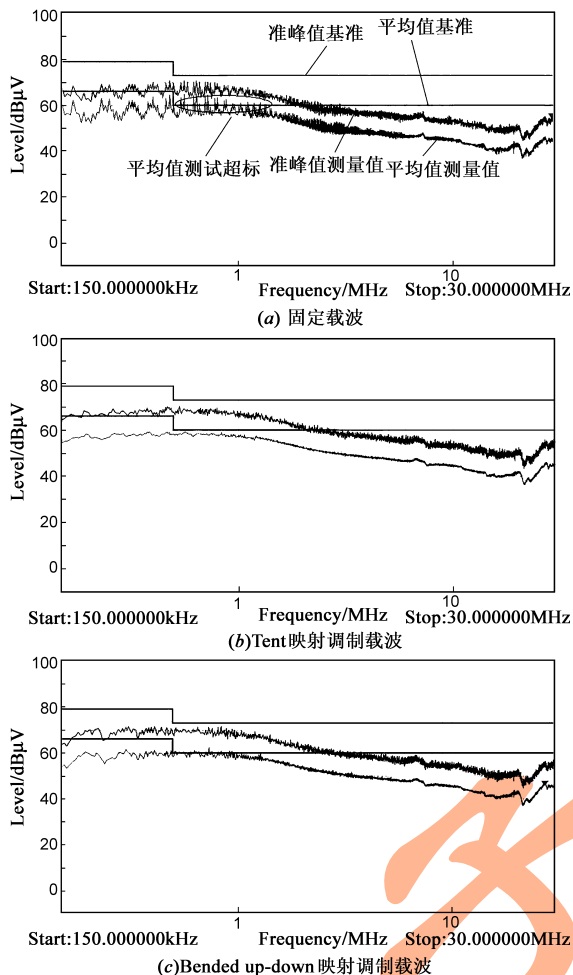


图 8 SVPWM 逆变器 EMI 测试结果

## 6 结论

混沌运动初值敏感所对应的无穷多的工作轨迹,采用常规的时域分析方法极为困难和盲目,使得从轨道提取系统特征值非常困难.本文研究表明混沌初值敏感不影响混沌开关变换器的驱动脉冲分布,不影响频谱的形状,所以研究不变分布从而提取混沌开关变换器的整体特征是研究混沌开关变换器及 EMI 抑制问题的新的有效手段.从而可以基于不变分布设计一定分布的开关变换器的频谱,得到 EMI 抑制的最佳效果.

## 参考文献:

[1] 张波,曲颖.电压反馈 BOOST 变换器的精确离散映射及其分岔和混沌现象[J].电工技术学报,2002,3(6):43-47.  
Zhang Bo, Qu Ying. The precise discrete mapping of voltage-fed DCM BOOST converter and its bifurcation and chaos[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2002, 3(6): 43

- 47. (in Chinese)  
[2] 高金峰,吴振军,赵坤.混沌调制技术降低 BUCK 型变换器电磁干扰水平研究[J].电工技术学报,2003,18(6):23-27.  
Gao Jinfeng, Wu Zhenjun, Zhao Kun. Research on suppressing electromagnetic interference level of BUCK converter by using chaotic modulation Technology[J]. Transactions of the China Electrotechnical Society, 2003, 18(6): 23-27. (in Chinese)  
[3] Sun Li, Nie Jianhong, Wu Fengjiang. Study on conducted EMI suppression method in PWM adjustable speed system[A]. México Power Electronics Congress, 2004 CIEP 9th IEEE International[C]. Celaya, 2004. 230-235.  
[4] 张波.DC-DC 变换器非线性混沌现象研究[J].电工技术学报,2005,20(12):17-20.  
Zhangbo. DC-DC converter Non-linear chaos phenomenon research[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2005, 20(12): 17-20. (in Chinese)  
[5] Tse, K K, Chung, H S -H, Huo, S Y, So, H C. Analysis and spectral characteristics of a spread-spectrum technique for conducted EMI suppression[J]. IEEE Transactions on Power electronics 2000, 15(2): 399-410.  
[6] M Kuusma. Variable frequency switching in power supplies EMI-control: an overview[J]. IEEE AES systems magazine, 2003, 18(12): 18-21.  
[7] A Santolaria, J Balcells, D Gonzalez. Evaluation of switching frequency modulation in EMI emission reduction applied to power converters[A]. IECON'03 The 29th Annual Conference of the IEEE[C]. Virginia, USA, 2003, 3: 2306-2311.  
[8] Deane, J H B, Ashwin, P, Hamill, D C, Jefferies D J. Calculation of the periodic spectral components in a chaotic DC-DC converter[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, 1999, 46(11): 1313-1319.  
[9] G Setti, R Rovarri, G Mazzini. Tensor-based theory for quantized piecewise-affine markov systems: Analysis of some map families[J]. IEICE Transaction on fundamentals 2001, 84(9): 2090-2100.  
[10] A Lasota, M C Mackey. Chaos, Fractals, and Noise[M]. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1994.  
[11] G D. Birkhoff. Proof of the ergodic theorem[J]. Proc Nat Acad Sci, USA. 1931, 17(1): 656-660.  
[12] A L Baranovski, D Daems. Design of 1-D chaotic maps with prescribed statistical properties[J]. Int J Bifurcation Chaos, 1995, 5(6): 1585-1598.  
[13] Baranovski, A L, Schwarz, W. Hybrid systems and chaotic point processes[A]. IEEE International Symposium on Circuits and Systems[C]. London, 2003, 2: 25-28.  
[14] Tse, K K, Chung, H S -H, Hui, S Y R, So, H C. A comparative investigation on the use of random modulation schemes for

DC/DC converters[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics. 2000, 47(2): 253 – 263.

[15] Callegari, S, Rovatti, R, Setti, G. Spectral properties of chaos-

based FM signals: theory and simulation results [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, 2003, 50(1): 3 – 15.

作者简介:



杨 汝 女, 1971 年 7 月生于湖南长沙, 博士, 副教授, 现在广州大学物理与电子工程学院任教. 目前主要研究方向为电力电子装置及 EMI 抑制. E-mail: lisayang702@yahoo.com.cn



张 波 男, 1962 年 10 月生于福建三明, 博士, 教授, 博士生导师, 现在华南理工大学电力学院任教, 已主持和参加十几项包括国家自然科学基金在内的科研项目, 发表论文 100 余篇. 目前主要研究方向为电力电子及电力传动.

电子学报