两通道完全重构滤波器组的设计方法:因式分解法

石光明,焦李成
(西安电子科技大学电子工程学院,雷达信号处理国家重点实验室,陕西西安 710071)

摘 要: 本文首先研究了两通道滤波器组设计的完全重构的条件以及 Euclidean 多项式的性质,提出了基于因式分解的两通道完全重构滤波器组的设计方法. 该方法不需要进行强的非线性优化计算而可以实现真正的结构化的完全重构滤波器组. 文中描述了这种方法的推导过程,给出了设计步骤,最后通过给出的设计例子,说明该方法是有效的.

关键词: 因式分解; 完全重构; Euclidean 算法; 滤波器组
中图分类号: TN713 **文献标识码**: A **文章编号**: 0372-2112 (2001) 10-1412-03

Design of PR Two-Channel Filter Bank Based on Factorization

SHI Guang-ming, JIAO Li-cheng
(*Key Laboratory for Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an, Shanxi 710071, China*)

Abstract: A highly effective method based on factorization for designing two-channel perfect reconstruction (PR) filter banks is presented in this paper. First, the PR condition of two-channel filter banks and Euclidean complementary (EC) polynomials are studied. Second, a solution for EC is obtained by constructing a polyphase matrix with a constant determinant based on factorization. Next the design procedures of the method is described. Final some examples are given to illustrate that the method is effective.

Key words: factorization; perfect reconstruction; Euclidean algorithm; two-channel filter banks

1 引言

随着子带编码技术在图像和语音信号处理以及 MC-CDMA 的应用深入,特别是小波变换信号分析理论的出现,滤波器组的设计问题越来越多地受到人们的普遍关注. 一般情况下,希望所设计的滤波器组具有如下特性:(1)消除混迭成分,(2)失真函数精确或逼近纯延时而且是线性相位,(3)每个分析(合成)滤波器是线性相位的. 目前所采用的设计方法是优化设计法,即针对滤波器组中的每个滤波器的频率响应建立目标函数,在完全重构的约束条件下,使目标函数最小(或最大). 例如,二次约束最小平方根法[1],空间投影方法[2],线性规划[3]以及遗传优化法[4]等. 用这些方法可以获得具有很好的频率特性的滤波器,设计计算的复杂度适中,但从严格意义上讲,用这些方法所得到的滤波器组不是真正完全重构的. 文献[5]提出了一种晶格结构的滤波器组实现方法,这种方法具有量化晶格系数不影响滤波器组的完全重构特性的特点、可以用少乘法(或无乘法)[6]结构实现,使得信号处理速度加快,而且实现简单. 但由于晶格系数和目标函数之间的很强的非线性关系,很难用非线性优化方法获得具有良好的频率特性的晶格结构滤波器组. 本文提出了一种新的两通道完全重构的滤波器组设计方法:因式分解法,这种方法克服了上述两种设计方法的缺点,保留了两种方法的优点,是一种全新的设计方法.

2 两通道滤波器组的完全重构条件与 Euclidean 互补多相式

2.1 完全重构条件

图 1 是两通道滤波器组的结构图, $H_0(z)$ 和 $H_1(z)$ 分别是分析滤波器组中的低通和高通滤波器, $F_0(z)$ 和 $F_1(z)$ 分别是合成滤波器组中的低通和高通滤波器.

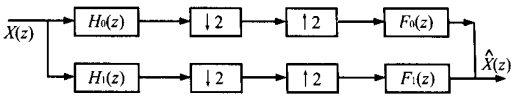

图 1 两通道滤波器组的结构图

选择 $F_0(z) = H_1(-z)$, $F_1(z) = -H_0(-z)$,可得输入和输出信号的关系如下:

$$\hat{X}(z) = \frac{1}{2}[H_0(z)F_0(z) + H_1(z)F_1(z)]X(z) \quad (1)$$

为了使输出 $\hat{X}(z)$ 信号成为输入 $X(z)$ 信号的延时,即 $\hat{X}(z) = \delta z^{-k}X(z)$,其中 k 是非负的整数, $\delta \neq 0$ 是任意常数. 所以有

$$H_0(z)H_1(-z) - H_0(-z)H_1(z) = \delta z^{-2k-1} \quad (2)$$

令 $H_0(z) = H_{00}(z^2) + z^{-1}H_{01}(z^2)$,
$H_1(z) = H_{10}(z^2) + z^{-1}H_{11}(z^2)$,代入式(2),得到,

收稿日期:2000-07-08;修回日期:2001-04-07
基金项目:国家自然科学基金(No. 69772029)

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$H_{00}(z)\,H_{11}(z) - H_{01}(z)\,H_{10}(z) = \delta \cdot z^{-k} \tag{3}$$

式(2)、(3)是两通道滤波器组完全重构条件.

2.2 Euclidean 互补多相式定义和性质

定义 假如一对有限项的多项式$\{P_0(z), P_1(z)\}$是互质的,即不存在公共的分式$(\beta - \alpha z^{-1})$ $(0 < |\alpha| < \infty)$,那么$P_0(z)$和$P_1(z)$被称为 Euclidean 互补多项式[7]. 而且存在有限项的多项式$Q_0(z)$和$Q_1(z)$,使得式(4)成立

$$P_0(z)\,Q_0(z) + P_1(z)\,Q_1(z) = \delta z^{-k},\ \delta \neq 0,\ k > 0 \text{ 整数} \tag{4}$$

对比式(3)和(4),构成两通道完全重构的滤波器组的 FIR 滤波器$H_0(z)$和$H_1(z)$是一对 Euclidean 互补滤波器. 这样,两通道的滤波器组的设计问题转化为求解 Euclidean 互补滤波器问题.

性质 1 满足式(4)的$Q_0(z)$和$Q_1(z)$不是唯一的[8].

下面简述文献[8]的证明过程.

假设$\Phi_0(z) = P_0(z)\,Q_0(z) + P_1(z)\,Q_1(z)$,有两个多项式$C(z) \neq Q_0(z)$和$D(z) \neq Q_1(z)$,令$C(z) = Q_0(z) + Q(z)\beta(z)$和$D(z) = Q_1(z) - Q(z)\alpha(z)$,其中$\alpha(z)$和$\beta(z)$是互质的,$Q(z)$是任意的有限项多项式,那么

$$\begin{aligned}\Phi_1(z) &= C(z)\,P_0(z) + D(z)\,P_1(z)\\ &= \{Q_0(z) + Q(z)\beta(z)\}\,P_0(z) + \{Q_1(z) - Q(z)\alpha(z)\}\,P_1(z)\\ &= P_0(z)\,Q_0(z) + P_1(z)\,Q_1(z) + Q(z)\{\beta(z)\,P_0(z) - P_1(z)\,\alpha(z)\}\\ &= \Phi_0(z) + Q(z)\{\beta(z)\,P_0(z) - P_1(z)\,\alpha(z)\}\end{aligned} \tag{5}$$

令$s(z)$是$P_0(z)$和$P_1(z)$的最大公共因子,有$P_0(z) = s(z)\alpha(z)$和$P_1(z) = s(z)\beta(z)$,所以$\{\beta(z)\,P_0(z) - P_1(z)\,\alpha(z)\} = s(z)\{\beta(z)\,\alpha(z) - \beta(z)\,\alpha(z)\} = 0$,那么$\Phi_0(z) = \Phi_1(z)$,因此性质 1 成立.

由此可知,给定一个低通滤波器$H_0(z)$,它的互补滤波器$H_1(z)$不是唯一的,关键是要找到频率特性好的高通滤波器,组成完全重构的滤波器组.

3 求解互补滤波器的算法

假设低通滤波器$H_0(z)$,长度为N,按多相位分解,有$H_0(z) = H_{00}(z^2) + z^{-1}H_{01}(z^2)$,如果$H_{00}(z)$和$H_{01}(z)$互质,那么对$H_{00}(z)$和$H_{11}(z)$用 Euclidean 算法[9~11]分解,可以得到

$$\begin{bmatrix} H_{00}(z)\\ H_{01}(z)\end{bmatrix} = \left(\prod_{i=1}^{n}\begin{bmatrix} q_i(z) & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right)\cdot\begin{bmatrix} a_n(z)\\ b_n(z)\end{bmatrix} \tag{6}$$

$a_n(z) = az^{-m_0}$,$b_n(z) = bz^{-m_1}$,m_0,m_1是不小于零的整数. 可以构造一个矩阵$\mathrm{P}(z)$,

$$\mathrm{E}(z)^T = \mathrm{P}(z) = \begin{bmatrix} H_{00}(z) & H_{10}(z)\\ H_{01}(z) & H_{11}(z)\end{bmatrix} = \left(\prod_{i=1}^{n}\begin{bmatrix} q_i(z) & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right)\cdot\begin{bmatrix} a_n(z) & c_n(z)\\ b_n(z) & d_n(z)\end{bmatrix} \tag{7}$$

选择,$c_n(z) = cz^{-m_0}$,$d_n(z) = dz^{-m_1}$,使

$$\begin{vmatrix} a_n(z) & c_n(z)\\ b_n(z) & d_n(z)\end{vmatrix} = (-1)^{n-1}\delta z^{-k},\ k = m_0 + m_1,$$

即

$$a \cdot d - c \cdot d = (-1)^{n-1}\delta \tag{8}$$

则$\mathrm{P}(z)$的行列式的值为常数δ,即$det[\mathrm{P}(z)] = \delta$. 令$H_1(z) = H_{01}(z^2) + z^{-1}H_{11}(z^2)$,则由$H_0(z)$和$H_1(z)$构造的滤波器组满足完全重构条件. 优化$c$,$d$两个变量,使得它们即满足式(8),又使得$H_1(z)$具有较好的高通特性. 这样,滤波器组的设计由原来的多变量带约束的非线性优化转为单变量的优化问题. 显然,整个设计的复杂度大大降低,而且所得到的滤波器组可用晶格结构实现.

4 设计过程

根据上述研究的结果,下面总结设计算法

ⅰ给定滤波器的特性指标阻带截止频率ω_s和长度N,用 MATLAB 的函数库,设计一个低通滤波器$H_0(z)$,按多相位分解得到$H_{00}(z)$,$H_{01}(z)$.

ⅱ判断$H_{00}(z)$和$H_{01}(z)$的互质性,如果$H_{00}(z)$和$H_{01}(z)$非互质,设计失败. 重新回到ⅰ.

ⅲ按式(7)作因式分解,得到$q_i(z)$,a_n,b_n.

ⅳ给定滤波器组系统增益δ,以c为变量,按式(8)计算,构造矩阵$\mathrm{P}(z)$,得到$H_1(z)$. 构造目标函数$\Phi = \int_0^{\omega_s} |H_1(e^{j\omega})|^2 d\omega$,($\Phi$为高通滤波器$H_1(z)$的阻带能量),用无约束单变量优化方法[12],求得c使得Φ最小,从而得到最佳的$H_1(z)$.

需要注意,在分解过程中,所得到的$q_i(z)$可能是非因果的,即$q_i(z)$中可能包含$z^l(l > 0)$项,可以通过乘以z^{-l}因子解决[8]. 这样,就可保证其可实现性.

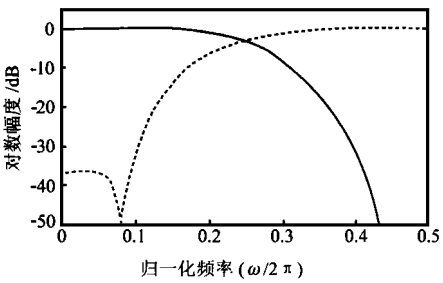

图 2　$N = 16$ 的滤波器组的分析滤波器频率响应

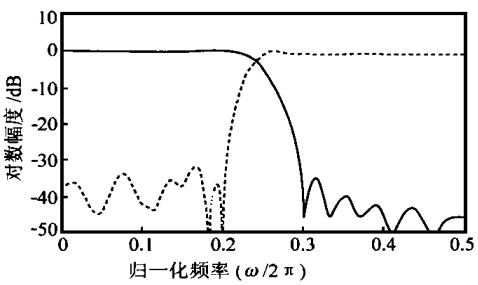

图 3　$N = 32$ 的滤波器组的分析滤波器频率响应

5 设计例子

第一个例子,长度$N_0 = 16$低通滤波器$H_0(z)$,归一化的$\omega_s = 0.43$. 图 2 中,实线是它的频率响应曲线,表 1 给出分解后的系数q_i,表 2 给出a,b以及优化得到的c,d,表 3 是滤波器组的频率特性指标,所得到的高通滤波器$H_1(z)$的频率响

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

应曲线也在图 3(虚线)中, $H_1(z)$ 的长度 $N_1 = 16$. 第二个例子, 低通滤波器 $N_0 = 32$ 的 $H_0(z)$, 高通滤波器 $H_1(z)$ 的长度 $N_1 = 32$, 图 3 中的实线和虚线分别是它们的频率响应曲线, 由于篇幅所限, 在表 4 只列出滤波器组的频率特性指标.

表 1 $N = 16$ 的滤波器 $H_0(z)$ 的分解系数 q_i

	$q_1(z)$	$q_2(z)$	$q_3(z)$	$q_4(z)$	$q_5(z)$	$q_6(z)$	$q_7(z)$	$q_8(z)$
z^1	0	- 1.8318e - 1	- 3.5293e - 3	- 5.5072e + 2	0	- 2.2721e + 2	0	0
z^0	4.0233e + 0	- 6.5659e + 0	1.5152e - 1	1.1947e + 2	0	2.5554e + 3	0	- 3.3470e + 3
z^{-1}	0	0	0	0	1.8137e - 3	0	- 6.1561e - 5	0
z^{-2}	0	0	0	0	- 8.3849e - 5	0	1.3771e - 5	0

表 2 $N = 16$ 的滤波器组的优化后系数及其他参数因子

a	b	c	d	m_0	m_1	δ
- 3.6776e - 3	- 4.4248e + 1	4.8455e - 3	- 4.4299e + 1	3	2	- 3.7732e - 1

表 3 $N = 16$ 的滤波器组频率特性指标

H_0 的 ω_s	H_0 的第一阻带峰衰减(dB)	H_1 的 ω_s	H_1 的第一阻带峰衰减(dB)
0.43	- 53	0.12	- 36

表 4 $N = 32$ 的滤波器组频率特性指标

H_0 的 ω_s	H_0 的第一阻带峰衰减(dB)	H_1 的 ω_s	H_1 的第一阻带峰衰减(dB)
0.3	- 35	0.2	- 32

6 结论与讨论

晶格结构的滤波器组的优点是, 量化晶格系数而滤波器组的完全重构特性不变. 将因式分解用于滤波器组的设计是实现晶格结构的滤波器组的有效方法. 本文在研究了两通道滤波器组设计的完全重构的条件, 得出分析(或合成)的两个滤波器实际上是一对 Euclidean 互补滤波器的结论, 从而将滤波器组设计问题总结为多项式的分解问题. 利用 Euclidean 算法, 构造了满足完全重构条件的多项式矩阵, 求解出互补多项式, 利用互补滤波器的性质及普通的单变量优化算法, 得到最佳的完全重构滤波器组. 从文中最后给出的设计结果来看, 说明这种方法可以实现晶格结构的滤波器组, 而又避免了强非线性优化计算, 是有效可行的. 当然在此算法中, 由于约束 $H_{00}(z)$ 和 $H_{01}(z)$ 互质, 给低通滤波器的设计带来了限制.

参考文献:

[1] B R Horng, et al. Lagrange Multiplier approaches to the design of two-channel perfect reconstruction linear-phase FIR filter banks [J]. IEEE, Signal Processing, 1992, 40(2): 364 - 374.

[2] C Khalil, et al. Design of two-channel equiripple FIR linear-phase quadrature mirror filters using the vector space projection method [J]. IEEE, Signal Processing letters, July, 1998, 57: 167 - 170.

[3] Hiroshi Ochi, et al. Linear Programming Design of Two-channel Perfect-Reconstruction Biorthogonal Filter Banks-Linear phase and Low delay [A]. IEEE International Symposium on Circuits and System [C], June 9-12, Hong Kong 1997: 969 - 972.

[4] S Sriranganathan, et al. The design of low complexity two-channel lattice-structure perfect reconstruction filter banks using genetic algorithms [A]. IEEE International Symposium on Circuits and System [C], June 9-12, Hong Kong 1997: 2393 - 2395.

[5] T Q Nguyen, P P Vaidyanathan. Two channel perfect reconstruction FIR QMF structures which yield linear-phase analysis and synthesis filters [J]. IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing, 1989, 37(5): 676 - 690.

[6] W Liu, S C Chan. Low delay perfect reconstruction two-channel FIR/IIR filter banks and wavelet bases with SOPOT coefficients [A]. Proc. IEEE international Conference on ASSP [C], [M/CD] Istanbul, June, 2000: 102.

[7] P P Vaidyanathan. Multirate Systems and Filter Banks [M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1993.

[8] J S Mao. New Design and Factorization Methods for Perfect Reconstruction Filter Banks [D]. Ph. D. Thesis, the University of HongKong, Jan. 2000.

[9] Martin Vetterli and Cormac Herley. Wavelets and Filter Banks: Theory and Design [J]. IEEE Trans. On Signal Processing 1992, 40(9): 2207 - 2232.

[10] M R K Khansari, E Dubois. Pad table, continued fraction expansion, and perfect reconstruction filter banks [J]. IEEE Trans. Signal Processing, 1996, 44: 1955 - 1963.

[11] L C Daubechies, W Sweldents. Factoring Wavelet transform into lifting steps [J]. Fourier Analy Application 1998, 4(3): 247 - 269.

[12] 陈开周. 最优化计算方法 [M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 1984: 67 - 87.

作者简介:

石光明 男. 1965 年 6 月出生于江西南昌. 副教授, 在职博士生, 研究方向: 智能信号处理, 小波理论及应用.

焦李成 男. 1959 年 10 月出生于陕西白水. 教授, 博导. 研究方向: 智能信息处理, 非线性科学.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net