

对三维多层快速多极子方法中不变项计算的优化

王浩刚, 聂在平, 王 军

(电子科技大学微波工程系, 成都 610054)

摘 要: 本文首先研究了三维 MLFMA 中不变项的内在性质. 它们分别是: m_{m_l} 具有平移不变性, V_s 和 V_f 在角谱空间中共轭对称, 使用 Galerkin 法时 \bar{A}_{sparse} 为对称矩阵并且 V_s 和 V_f 相等. 这些性质可用于优化不变项的计算, 使 m_{m_l} 的计算复杂度从 $O(M_l(6^3 - 3^3))$ 降到 $O(7^3 - 3^3)$ 甚至 $O((7^3 - 3^3)/8)$, 而 V_s 和 V_f 的复杂度则从 $O(K_L N)$ 降至 $O(K_L N/4)$, A_{ji} 的从 $O(N)$ 到 $O(N/2)$. 数值结果表明了优化的有效性.

关键词: 多层快速多极子; 平移不变性; 计算复杂度

中图分类号: TN011 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2000) 09-0105-03

Optimization of the Invariant Terms Calculation in Three Dimensional MLFMA

WANG Hao-gang, NIE Zai-ping, WANG Jun

(University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054, China)

Abstract: In this paper, the intrinsic qualities of invariant terms in 3D MLFMA are discussed at first. They are m_{m_l} 's invariance of translation, the central conjugate symmetry of V_s or V_f on k space, and the symmetric sparse matrix \bar{A}_{sparse} and equivalency between V_s and V_f while using Galerkin method. Using these factors, we can optimize the invariant terms calculation in MLFMA program. As a result, the complexity of calculating m_{m_l} is reduced from $O(M_l(6^3 - 3^3))$ to $O(7^3 - 3^3)$ and even to $O((7^3 - 3^3)/8)$, V_s and V_f are reduced from $O(K_L N)$ to $O(K_L N/4)$, and A_{ji} from $O(N)$ to $O(N/2)$. Numerical results show the validity of optimizing.

Key words: MLFMA; translation invariance; computing complexity

1 引言

近十年来,随着计算机技术迅猛发展,计算电磁学也得到了迅速的发展,特别是一些新算法被提出并在现有计算机条件下得到实现.最近, V. Rokhlin^[1], Engheta^[2], C. C. Lu 和 W. C. Chew^[3~9]等相继提出并实现了用于求解电大尺寸三维矢量电磁散射的快速算法——快速多极子方法(FMM)和多层快速多极子方法(MLFMA).该算法不但能够保证数值计算的精确度,而且相比矩量法结合共轭梯度法(计算和存储复杂度为 $O(N^2)$)在计算效率上有明显的提高(计算量降到 $O(N^{1.5})$, $O(N^{1.33})$,直到 $N \log N$ 的量级.),从而使基于精确建模的积分方程数值解法终于可在现有计算机条件下用来求解电大尺寸目标的三维电磁散射问题.正因如此,这一算法得到了国内不少学者的关注.在电子科技大学,聂在平,胡俊,姚海英,王浩刚,王军等^[10~14]在这方面也做了很多工作,并分别采用 Fortran 和 C++ 实现了该两种算法,同时计算了大量的标准体,以验证算法的正确性和高效性.

当使用 FMM 时,矩量法结合共轭梯度法中的矩阵矢量乘法可被替换为

$$A_{ji} a_i = \sum_{m \in G_m} A_{ji} a_i + \frac{ik}{4} d^2 K V_{mj}(k) \times \sum_{m \in G_m} (k \cdot r_{mm}) V_{sm}^*(k) a_i, j \in G_m \quad (1)$$

式(1)中的第一项为近区组的贡献,第二项则为用快速多极子方法计算的远区互反应.运用 FMM 于迭代法的矩阵矢量乘法的第一步工作是算出式(1)中用到的不变项(即每步迭代的矩阵矢量乘法中都要用到的,且不随迭代过程而改变的那些量): m_{m_l} , V_s , V_f 和 A_{ji} .

现在,用 MLFMA 来代替 FMM 完成矩阵矢量乘法,即实现式(1)的第二项.首先,用一大正方体把待求解的电大尺寸物体包含于其中,随后,该大立方体被分成八个等大的子立方体,然后递归地把每个子立方体

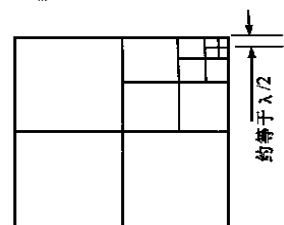


图1 大正方体的一个面. 该正方体已被递归地分为4层,在最底层子立方体的边长电尺寸约等于 $\lambda/2$

再细分为八个更小的子立方体,直到最底一层的子立方体边约等于半个波长.我们感兴趣的是包含有目标体的立方体,现称之为非空立方体.通过搜索的方法可获得这些立方体^[4].从而,一颗网格树的数据结构形成了.树中任一节点(立方体)至多包含 8 个子节点.如图 1 所示.

多层快速多极子的矩阵矢量乘法被分为两步进行:

第一步为各层的上聚过程.它包含对树中各层的非空节点建立外部多极展开.其数学描述为

$$S_{m_{l-1}}(\mathbf{k}_{(l-1)n}) = \sum_{G_{m_l}} \sum_{G_{m_{l-1}}} e^{-ik_{(l-1)n} \cdot \mathbf{r}_{m_{l-1}}} W_{n,n}^* S_{m_l}(\mathbf{k}_{ln}), \quad l=3, \dots, L \quad (2)$$

第二步为各层的往下配置过程.它包含建立局部多极展开,包含两部分贡献.第一部分来自该节点(立方体)的双亲立方体(数据结构名词,为包含该节点的上一层立方体),其中使用到了平移和外插.另一部分则来自被称之为远亲的贡献(远亲即所有满足在当前层为该立方体节点的远区节点而它们双亲却互为非远区这一条件的立方体).第二部分可表达为

$$m_l(\mathbf{k}_{ln}) = \sum_{\substack{m_l \in B_{m_l} \\ m_l \in F_{m_{l-1}}}} m_{m_l}(\mathbf{k}_{ln} \cdot \mathbf{r}_{m_{l-1}}) S_{m_l}(\mathbf{k}_{ln}) \quad (3)$$

从上面介绍可看出无论是使用快速多极子还是用多层快速多极子,不变项: m_{m_l} , V_s , V_f 和 A_{ji} 需预先求出.通常的方法是存储并计算每个单元的 V_s 和 V_f , 存储和计算各层的每一个立方体节点和其远亲之间的所有平移项 m_{m_l} , 以及计算和存储稀疏矩阵中的所有元素 A_{ji} (式(1)中).当待求问题所含单元数 N (即未知数个数)很多时,这种方法相当耗费计算时间和内存,所以需要寻找新的思路.为此本文作者研究了多层快速多极子中不变项的一些内在属性,并利用这些属性优化计算.它们是:

(1) l 层中 m_{m_l} 的平移不变性. $l=2, 3, \dots, L$ (L 为 MLFMA 树最底层的层数).由于该特性, m_{m_l} 的存储和计算复杂度由原来的 $O(M_l(6^3 - 3^3))$ 降到 $O(7^3 - 3^3)$. 常数 M_l 表示 l 层的所有非空节点数.

(2) 利用 $m_{m_l} = m_{m_l}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{m_{l-1}})$, 对不同象限却相互对称的 8 个 $\mathbf{r}_{m_{l-1}}$ 可选择不同的 \mathbf{k} 以使它们的 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{m_{l-1}}$ 值相等,且各自的 m_{m_l} 值对应相等,进而使 m_{m_l} 的计算量从 $O(7^3 - 3^3)$ 减少到 $O((7^3 - 3^3)/8)$.

(3) V_s 和 V_f 的对称性.其复杂度也能从 $O(K_l N)$ 减少到 $O(K_l N/2)$ 甚至到 $O(K_l N/4)$.

(4) 用于存储式(1)中所有 A_{ji} 的稀疏矩阵 \bar{A}_{sparse} 的对称性.显然,当用到 Galerkin 方法时,复杂度可减少到 $O(N/2)$.第四节给出了利用这些属性后的数值结果,从中可以看出对这些不变项计算的复杂度得到了明显降低,与此同时精度也得到了保证.

2 m_{m_l} 的平移不变性

通常计算 m_{m_l} 的方法为:计算并存储层 l 中每一立方体

m_l 和其所有远亲立方体 m_l 之间的 m_{m_l} . 图 2 的阴影部分表示了一个立方体的所有远亲的分布.从中可看出每个立方体的远亲至多为 $6^2 - 3^2$ 个,这是 2 维的 MLFMA 用图.对于三维 MLFMA,则每个立方体的远亲至多为 $6^3 - 3^3$. 所以使用通常的方法的计算和存储复杂度为 $O(M_l(6^3 - 3^3))$. M_l 表示 l 层的非空立方体个数,在第一节中已提到.当 M_l 太大,存储需求将会变得不可容忍.

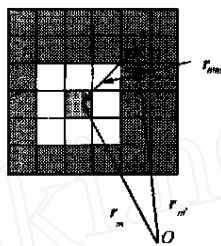


图 2 一正方体的远亲.它们分布于图中阴影部分.每一立方体节点的远亲分布都是不同的

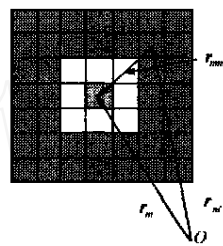


图 3 任意一立方体节点的所有可能的远亲.它们分布于阴影部分,这是图 2 的扩展.从而任一立方体节点的远亲分布不超出阴影范围

为了减少复杂度,先观察 $m_{m_l}(\mathbf{k})$. 先在第 l 层中任意选取 4 个节点,分别为 m_{0i} , m_{0l} , m_l , 和 m_l . 容易得出:当 $\mathbf{r}_{m_{0i}} = \mathbf{r}_{m_{0l}}$, $m_{0i}(\mathbf{k}) = m_{0l}(\mathbf{k}) = m_{m_l}(\mathbf{k})$ 将会成立.这说明了平移项 $m_{m_l}(\mathbf{k})$ 的大小只取决于波数,角谱以及某立方体节点与其远亲间的位移矢量,而与其它因素无关.所以当 m_l 和 m_l 分别移到 m_{0i} 和 m_{0l} 时, $m_{m_l}(\mathbf{k})$ 的值不变.称之为平移不变性.这一性质最先在文[16]中简要提到,用于计算粗糙表面散射.本文则用于减少 $m_{m_l}(\mathbf{k})$ 的计算和存储复杂度.

图 2 为某一特殊情形.图 3 则属于对远亲分布的一种形式扩展(实际不存在),该图中远亲对称地分布在某立方体节点周围.远亲个数从 $6^2 - 3^2$ 变为 $7^2 - 3^2$,同样对于三维情形,从 $6^3 - 3^3$ 变到 $7^3 - 3^3$.图 3 已含有该层所有立方体的远亲分布信息,即该层任一立方体的远亲分布将不会超过阴影范围.因此仅需算一个如图 3 所示的立方体与其所有的远亲(阴影部分)的 $m_{m_l}(\mathbf{k})$ 并存储其值,而不需计算所有立方体节点与它们远亲间的 $m_{m_l}(\mathbf{k})$.当需要使用任一立方体 m_l 与它的任意远亲 m_l 的 $m_{m_l}(\mathbf{k})$ 时,只需先获得两立方体间的位移矢量,再根据 $m_{m_l}(\mathbf{k})$ 的平移不变性从存储中调用相应的值.从而计算和存储复杂度从 $O(M_l(6^3 - 3^3))$ 将到 $O(7^3 - 3^3)$.当 M_l 太大时,这是一个特别精彩的改进.

为了进一步降低复杂度,先分析 $m_{m_l}(\mathbf{k})$ 的表达式.它可表述为

$$m_{mm}(\mathbf{r}_{mm}, \mathbf{k}) = \sum_{l=0}^L W_l i^l (2l+1) h_l^{(1)}(kr_{mm}) P_l(\mathbf{r}_{mm}, \mathbf{k}) \quad (4)$$

上式中为了方便省去了 $m_{m_l}(\mathbf{k})$ 的下标 l .

很明显,当 \mathbf{r}_{mm} 是一个常量, $m_{m_l}(\mathbf{k})$ 将不会改变.所以假定在直角坐标系中

$$\begin{cases} r_{mm} = (x_1, y_1, z_1) \\ r_{mm} = (x_2, y_2, z_2) \end{cases} \quad (5)$$

而在球坐标系中

$$\begin{cases} k = (k_1, 1, 1) \\ k = (k_2, 2, 2) \end{cases} \quad (6)$$

当 r_{mm} 为式(7)描述的八种相互对称的情形之一,即:

$$\begin{cases} x_2 = (-1)^a x_1 \\ y_2 = (-1)^b y_1, (a, b, c=0, 1), \\ z_2 = (-1)^c z_1 \end{cases} \quad (7)$$

时,选择

$$\begin{cases} 2 = c + (-1)^c 1 \\ 2 = 2 + (-1)^b [a + (-1)^a 1] \bmod(2) \end{cases} \quad (8)$$

从而

$$k \cdot r_{mm} = k \cdot r_{mm} \quad (9)$$

$$mm(k \cdot r_{mm}) = mm(k \cdot r_{mm}) \quad (10)$$

仅需计算远亲为图4所示阴影部分的 $m_{mm}(k)$. 图3其它部分的 $m_{mm}(k)$,可以根据式(7),(8)获得.此时,计算和存储复杂度降至 $O((7^3 - 3^3)/8)$ (见图4).

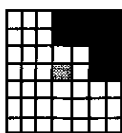


图4 仅有阴影部分的远亲与中心立方体间的 mm 需要计算

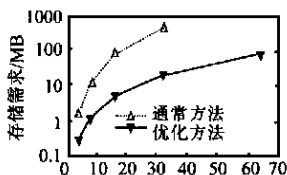


图5 正方形平板的 mm 计算的存储需求与其电尺寸关系. 虚线为通常方法的结果, 实线为优化后的结果

3 V_s, V_f 和 A_{sparse} 的对称性

式(1)中 V_s 和 V_f 可表为

$$V_{smi}(k) = \int_s ds e^{ik \cdot r_{im}} [I - \mathcal{K}k] \cdot j_i(r_{im}) \quad (11)$$

$$V_{fmi}(k) = \int_s ds e^{ik \cdot r_{jm}} [I - \mathcal{K}k] \cdot t_j(r_{jm}) \quad (12)$$

显然,当 $k = -k$,

$$V_{smi}(k) = V_{smi}^*(k) \quad (13)$$

$$V_{fmi}(k) = V_{fmi}^*(k) \quad (14)$$

从而, V_s 和 V_f 的计算时间和存储需求将从 $O(K_L N)$ 到 $O(K_L N/2)$. 此处 K_L 为单位矢量 k 的所有取向.

若运用 Galerking 方法^[17]于 MLFMA, 等式 $j_i = t_i$ 将导致

$$V_{smi}(k) = V_{fmi}(k) \quad (15)$$

其计算和存储复杂度就降为 $O(K_L N/4)$. $j_i = t_i$ 还导致

$$A_{\text{sparse}} = A_{\text{sparse}}^T \quad (16)$$

从而, 稀疏矩阵 A_{sparse} 的复杂度也将降为 $O(N/2)$.

4 数值结果

图5为计算一个正方形平板的 mm 时存储需求与其电尺寸的关系. 虚实两条曲线比较可知利用不变项的内在属性可

大大地减少内存需求.

表1 某 $ka = 15.0796$ 导体球散射计算时不变项 $A_{\text{sparse}}, V_s, V_f$ 和 m_{mm} 的存储和计算需求量

需求量	计算时间(s)		内存消耗(MB)	
	通常方法	优化后	通常方法	优化后
A_{sparse}	2653	1383	30.78797	15.4454
V_s 和 V_f	237	60	38.83008	9.70752
m_{mm}	156	5	45.3047	1.205012

表1列出了计算一个 $k = 15.0796$ 球体 RCS 时不变项 V_s, V_f 和 A_{sparse} 的存储与计算时间需求. 这同样说明了利用不变项的内在属性可显著减少计算复杂度.

图6为该球的

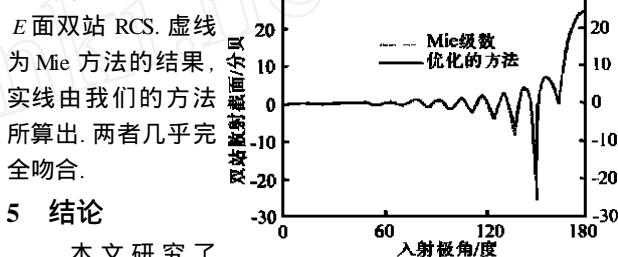


图6 $ka = 15.0796$ 导体球的 E 面双站 RCS

5 结论

本文研究了

MLFMA 中的一些内在性质, 并利用其对

m_{mm}, V_f, V_s 和

A_{sparse} 的计算和存储进行了优化, 使之计算和存储的复杂度得到了明显的改进. 从而可在微型机上计算电大物体的电磁散射.

作者简介:

王浩刚 1974 年出生, 现为电子科技大学博士生. 主要研究方向为电磁散射及计算电磁学高效数值方法以及腔体的散射理论等.

聂在平 1946 年出生. 1968 年毕业于成都电讯工程学院, 1981 年获工学硕士学位, 1987 年至 1989 年在美国伊利诺依大学电磁实验室从事研究工作. 主要研究兴趣包括天线、电磁散射和逆散射、非均匀介质中的场与波及在电法测井中的应用等. 现任电子科技大学微波工程系教授, 博士生导师, 电子科技大学副校长. 近年来主持并完成了近 20 余项科研课题, 先后获电子工业部、国家教委和四川省科技进步奖五项. 在国内外已发表论文 140 余篇.

王 军 1975 年出生, 现为电子科技大学博士生, 主要研究方向为复杂目标近场电磁散射特性的分析计算.

参考文献:

- [1] V. Rokhlin. Rapid solution of integral equations of scattering theory in two dimensions [J]. J. Comput. Phys., 1990, 36(2): 414 - 439.
- [2] N. Engheta, W. D. Murphy, et al. The fast multipole method for electromagnetic scattering problems [J]. IEEE Trans. Antennas and Propagat., 1992, AP-40(6): 634 - 641.
- [3] J. M. Song, W. C. Chew. Fast multipole method solution using parametric geometry [J]. Microwave and Opt. Tech. Lett. 1994, 7(16).

(下转第 95 页)

时需要同向的线极化. 对于普通的同向线极化的双频工作, 就必须同时激励起微带贴片下电磁场的一次模与三次模, 但是这样双频比就很大, 不可能达到如图 9 那么小的双频比 (1:1.31). 这也是这种形状双频天线的的一个很好的特点.

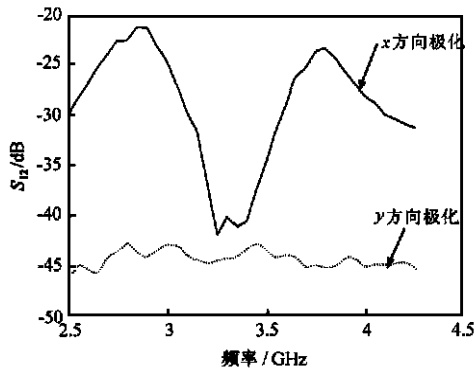


图 10 双频天线的 S_{12} 曲线

4 结论

论文成功地在微带天线的设计中引入了遗传算法进行优化, 讨论了优化中的一些基本问题, 如基因串的定义, 遗传算法与矩量法的结合, 适应度函数的设计以及控制参数的选择等. 论文中还采用遗传算法, 优化出不同形状的微带天线, 分别具有宽带和双频的特点. 宽带天线的设计克服了以往微带天线窄带的缺点, 将天线带宽从 5% 扩展到 16.6%. 双频天线的双频比为 1:1.31, 而且是同向的线极化. 这两个例子充分说明了遗传算法在微带天线优化中的有效性.

参考文献:

- [1] 陈国良, 等. 遗传算法及其应用 [M]. 北京: 人民邮电出版社, 1996.
- [2] J. Michael Johnson, Yahya Rahmat-Samii. Genetic algorithms in engineering electromagnetics [J]. IEEE AP Magazine, 1997, 39 (4): 7 - 21.
- [3] E. H. Newman, P. Tulyathan. Analysis of microstrip antennas using moment methods [J]. IEEE Trans. AP, 1981, 29: 47 - 53.
- [4] S. M. Rao, D. R. Wilton, A. W. Glisson. Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape [J]. IEEE Trans. AP, 1982, 30: 409 - 418.
- [5] J. M. Johnson, Y. Rahmat-Samii. Genetic algorithms and method of Moments (GA/MoM): A novel integration for antenna design [J]. IEEE AP's Digest, 1997: 1664 - 1667.
- [6] J. M. Song, W. C. Chew. Multilevel fast multipole algorithm for solving combined field integral equation of electromagnetic scattering, microwave and optical technology letters [C]. 10, 1, September 1995: 14 - 19.
- [7] C. C. Lu, W. C. Chew. A multilevel algorithm for solving boundary-value scattering [J]. Micro. Opt. Tech. Lett. July 1994, 7 (10): 466 - 470.
- [8] J. M. Song, C. C. Lu, W. C. Chew, et al. Introduction to fast Illinois solver code (FISC) [A]. IEEE Proceedings of '97 Inter. Symp. on Antennas and Propagation, 1997: 48 - 51.
- [9] R. L. Wagner, W. C. Chew. A ray-propagation fast multipole algorithm [J]. Microwave and Opt. Tech. Lett. July 1994, 7 (10): 435 - 438.
- [10] J. Song, et al. Multilevel fast multipole algorithm for electromagnetic scattering by large complex objects [J]. IEEE Trans. Antennas and Propag., 1998, 145 (10): 1488 - 1498.
- [11] J. Song, et al. Fast Illinois solver code (FISC) [J]. IEEE Antennas and Propag. Magazine June 1998, 40 (3): 27 - 34.
- [12] 胡俊, 聂在平, 姚海英, 王浩刚, 王军. 多层快速多极子方法中的树型算法 [J]. 电波科学学报, 1999, 14 (增刊): 99 - 102.
- [13] 胡俊, 聂在平, 姚海英, 王浩刚. 用于复杂目标三维矢量散射的一种高效数值方法 [J]. 电子学报, 1999, 27 (6): 104 - 109.
- [14] 聂在平. 面向实际工程应用的电磁场数值方法进展 [J]. 电波科学学报, 1999, 14 (增刊): 155 - 158.
- [15] 聂在平, 胡俊. 三维矢量电磁散射高效数值分析中新的迭代算法 [J]. 电波科学学报, 1999, 14 (增刊): 99 - 102.
- [16] Hu Jun, Nie Zaiping. Solving electromagnetic scattering from two-dimensional cavity by FMM with complexifying k technique [J]. Microwave Optical Tech. Lett., 1999, 3.
- [17] A. Brandt. Multilevel computations of integral transforms and particle interactions with oscillatory kernels [J]. Comput. Phys. Commun., 1991, 65: 24 - 38.
- [18] Vikram Jandhyala, Balasubramaniam Shanker, Eric Michielssen, W. C. Chew. A combined steepest descent-fast multipole algorithm for the analysis of three-dimensional scattering by rough surfaces [A]. 1997 Inter. IEEE Antennas and Propagation symposium: 2308 - 2311.
- [19] W. C. Chew. Waves and Fields in Inhomogeneous Media [M]. Van Nostrand Reinhold, New York.

作者简介:



杨帆 分别于 1997 年, 1999 年获清华大学电子工程系学士、硕士学位. 现在美国加州大学洛杉矶分校攻读博士学位. 目前研究方向包括: 微带天线、光子带隙结构在天线中的应用以及电磁场数值解法.



张雪霞 清华大学电子工程系教授, 中国电子学会会士. 1958 年毕业于清华大学无线电电子学系, 1959 年 - 1961 年为前苏联莫斯科动力学院访问学者. 长期从事天线、微波技术、波导理论等方面的教学和科研工作.

(上接第 107 页)

- [4] J. M. Song, W. C. Chew. Multilevel fast multipole algorithm for solving combined field integral equation of electromagnetic scattering, microwave and optical technology letters [C]. 10, 1, September 1995: 14 - 19.
- [5] C. C. Lu, W. C. Chew. A multilevel algorithm for solving boundary-value scattering [J]. Micro. Opt. Tech. Lett. July 1994, 7 (10): 466 - 470.
- [6] J. M. Song, C. C. Lu, W. C. Chew, et al. Introduction to fast Illinois solver code (FISC) [A]. IEEE Proceedings of '97 Inter. Symp. on Antennas and Propagation, 1997: 48 - 51.
- [7] R. L. Wagner, W. C. Chew. A ray-propagation fast multipole algorithm [J]. Microwave and Opt. Tech. Lett. July 1994, 7 (10): 435 - 438.
- [8] J. Song, et al. Multilevel fast multipole algorithm for electromagnetic scattering by large complex objects [J]. IEEE Trans. Antennas and Propag., 1998, 145 (10): 1488 - 1498.
- [9] J. Song, et al. Fast Illinois solver code (FISC) [J]. IEEE Antennas and Propag. Magazine June 1998, 40 (3): 27 - 34.
- [10] 胡俊, 聂在平, 姚海英, 王浩刚, 王军. 多层快速多极子方法中的树型算法 [J]. 电波科学学报, 1999, 14 (增刊): 99 - 102.
- [11] 胡俊, 聂在平, 姚海英, 王浩刚. 用于复杂目标三维矢量散射的一种高效数值方法 [J]. 电子学报, 1999, 27 (6): 104 - 109.
- [12] 聂在平. 面向实际工程应用的电磁场数值方法进展 [J]. 电波科学学报, 1999, 14 (增刊): 155 - 158.
- [13] 聂在平, 胡俊. 三维矢量电磁散射高效数值分析中新的迭代算法 [J]. 电波科学学报, 1999, 14 (增刊): 99 - 102.
- [14] Hu Jun, Nie Zaiping. Solving electromagnetic scattering from two-dimensional cavity by FMM with complexifying k technique [J]. Microwave Optical Tech. Lett., 1999, 3.
- [15] A. Brandt. Multilevel computations of integral transforms and particle interactions with oscillatory kernels [J]. Comput. Phys. Commun., 1991, 65: 24 - 38.
- [16] Vikram Jandhyala, Balasubramaniam Shanker, Eric Michielssen, W. C. Chew. A combined steepest descent-fast multipole algorithm for the analysis of three-dimensional scattering by rough surfaces [A]. 1997 Inter. IEEE Antennas and Propagation symposium: 2308 - 2311.
- [17] W. C. Chew. Waves and Fields in Inhomogeneous Media [M]. Van Nostrand Reinhold, New York.