

# 多项式非线性系统多频输入稳态响应的计算

胡 钊,陈允平

(武汉大学电气工程学院,湖北武汉 430072)

**摘 要:** 针对工程实际中广泛存在并且有着十分重要应用的一大类非线性电路和系统,即非线性项为幂级数形式的非线性系统,本文称之为多项式非线性系统,提出了一种多频稳态响应的递归化计算方法,将这种非线性系统在多频输入下的稳态响应计算问题化为不断求解同一个线性系统在不同多频输入下的稳态响应,并且基于所构建的算法原理,采用目前广泛使用的 Matlab 语言编制了通用程序。大量算例表明,本文所提出的方法可以十分有效的用于计算这类系统的多频稳态响应。

**关键词:** 多项式非线性系统;多频输入;稳态响应

**中图分类号:** TP271 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2007) 02-0315-05

## An Algorithm for Computing Steady-State Responses of Nonlinear Polynomial Systems to Multiple Input Frequencies

HU Zhao, CHENG Yun-ping

(School of Electrical Engineering, Wuhan University, Wuhan, Hubei 430072, China)

**Abstract:** A recursive algorithm is presented for obtaining steady-state solutions of a large class of nonlinear circuits and systems driven by two or more distinct frequency input signals, which are called nonlinear polynomial systems (a nonlinear system with a power series type of nonlinearity) in this paper and find the important and wider applications in practice. By way of this algorithm, the response of a nonlinear polynomial system to the given multiple input frequencies can be obtained by repeatedly solving the steady-state responses of the same linear system to different multiple input frequencies. A program is developed using the Matlab language. Numerous examples have been solved successfully using the algorithm. One of these examples is given for illustrative purpose.

**Key words:** nonlinear polynomial systems; multiple input frequencies; steady-state responses

### 1 引言

在电子电路、通信电路等很多非线性电路和系统的分析和设计中,一个经常遇到的基本问题就是计算电路或系统在  $U(U-2)$  个不同频率分量作用下的稳态响应。

多频输入稳态响应的计算方法分为时域法和频域法两大类。时域计算方法目前主要有蛮法<sup>[1]</sup>、打靶法<sup>[2,3]</sup>,这些方法各有优点,但同时也存在着一些不足之处,例如,在应用蛮法时,当多频输入信号的频率基不可通约时,难于确定何时响应中的暂态分量已经消失,电路进入了稳态,对于打靶法来说,当其稳态响应解不为周期函数时,便不能使用该法,即使其解是周期函数,周期也比各个频率分量高出很多数量级,从而使得积分所花的时间很长,有时甚至是无限长,所以在多频输

入的情况下,蛮法和打靶法通常是不实用的,虽然也提出了若干基于牛顿法的算法,但是它们各自也存在着一些问题,例如,求解时初值不易选择,并且由于都不是针对多项式非线性系统问题而提出的,所以非常不便于应用<sup>[4~6]</sup>,另外,雅可比矩阵为奇异时上述时域方法均无能为力;频域计算方法中主要有谐波平衡法<sup>[7,8]</sup>、基于广义频率响应函数的稳态频率响应分析方法<sup>[9~11]</sup>,这些方法也并非专门针对多项式非线性系统问题的,计算过程比较复杂,特别是广义频率响应函数的计算。

考虑到现有非线性电路和系统多频稳态响应算法的局限性以及多项式非线性系统多频稳态响应计算问题在电子工程等领域中所具有的普遍性和重要性,本文为此提出了一种简洁高效的算法,可以很好地解决这一问题。

## 2 多项式非线性系统多频输入稳态响应递归化计算的原理

由函数逼近理论的维尔斯特拉斯 (Weierstrass)<sup>[12]</sup> 定理可知,任何定义于一个闭区间的连续函数均可用一个多项式函数来任意准确地逼近,将连续非线性元件特性用多项式逼近后,非线性电路或系统的输入输出关系恒可以表示为式(1)所示的非线性微分方程:

$$L_y(D) y(t) + F[y^{(0)}(t), y^{(1)}(t), \dots, y^{(n)}(t), \dots] = f(t) \quad (1)$$

式(1)中,  $L_y(D)$  为线性微分算子  $D = \frac{d}{dt}$  的  $I$  阶线性多项式, 即有

$$L_y(D) = \sum_{i=0}^I a_i D^i \quad (2)$$

$F[y^{(0)}(t), y^{(1)}(t), \dots, y^{(n)}(t), \dots]$  是解析非线性函数且满足指数有界的李普希兹 (Lipschitz) 条件, 其中  $y^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n} y(t)$   $\triangleq D^n y(t)$ ,  $n=0, 1, 2, \dots, f(t)$  为有界外施激励函数。

实际上, 式(1)所描述的非线性系统中, 有一大类其非线性函数  $F$  仅为响应量  $y(t)$  的幂级数形式, 即有

$$F[y(t)] = \sum_{j=2}^J b_j y^j(t) \quad (3)$$

外施激励函数  $f(t)$  的形式为

$$f(t) = \sum_{k=0}^K c_k D^k x(t) = L_x(D) x(t) \quad (4)$$

这样, 式(1)所描述的非线性系统可以表示为

$$L_y(D) y(t) + \sum_{j=2}^J b_j y^j(t) = L_x(D) x(t) \quad (5)$$

上面式子中的  $I, J, K$  均为正整数。

本文将式(5)所表示的非线性系统称为多项式非线性系统, 并设其响应的沃尔特拉级数<sup>[11,13]</sup> 解形式为

$$y(t) = \sum_{r=1}^r \dots \sum_{i=1}^r h_r(t_1, \dots, t_r) x(t-t_i) \quad (6)$$

式(6)中  $h_r(t_1, \dots, t_r)$  为多项式非线性系统的  $r$  阶沃尔特拉核。在式(6)中令其输入  $x(t)$  扩大  $i$  倍为  $x(t)$ , 则由式(5)和(6)可得

$$\sum_{r=1}^r \left[ \sum_{i=0}^I a_i \frac{d^i}{dt^i} y_r(t) \right] + \sum_{j=2}^J b_j \left[ \sum_{r=1}^r y_r(t) \right]^j = \sum_{k=0}^K c_k \frac{d^k}{dt^k} x(t) \quad (7)$$

式(7)是关于参变量  $y$  的幂级数恒等式, 因而其两边的各同次幂的系数应该相等, 于是得到一组方程:

$$1: L_y(D) y_1(t) = L_x(D) x(t) \quad (8a)$$

$$2: L_y(D) y_2(t) = -b_2 y_1^2(t) \quad (8b)$$

$$3: L_y(D) y_3(t) = -(2b_2 y_1(t) y_2(t) + b_3 y_1^3(t)) \quad (8c)$$

$$4: L_y(D) y_4(t) = -[b_4 y_1^4(t) + 3b_3 y_1^2(t) y_2(t) + b_2(2y_1(t) y_3(t) + y_2^2(t))] \quad (8d)$$

$$5: L_y(D) y_5(t) = -[2b_2 y_1(t) y_4(t) + b_3(3y_1^2(t) y_3(t) + 3y_1(t) y_2^2(t)) + 4b_4 y_1^3(t) y_2(t) + b_5 y_1^5(t)] \quad (8e)$$

$$r: L_y(D) y_r(t) = - \sum_{j=2}^{\min(r, J)} b_j \left[ \sum_{\text{所有 } r_1+r_2+\dots+r_j=r} P_{s=1}^j y_{r_s}(t) \right], \quad r=2, 3, \dots \quad (8f)$$

上述方程组呈递归形式, 因此, 多项式非线性系统描述式(5)可以通过递归线性系统方程式组(8)来求解。为了简化表示, 设线性系统描述式(8b)~(8f)等为

$$L_y(D) y_r(t) = f_r(t), \quad r=2, 3, \dots \quad (9)$$

式(9)中,  $f_r(t)$ ,  $r=2, 3, \dots$  为

$$f_r(t) = - \sum_{j=2}^{\min(r, J)} b_j \left[ \sum_{\text{所有 } r_1+r_2+\dots+r_j=r} P_{s=1}^j y_{r_s}(t) \right], \quad r=2, 3, \dots \quad (10)$$

式(8f)和式(10)中求和下标: 所有  $r_1 + r_2 + \dots + r_j = r$  表示对于某一个  $j$  将  $r$  分解成  $j$  项后得到的所有可能结果求和,  $P = P_r(r_1, r_2, \dots, r_j)$  表示对于某一个  $j$  将  $r$  分解成  $j$  项时每一种结果中  $r_1, r_2, \dots, r_j$  的排列数,  $y_{r_s}(t)$  则表示对于某一个  $j$  将  $r$  分解成  $j$  项时所得结果中对应  $j$  项之积, 即为  $y_{r_1}(t) \cdot y_{r_2}(t) \dots y_{r_j}(t)$ 。

设式(5)所描述的多项式非线性系统的输入信号  $x(t)$  为包含  $U$  个频率成分的多频信号, 即有

$$x(t) = \sum_{u=1}^U 2|A_u| \cos(\omega_u t + \varphi_u) = \sum_{u=1}^U (A_u e^{j\omega_u t} + A_u^* e^{-j\omega_u t}) = \sum_{u=-U}^U A_u e^{j\omega_u t} \quad (11)$$

式(11)中,  $A_u = |A_u| e^{j\varphi_u}$ ,  $A_u^*$  是  $A_u$  的共轭复数, 并定义  $A_{-u} \triangleq A_u^*$ ,  $A_0 \triangleq \frac{1}{2} \sum_{u=1}^U 2|A_u|$ 。

由式(8)可知, 一个多项式非线性系统在给定多频输入下的稳态响应计算问题可以化为不断求解同一个线性系统, 即非线性系统的线性部分在不同多频输入下的稳态响应。首先, 式(8a)是求解线性系统在给定多频输入下的稳态响应, 由式(8b)开始不断递归求解该线性系统在不同多频输入下的稳态响应, 每一步的多频输入均是此前各步所求出的多频稳态响应按式(8f)右边的形式来确定的。对于式(8)中每一个线性系统的多频输入稳态响应都可以采用线性电路正弦稳态响应的相量法来求取。当按精度要求求取该线性系统的有限个(设为  $R$ ) 稳态响应分量后, 由式(6)逐项相加便可以得到多项式非线性系统对于给定多频输入下的稳态响应。

设式(8a)所对应的线性系统的系统函数为  $H_1(j\omega)$ , 则有

$$H_1(j\omega) = \frac{\sum_{k=0}^K c_k (j\omega)^k}{\sum_{i=0}^I a_i (j\omega)^i} \quad (12)$$

于是可以求出线性系统式(8a)的稳态响应  $y_1(t)$  为

$$y_1(t) = 2 \operatorname{Real} \left[ \sum_{u=1}^U H_1(j\omega_u) A_u e^{j\omega_u t} \right] \quad (13)$$

设线性系统式(9)所对应的系统函数为  $H_r(j)$ , 于是有

$$H_r(j) = \frac{1}{\sum_{i=0}^{N(r)} a_i(j)^i}, r = 2, 3, \dots \quad (14)$$

假设一般  $f_r(t)$  的表示式为

$$f_r(t) = \sum_{i=1}^{N(r)} (A_i e^{j \cdot t} + A_i^* e^{-j \cdot t}), r = 2, 3, \dots \quad (15)$$

式(15)中,  $N(r)$  表示一个随  $r$  不同而相异的常数, 则对应的稳态响应解  $y_r(t)$  为

$$y_r(t) = 2 \operatorname{Real} \left\{ \sum_{i=1}^{N(r)} H_r(j \cdot i) A_i e^{j \cdot t} \right\}, r = 2, 3, \dots \quad (16)$$

于是, 可以求得多项式非线性系统描述式(5)的多频输入稳态响应  $y(t)$  为

$$y(t) = \sum_{r=1}^R y_r(t) \quad (17)$$

式(17)中,  $R$  为终止阶次, 即只计算  $1 \sim R$  阶的沃尔特拉级数解, 高于  $R$  阶的响应分量经判断因其幅度小于所给定的大小而被忽略。

### 3 多项式非线性系统多频输入稳态响应递归化算法的实现简介

用两个列向量组成的矩阵表示输入信号  $x$  和解得的各阶解  $Y_r$ , 对于输入信号有  $X = [A]$ , 其中列向量  $A$  记录各频率分量的幅度, 列向量  $U$  记录对应的频率值。即若有

$$x(t) = \sum_{u=1}^U (A_u e^{j \cdot u \cdot t} + A_u^* e^{-j \cdot u \cdot t})$$

则有

$$X = [A] = \begin{bmatrix} A_1 & 1 \\ A_2 & 2 \\ \dots & \dots \\ A_U & U \end{bmatrix}$$

对于解得的各阶解也表示成  $Y_r = [A_r, \dots]$  的形式, 并且把所有解按下标次序记录在一个矩阵  $YY$  中, 以便从  $YY$  中找到各阶解, 再对各阶解建立索引, 索引矩阵  $pos$  表示, 它也由两列组成。矩阵  $YY$ ,  $Y_r$  和  $pos$  分别为

$$YY = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_r \\ \dots \end{bmatrix}, Y_r = [A_r, \dots] = \begin{bmatrix} A_{1r} & 1r \\ A_{2r} & 2r \\ \dots & \dots \\ A_{Ur} & Ur \end{bmatrix}, pos = \begin{bmatrix} l_1 & u_1 \\ l_2 & u_2 \\ \dots & \dots \\ l_r & u_r \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$pos$  中  $l_r$  和  $u_r$  分别记录  $Y_r$  在  $YY$  中的开始位置和终止位置, 即  $YY$  中  $l_r \sim u_r$  行分别记录了  $Y_r$  的各频率分量的幅度值和频率值。

### 4 多项式非线性系统多频输入稳态响应递归化算法的计算流程图

按照上面给出的算法原理以及实现思想, 这里列出多项式非线性系统多频输入稳态响应递归化算法的计算流程图如图 1 所示。

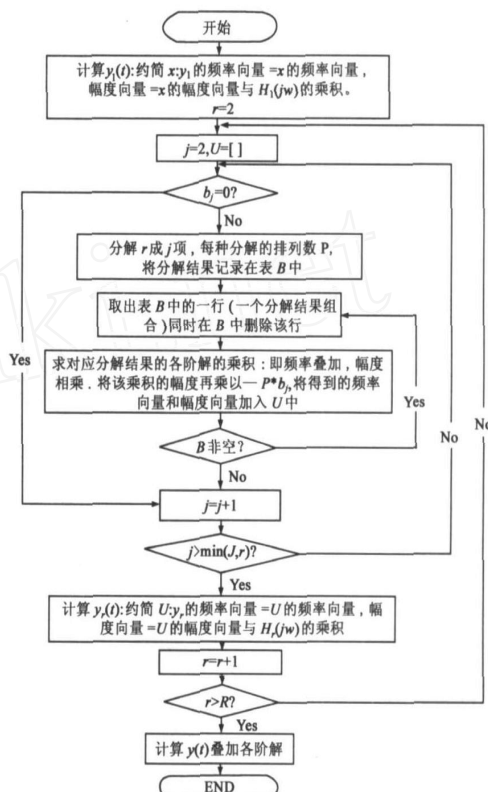


图 1 多项式非线性系统多频输入稳态响应递归化算法的计算流程图

### 5 采用龙格-库塔法计算多项式非线性系统多频输入稳态响应的原理

已知多项式非线性系统的描述式为

$$\sum_{i=0}^I a_i \frac{d^i}{dt^i} y(t) + \sum_{j=2}^J b_j y^j(t) = \sum_{k=0}^K c_k \frac{d^k}{dt^k} x(t) \quad (18)$$

且已知其初值条件如下:

$$\left. \frac{d^i}{dt^i} y(t) \right|_{t=0} = g_i, i = 0, 1, 2, \dots, I-1 \quad (19)$$

记  $z_i(t) \triangleq \frac{d^i}{dt^i} y(t)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, I-1$ , 则式(18)可改写为如下等价形式:

$$\begin{cases} D z_0(t) = h_0(Z) = z_1(t) \\ D z_1(t) = h_1(Z) = z_2(t) \\ \dots \\ D z_{I-1}(t) = h_{I-1}(Z) = \frac{-1}{a_I} \left\{ \sum_{i=0}^{I-1} a_i z_i(t) + \sum_{j=2}^J b_j y^j(t) - \sum_{k=0}^K c_k \frac{d^k}{dt^k} x(t) \right\} \end{cases} \quad (20)$$

式(20)中有  $D = \frac{d}{dt}$ , 再记

$$Z(t) = \begin{bmatrix} z_0(t) \\ z_1(t) \\ \dots \\ z_{I-1}(t) \end{bmatrix}, H(Z) = \begin{bmatrix} h_0(Z) \\ h_1(Z) \\ \dots \\ h_{I-1}(Z) \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \dots \\ g_{I-1} \end{bmatrix}$$

则可以将式(20)简记为矩阵形式:

$$DZ(t) = H(Z) \quad (21)$$

进一步,结合初值条件得到如下初值问题:

$$\begin{cases} DZ(t) = H(Z) \\ Z(0) = G \end{cases} \quad (22)$$

四阶龙格-库塔法通过如下迭代求解式(22)所表示的初值问题,

$$\begin{cases} Z(k+1) = Z(k) + \frac{s}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 = H(t_k, Z(k)) \\ k_2 = H\left(t_k + \frac{s}{2}, Z(k) + \frac{s}{2}k_1\right) \\ k_3 = H\left(t_k + \frac{s}{2}, Z(k) + \frac{s}{2}k_2\right) \\ k_4 = H(t_k + s, Z(k) + s \times k_3) \end{cases} \quad (23)$$

式(23)中,  $s$  为迭代计算时所使用的步长. 在求解式(5)所描述的多项式非线性系统多频输入稳态响应时所有初值条件均取零. 四阶龙格-库塔算法的应用是为了与多频输入稳态响应算法的计算结果作对比.

## 6 计算实例

图2所示为一铁磁谐振非线性时不变电路,其中含有用以描述实际铁芯线圈的非线性电感、线性电阻、线性电容和正弦交流电源. 该电路是一个典型的二阶非自治电路.

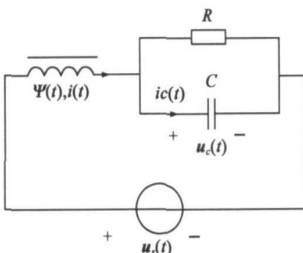


图2 铁磁谐振非线性时不变电路

非线性电感可以用链控韦安特性来表示,并可用多项式

$$i(\psi) = a_1 \psi + a_3 \psi^3 + a_5 \psi^5 + \dots = \frac{1}{L} \psi + a_3 \psi^3 + a_5 \psi^5 + \dots \quad (24)$$

来拟合. 式中  $L, a_3, a_5, \dots$  为一些常数, 其值可根据实测的韦安关系拟合得出,  $L$  是对应线性部分的电感值. 略去式(24)中的5次及更高次项可得

$$i(\psi) = \frac{\psi}{L} + a_3 \psi^3, L > 0, a_3 > 0 \quad (25)$$

应用式(25)可以推出图2所示电路的方程为

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{d\psi}{dt} + \frac{1}{LC} \psi + \frac{a_3}{C} \psi^3 = \frac{u_s}{RC} + \frac{du_s}{dt} \quad (26)$$

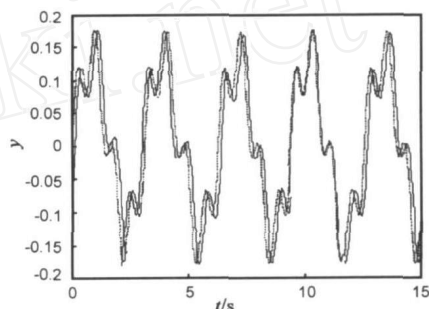
在式(26)中令  $c_1 = \frac{1}{RC}, c_2 = \frac{1}{LC}, c_3 = \frac{a_3}{C}, \psi = y$  可得

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + c_1 \frac{dy}{dt} + c_2 y + c_3 y^3 = c_1 u_s + \frac{du_s}{dt} \quad (27)$$

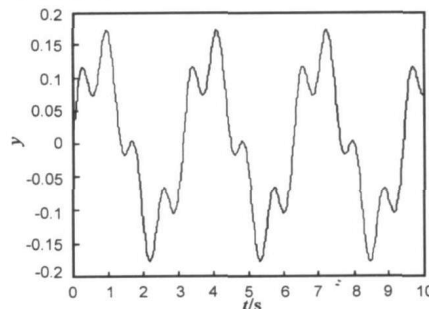
式(27)即为著名的达芬(Duffing)方程, 可以用以描述电学、力学等众多科技领域中的一些物理现象. 当讨论其稳态解时, 时间起点可以任意选定.

对于式(27)所描述的多项式非线性系统, 通过选取电路参数使得有  $c_1 = 0.3, c_2 = 1, c_3 = 1.4$ , 选取输入  $u_s(t) = x(t) = 0.2\cos(2t) + 0.4\cos(8t)$ , 并令  $f(t) = c_1 x(t) + \frac{dx(t)}{dt} = x_1 +$

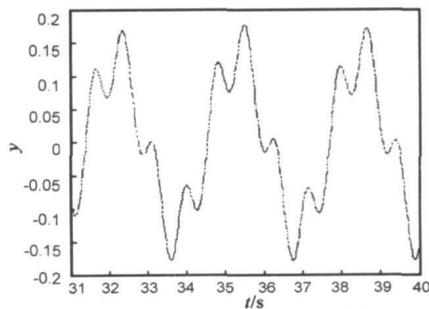
$x_1^* + x_2 + x_2^* = 2\text{real}(x_1) + 2\text{real}(x_2)$ , 其中  $x_1 = (0.03 + 0.2i)\exp(2it), x_2 = (0.06 + 1.6i)\exp(8it)$  计算结果如图3所示, 其中图3(a)对比了多频稳态响应的递归化算法(红色)与四阶龙格-库塔法(蓝色短划线的)的计算结果, 比较图3(b)和(c)可见, 大约经过31秒后由四阶龙格-库塔算法所得的计算结果为稳态响应, 与多频输入稳态响应递归化算法的结果非常一致. 响应的幅频特性和相频特性如图3(d)所示.



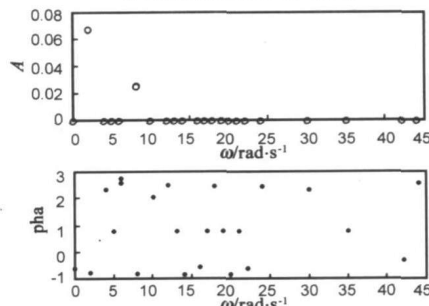
(a) 多频稳态响应的递归化算法(—)与四阶龙格-库塔法(---)计算结果的对比



(b) 多频稳态响应的递归化算法1~13级级数叠加的稳态响应曲线



(c) 步长为0.01时四阶龙格-库塔算法数值解的稳态响应曲线



(d) 系统的幅频特性和相频特性

图3 铁磁谐振非线性时不变电路的计算

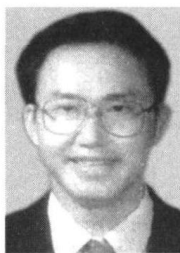
## 7 结语

多项式非线性系统广泛存在于各类电子电路和通信电路等非线性电路和系统中,其多频稳态响应的计算对于这些非线性系统的分析和设计具有十分重要的实际意义.为此,本文提出了一种十分简洁的递归化算法并开发了计算程序,借此,可以利用线性系统中正弦稳态响应的计算方法来计算多项式非线性系统的多频稳态响应.计算结果表明,这种方法非常适合于实际计算.

## 参考文献:

- [1] L O Chua, P M Lin. Computer-Aided Analysis of Electronic Circuits: Algorithms and Computational Techniques [M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1975.
- [2] T J Aprille, T N Trick. Steady-state analysis of nonlinear circuits with periodic input [A]. Proceedings of the IEEE [C]. New York Hilton and New York Coliseum, 1972, 60(1): 108 - 114.
- [3] M S Nakhla, F H Branin. Determining the periodic response of nonlinear systems by a gradient method[J]. Circuit Theory Applications, 1977, 5(3): 255 - 273.
- [4] C K Petersen. Computation of quasi-periodic solutions of forced dissipative systems[J]. Journal of Computational Physics, 1985, 58(3): 395 - 408.
- [5] C K Petersen. Computation of quasi-periodic solutions of forced dissipative systems II [J]. Journal of Computational Physics, 1986, 64(2): 433 - 442.
- [6] M Okumura, T Sugawara & H Tanimoto. An efficient small signal frequency analysis method of nonlinear circuits with two frequency excitations[J]. IEEE Trans Computer-Aided Design, 1990, 9(3): 225 - 235.
- [7] Y Shinohara, M Kurihara & A Kohda. Numerical analysis of quasiperiodic solutions to nonlinear differential equations [J]. Japan Journal of. Applied Math, 1986, 3(2): 315 - 330.
- [8] K S Kundert, G B Sorkin & A. Sangiovanni vincentelli: applying harmonic balance to almost periodic circuits [J]. IEEE Trans Microwave Theory Tech, 1988, 36(2): 366 - 378.
- [9] L O Chua, C Y Ng. Frequency-domain analysis of nonlinear systems: general theory[J]. IEEJ. Electron Circuits Syst, 1979, 13(2): 165 - 185.
- [10] 曹建福, 曹福民. 一类非线性系统的广义频率响应函数[J]. 控制与决策, 1999, (14) 2: 130 - 134.  
Cao J F, Cao F M. A generalized frequency response function for a class of nonlinear systems [J]. Control and Decision, 1999, 14(2): 130 - 134. (in Chinese)
- [11] Zi-Qiang Lang, S A Billings. Evaluation of output frequency responses of nonlinear systems under multiple inputs [J]. IEEE Trans Circuits and Systems-II: Analog and Digital Signal Processing, 2000, 47(1): 28 - 38.
- [12] 王仁宏, 梁学章. 多元函数逼近 [M]. 北京: 科学出版社, 1988.  
Wang H R, Liang X Z. Approximation of Multivariable Functions [M]. Beijing: Science Press, 1988. (in Chinese)
- [13] M Schetzen. The Volterra and Wiener Theories of Nonlinear Systems [M]. New York: John Wiley & Sons, 1980.

## 作者简介:



胡 钊 男, 1956 年出生, 博士, 武汉大学电气工程学院教授, 主要研究方向为非线性系统控制理论与技术、数字信号处理等。  
E-mail: phu @whu. edu. cn

陈允平 男, 1946 年出生, 博士, 武汉大学电气工程学院教授, 博导, 主要研究方向为电力系统非线性控制电、网稳定性等。  
E-mail: yunpcheng @whu. edu. cn