Boole语义的程度化方法

左卫兵
(华北水利水电学院数学与信息科学学院,河南郑州 450046)

摘 要: 基于B-赋值理论,通过在Boole赋值格和全体公式集上分别建立概率测度,利用积分方法提出了Boole语义上公式的B-概率真度,进而在Boole语义上建立了概率逻辑度量空间,将计量逻辑学中近似推理方法推广到Boole语义上,完善了Boole语义的程度化方法.

关键词: Boole语义;B-赋值;B-概率真度;概率逻辑度量空间;近似推理
中图分类号: O141.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2012) 03-0441-07
电子学报 URL: http://www.ejournal.org.cn **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2012.03.005

Graded Method of Boolean Semantics

ZUO Wei-bing
(*Department of Mathematics and Information Science, North China Institute of Water Conservancy and Hydroelectric Power, Zhengzhou, Henan 450046, China*)

Abstract: Based on B-valuation and by defining probability measure in Boolean evaluation lattice and set of all formulae respectively, the B-probability truth degree of formulae in Boolean semantics is introduced using the integral method, then the probability logic metric space is established in Boolean semantics, the approximate reasoning of quantitative logic methods have been extended to Boolean semantics, the graded method of Boolean semantics is improved.

Key words: Boolean algebra; B-valuation; B-probability truth degree; probability logic metric space; approximate reasoning

1 引言

经典命题逻辑的语义理论是以$\{0,1\}$为赋值域的语义理论[1],将赋值域扩充为$\{0,\frac{1}{n-1},\cdots,\frac{n-2}{n-1},1\}$后可建立包括Łukasiewicz逻辑、Gödel逻辑和乘积逻辑等在内的多种n值逻辑的语义理论[2],将赋值域扩充为单位区间$[0,1]$就可得出各种类型的模糊逻辑,如:1995年Höhle在文献[3]中基于一类剩余格提出了ML(Monoidal Logic);1998年Hájek在文献[4]中基于连续三角模和它们的剩余提出了基本模糊逻辑BL(Basic Fuzzy Logic);2001年Esteva和Godo在文献[5]中基于左连续三角模和它们的剩余提出了MTL(Monoidal T-norm based Logic)逻辑,并讨论了MTL的一些扩张:WNM(Weak Nilpotent Minimum)逻辑、IMTL(Involutive Momoidal T-norm based Logic)逻辑和NM(Nilpotent Minimum)逻辑;1997年王国俊教授在文献[6]中基于R_0蕴涵算子提出了一种新的模糊命题演算形式系统L^*;2003年裴道武教授在文献[7]证明了NM逻辑系统和L^*系统等价,IMTL逻辑系统和L_0^*系统等价,等等.

我们知道,经典逻辑、多值逻辑和模糊逻辑系统的赋值域均是线性格即链,链中任何元素均可比较大小(在偏序意义下),这样的逻辑系统自然有其优越性,但也表现出与现实中赋值存在不可比较性相悖的缺点.事实上,以格为赋值集的逻辑系统早已有之[8],文献[9,10]研究了基于格蕴涵代数的格值逻辑上的推理理论.另一方面,关于逻辑推理的程度化方法也被提出.1979年Pavelka在他的系列文章[11]中对几乎所有的概念进行了程度化研究,王国俊教授近期在多值(模糊)逻辑系统上通过在赋值域上定义测度建立了计量逻辑学[12~14],为逻辑系统的程度化推理提供了新方法,并引发了大量后续研究[15~19].文献[20,21]将这种程度化方法推广到有限Boole代数为赋值格的Boole语义上,得到一些有意义的结果.但如何在一般Boole代数赋值格的逻辑系统上进行程度化?目前没有文献涉及.本文受文献[22,23]的启发通过在Boole赋值格和全体命题公

收稿日期:2010-01-30;修回日期:2011-09-28
基金项目:国家自然科学基金(No.51009065);河南省自然科学基金(No.112300410040);河南省教育厅自然科学基金(No.2011A110012);河南省高等学校骨干教师资助计划(No.2011GGJS-097)

式集上分别建立概率测度,利用积分方法提出了 Boole 语义上公式的 B-概率真度的概念,进而在 Boole 语义上建立了概率逻辑度量空间,将计量逻辑学中近似推理方法推广到 Boole 语义上,解决了文献[20]所遗留的问题,完善了 Boole 语义理论的程度化方法.

2 Boole 语义中公式的 B-概率真度

定义 1[8] 设$(\beta,\leqslant)$是具有最大元 1_B 和最小元 0_B 的分配格,如果 β 上有一元运算 $\neg:\beta\to\beta$ 满足条件

$$a\vee\neg a=1_B,a\wedge\neg a=0_B,a\in\beta \tag{1}$$

则 $\neg$ 称为 β 上的补运算,称 β 为 Boole 代数.

在 Boole 代数 β 上可引入蕴涵运算如下:

$$a\to b=\neg a\vee b,a,b\in\beta \tag{2}$$

则 $a\vee b=\neg a\to b$, $a\wedge b=\neg(a\to\neg b)$, $\neg a=a\to 0_B$, $a,b\in\beta$. 并且 Boole 代数 β 成为 R_0 代数[8].

以下恒设 β 是一个 Boole 代数,β_2 是 Boole 代数$\{0,1\}$,用 Θ 表示从 β 到 β_2 的全体格同态之集,则有下述命题成立.

命题 1[22] 设 β 是一个 Boole 代数,$\beta_2=\{0,1\}$,Θ 是全体从 β 到 β_2 的 Boole 格同态之集,则 $a\leqslant b$ 当且仅当 $\forall f\in\Theta,f(a)\leqslant f(b)(a,b\in\beta)$.

设(Θ,A,θ)是均匀概率测度空间,这里 A 满足条件

$$\begin{aligned}&\forall x\in\beta,\Sigma x=\{f\in\Theta\mid f(x)=1\}\in A,\\&\text{且 }\theta(\Sigma x)=1\text{ 等价于 }x=1_B\end{aligned} \tag{3}$$

$\forall x\in\beta$,定义函数 $x:\Theta\to\{0,1\}$为 $x(f)=f(x),f\in\Theta$,

由式(3)条件知函数 x 是(Θ,A,θ)上的可测函数,则函数 x 是关于θ-可积的[23].

定义 2 定义 $\phi:\beta\to[0,1]$如下

$$\phi(x)=\int_\Theta x(f)\mathrm{d}\theta,x\in\beta \tag{4}$$

则称 $\phi(x)$为 x 的特征数.

例 1 考虑菱形格 Boole 代数 β_3,即 $\beta_3=\{0,a,b,1\}$,其中 $\neg a=b$, $\neg b=a$, $\neg 0=1$, $\neg 1=0$, $a\vee b=1$, $a\wedge b=0$. 易证 $\Theta=\{f_1,f_2\}$,其中 $f_1(a)=f_2(b)=1,f_1(b)=f_2(a)=0,f_i(1)=1,f_i(0)=0,i=1,2$. 由 θ 是Θ 上的均匀概率测度知,$\theta(f_1)=\theta(f_2)=1/2$,计算得,$\phi(1)=1,\phi(0)=0,\phi(a)=\phi(b)=1/2$. 更一般地,可以证明对于有限 Boole 代数 β 中的元素 x,本文定义的 x 的特征数与文献[20]中元素 x 的层是相等的.

命题 2

(1)$0\leqslant\phi(x)\leqslant 1,x\in\beta$.

(2)$\phi(1_B)=1,\phi(0_B)=0$,这里 1_B 和 0_B 分别是β 的最大元和最小元.

(3)$\phi(\neg x)=1-\phi(x),x\in\beta$.

(4)若 $x\leqslant y$,则 $\phi(x)\leqslant\phi(y),x,y\in\beta$.

(5)$\phi(x\vee y)=\phi(x)+\phi(y)-\phi(x\wedge y),x,y\in\beta$.

证明 命题 2 的(1)~(4)是自明的,命题 2 的(5)参见文献[22]中命题 3 的证明.

设 $S=\{q_1,q_2,\cdots\}$为原子公式集,$F(S)$是由 S 生成的$(\neg,\to)$型自由代数,这里 $\neg$ 和$\to$分别是 $F(S)$上的否定和蕴涵逻辑联结词. 称 $F(S)$中的元为命题(或公式).

定义 3[20]

(1)设 β 是 Boole 代数,则称$(\neg,\to)$型同态 $v:F(S)\to\beta$ 为 $F(S)$的 B-赋值,即 $v(\neg A)=\neg v(A),v(A\to B)=v(A)\to v(B),A,B\in F(S)$.

$F(S)$的 B-赋值的全体之集记为Ω.

(2)设 $A\in F(S)$,若$\forall v\in\Omega$ 恒有 $v(A)=1_B$,则称 A 为 B-重言式;若$\forall v\in\Omega$ 恒有 $v(A)=0_B$,则称 A 为 B-矛盾式.

由 $F(S)$是由 S 生成的自由代数知 v 由它在 S 上的限制所完全决定.

命题 3[20] 设 $A\in F(S)$,β 是有限 Boole 代数,则 A 为 B-重言式当且仅当 A 为重言式;A 为 B-矛盾式当且仅当 A 为矛盾式.

定义 4 $\forall A\in F(S)$,定义广义 Boole 函数 $\bar{A}:\Omega\to\beta$ 如下

$$\bar{A}(\upsilon)=\upsilon(A),\upsilon\in\Omega \tag{5}$$

设(Ω,F,μ)是概率测度空间,这里 F 满足

$$\begin{aligned}&\forall A\in F(S),\phi(\bar{A})\text{是可测函数,即}\\&(\bar{A}\circ\phi)^{-1}(B_{[0,1]})\subset F\end{aligned} \tag{6}$$

其中 $\phi(\cdot)$是特征数函数,$B_{[0,1]}$是单位区间$[0,1]$上的 Borel 集合系. 则$\forall A\in F(S)$,函数 $\phi(\bar{A})$是 μ-可积的.

定义 5 $\forall A\in F(S)$,定义 $\tau:F(S)\to[0,1]$如下

$$\tau(A)=\int_\Omega\phi(\bar{A}(\upsilon))\mathrm{d}\mu \tag{7}$$

其中 $\phi(\cdot)$是特征数函数,称 $\tau(A)$为公式 A 的 B-概率真度,又简称为 μ-真度.

适当选取概率测度 μ 可将文献[20,21]中公式的真度作为上述定义的特例而导出.

定理 1 设 $A,B\in F(S)$,则

(1)$0\leqslant\tau(A)\leqslant 1$.

(2)A 是 B-重言式当且仅当$\tau(A)=1$,A 是 B-矛盾式当且仅当$\tau(A)=0$.

(3)若$\vdash A\to B$,则 $\tau(A)\leqslant\tau(B)$.

(4)若 $A\approx B$,则 $\tau(A)=\tau(B)$.

(5)$\tau(\neg A)=1-\tau(A)$.

(6)$\tau(A\vee B)=\tau(A)+\tau(B)-\tau(A\wedge B)$.

(7)$\tau(A)+\tau(A\to B)=\tau(B)+\tau(B\to A)$.

证明

(1)显然.

(2)A 是 B-重言式当且仅当$\forall v\in\Omega,\bar{A}(\upsilon)=\upsilon(A)$

$=1_B$,即 $\phi(\bar{A}(\upsilon))=\phi(1_B)=1$,即 $\tau(A)=\int_\Omega \phi(\bar{A}(\upsilon))\mathrm{d}\mu=\int_\Omega \mathrm{d}\mu=1$.同理,可证后面的结论.

(3)若 $\vdash A\to B$,则 $\forall v\in\Omega$,$\bar{A}(\upsilon)=\upsilon(A)\leqslant\upsilon(B)=\bar{B}(\upsilon)$,由命题 2 的(4)知,$\phi(\bar{A}(\upsilon))\leqslant\phi(\bar{B}(\upsilon))$,则 $\tau(A)\leqslant\tau(B)$.

(4)若 $A\approx B$,即 $\vdash A\to B$ 且 $\vdash B\to A$,由定理 1 的(3)知 $\tau(A)\leqslant\tau(B)$ 且 $\tau(B)\leqslant\tau(A)$,则 $\tau(A)=\tau(B)$.

(5)由命题 2 的(3),有 $\forall v\in\Omega$,$\phi(\overline{\neg A}(\upsilon))=1-\phi(\bar{A}(\upsilon))$,从而 $\tau(\neg A)=\int_\Omega\phi(\overline{\neg A}(\upsilon))\mathrm{d}\mu=\int_\Omega(1-\phi(\bar{A}(\upsilon)))\mathrm{d}\mu=1-\tau(A)$.

(6)由命题 2 的(5),有 $\forall v\in\Omega$,$\phi(\overline{A\vee B}(\upsilon))=\phi(\bar{A}(\upsilon))+\phi(\bar{B}(\upsilon))-\phi(\overline{A\wedge B}(\upsilon))$,从而 $\tau(A\vee B)=\int_\Omega\phi(\overline{A\vee B}(\upsilon))\,\mathrm{d}\mu=\int_\Omega(\phi(\bar{A}(\upsilon))+\phi(\bar{B}(\upsilon))-\phi(\overline{A\wedge B}(\upsilon)))\mathrm{d}\mu=\tau(A)+\tau(B)-\tau(A\wedge B)$.

(7)由定理 1 的(6)知,$\tau(A)+\tau(A\to B)=\tau(A)+\tau(\neg A\vee B)=\tau(A\vee(\neg A\vee B))+\tau(A\wedge(\neg A\vee B))=1+\tau(A\wedge B)$,和 $\tau(B)+\tau(B\to A)=\tau(B)+\tau(\neg B\vee A)=\tau(B\vee(\neg B\vee A))+\tau(B\wedge(\neg B\vee A))=1+\tau(B\wedge A)=1+\tau(A\wedge B)$,得证.

在 Boole 语义中有相应于多值逻辑中程度化的 Modus Ponens 和 Hypothetical Syllogism 规则.

定理 2　设 $A,B,C\in F(S)$,$\alpha,\beta\in[0,1]$,则

(1)若 $\tau(A)\geqslant\alpha$,$\tau(A\to B)\geqslant\beta$,则 $\tau(B)\geqslant\alpha+\beta-1$.或令 $\alpha\otimes\beta=\max\{\alpha+\beta-1,0\}$,则上式为 $\tau(B)\geqslant\tau(A)\otimes\tau(A\to B)$.

(2)若 $\tau(A\to B)\geqslant\alpha$,$\tau(B\to C)\geqslant\beta$,则 $\tau(A\to C)\geqslant\alpha+\beta-1$.即 $\tau(A\to C)\geqslant\tau(A\to B)\otimes\tau(B\to C)$.

证明

(1)由定理 1 得 $\beta\leqslant\tau(A\to B)=\tau(\neg A\vee B)=\tau(\neg A)+\tau(B)-\tau(\neg A\wedge B)$,所以由 $\tau(\neg A\wedge B)\geqslant 0$ 得 $\tau(B)\geqslant\beta-1+\tau(A)\geqslant\alpha+\beta-1$.

(2)注意到在 Boole 代数中,对于 $a,b,c\in\beta$ 有 $(a\to b)\wedge(b\to c)\leqslant a\to c$ 和 $(a\to b)\vee(b\to c)=1_B$ 成立[15],则 $\forall v\in\Omega$,有 $\overline{(A\to B)\wedge(B\to C)}(\upsilon)\leqslant\overline{A\to C}(\upsilon)$ 和 $\overline{(A\to B)\vee(B\to C)}(\upsilon)=1_B$.则 $\phi(\overline{(A\to B)\wedge(B\to C)}(\upsilon))\leqslant\phi(\overline{A\to C}(\upsilon))$ 和 $\phi(\overline{(A\to B)\vee(B\to C)}(\upsilon))=1$.由命题 2 及定义 5 知,$\tau((A\to B)\wedge(B\to C))\leqslant\tau(A\to C)$,所以 $1=\tau(1_B)=\tau((A\to B)\vee(B\to C))=\tau(A\to B)+\tau(B\to C)-\tau((A\to B)\wedge(B\to C))\geqslant\alpha+\beta-\tau(A\to C)$,结论成立.

推论 1

(1)若 $\tau(A)=\tau(A\to B)=1$,则 $\tau(B)=1$.

(2)若 $\tau(A\to B)=\tau(B\to C)=1$,则 $\tau(A\to C)=1$.

3　Boole 语义上的概率相似度

定义 6　设 $A,B\in F(S)$,定义 $\xi_1:F(S)\times F(S)\to[0,1]$如下

$$\xi_1(A,B)=\tau((A\to B)\wedge(B\to A)),A,B\in F(S)\quad(8)$$

则称 $\xi_1(A,B)$为公式 A 与 B 之间的第一种 B-概率相似度,简称 ξ_1-相似度.

定理 3　$\xi_1(A,B)=\tau(A\wedge B)+\tau(\neg A\wedge\neg B)$,$A,B\in F(S)$.

证明　在 Boole 代数中,$\forall a,b\in\beta$ 有 $(a\to b)\wedge(b\to a)=(\neg a\vee b)\wedge(\neg b\vee a)=(a\wedge b)\vee(\neg a\wedge\neg b)$,所以 $\forall v\in\Omega$,有 $\phi(\overline{(A\to B)\wedge(B\to A)}(\upsilon))=\phi(\overline{(A\wedge B)\vee(\neg A\wedge\neg B)}(\upsilon))=\phi(\overline{A\wedge B}(\upsilon))+\phi(\overline{\neg A\wedge\neg B}(\upsilon))-\phi(\overline{(A\wedge B)\wedge(\neg A\wedge\neg B)}(\upsilon))=\phi(\overline{A\wedge B}(\upsilon))+\phi(\overline{\neg A\wedge\neg B}(\upsilon))$.由定义 5 知结论成立.

定理 4　设 $A,B,C\in F(S)$,则

(1)$\xi_1(A,A)=1$;$\xi_1(A,B)=\xi_1(B,A)$.

(2)$\xi_1(A,B)=1$ 当且仅当 $A\approx B$.

(3)$\xi_1(A,\neg A)=0$.

(4)$\xi_1(A,B)=\xi_1(\neg A,\neg B)$.

(5)$\xi_1(A,B)+\xi_1(A,\neg B)=1$.

(6)$\xi_1(A,B)=\tau(A\to B)+\tau(B\to A)-1$.

(7)$\xi_1(A,C)\geqslant\xi_1(A,B)\otimes\xi_1(B,C)$.

证明　(1),(3)和(4)由定理 3 易证.

(2)由定理 1(2)知,$\xi_1(A,B)=1$ 当且仅当$(A\to B)\wedge(B\to A)$为 B-重言式,当且仅当$(A\to B)$和$(B\to A)$都是 B-重言式,即 $A\approx B$.

(5)由定理 3 知,$\xi_1(A,\neg B)=\tau(A\wedge\neg B)+\tau(\neg A\wedge B)$,又由定理 1(5)知 $\tau(A\wedge B)+\tau(A\wedge\neg B)=\tau(A)$,$\tau(\neg A\wedge B)+\tau(\neg A\wedge\neg B)=\tau(\neg A)$,所以 $\xi_1(A,B)+\xi_1(A,\neg B)=\tau(A)+\tau(\neg A)=1$.

(6)因为$(A\to B)\vee(B\to A)$是 B-重言式,由定理 1 知 $1=\tau((A\to B)\vee(B\to A))=\tau(A\to B)+\tau(B\to A)-\tau((A\to B)\wedge(B\to A))$,从而,结论成立.

(7)设 $x,y,z\in\beta_2=\{0,1\}$,有$(x\to z)\wedge(z\to x)\geqslant(x\to y)\wedge(y\to x)+(y\to z)\wedge(z\to y)-1$[16].则 $a,b,c\in\beta$ 和 $f\in\Theta$,有$((a\to c)\wedge(c\to a))(f)=f((a\to c)\wedge(c\to a))=(f(a)\to f(c))\wedge(f(c)\to f(a))\geqslant(f(a)\to f(b))\wedge(f(b)\to f(a))+(f(b)\to f(c))\wedge(f(c)\to f(b))-1=((a\to b)\wedge(b\to a))(f)+((b\to c)\wedge(c\to b))(f)-1$.

由定义 2 知,$\phi((a\to c)\wedge(c\to a))\geqslant\phi((a\to b)\wedge(b\to a))+\phi((b\to c)\wedge(c\to b))-1$.则 $\forall v\in\Omega$ 和 $A,B,C\in F(S)$,有 $\phi(\overline{(A\to C)\wedge(C\to A)}(\upsilon))\geqslant$

$\phi(\overline{(A\to B)\wedge(B\to A)}(v))+\phi(\overline{(B\to C)\wedge(C\to B)}(v))-1.$

从而，由定义 5 及定义 6 得

$$\begin{aligned}\xi_1(A,C)&\geqslant\tau((A\to B)\wedge(B\to A))\\&\quad+\tau((B\to C)\wedge(C\to B))-1\\&=\xi_1(A,B)+\xi_1(B,C)-1.\end{aligned}$$

为方便下面的讨论，在单位区间$[0,1]$上定义运算：

$$\alpha\odot\beta=\min\{\alpha+\beta,1\},\ \neg\alpha=1-\alpha,\ \alpha,\beta\in[0,1]\quad(9)$$

则$([0,1],\odot,\neg,0)$是 MV 代数，称为标准 MV 代数[23]。并定义如下运算：

$$\alpha\sqcap\beta=\min\{\alpha,\beta\},\qquad \alpha\sqcap\beta=\max\{\alpha,\beta\},$$

$$\alpha\otimes\beta=(\alpha+\beta-1)\sqcup 0,\quad \alpha\vdash\beta=(1-\alpha+\beta)\sqcap 1.$$

可见$(\otimes,\vdash)$构成伴随对.

定义 7　设 $A,B\in F(S)$，定义

$$\xi_2(A,B)=\tau(A\to B)\sqcap\tau(B\to A)\qquad(10)$$

$$\xi_3(A,B)=(\tau(A)\vdash\tau(B))\sqcap(\tau(B)\vdash\tau(A))\quad(11)$$

称 $\xi_i(A,B)$为公式 A 与 B 之间的第 i 种 B-概率相似度，简称为 ξ_i-相似度，$i=2,3$.

定理 5　设 $A,B,C\in F(S)$，$i=2,3$，则

(1)$\xi_i(A,A)=1$；$\xi_i(A,B)=\xi_i(B,A)$.

(2)$\xi_2(A,B)=1$ 当且仅当 $A\approx B$；

若 $A\approx B$ 则$\xi_3(A,B)=1$，但反之不成立.

(3)$\xi_i(A,B)=\xi_i(\neg A,\neg B)$.

(4)$\xi_i(A,C)\geqslant\xi_i(A,B)\otimes\xi_i(B,C)$.

证明　(1)，(2)和(3)由定义 7 容易验证.

(4)对于 ξ_2，由定理 2(2)知，$\tau(A\to C)\geqslant\tau(A\to B)\otimes\tau(B\to C)$及 $\tau(C\to A)\geqslant\tau(C\to B)\otimes\tau(B\to A)=\tau(B\to A)\otimes\tau(C\to B)$，再由 MV 代数的基本性质得

$$\begin{aligned}&\xi_2(A,C)\\&=\tau(A\to C)\sqcap\tau(C\to A)\\&\geqslant(\tau(A\to B)\otimes\tau(B\to C))\sqcap(\tau(B\to A)\otimes\tau(C\to B))\\&=(\tau(A\to B)\sqcap\tau(B\to A))\otimes(\tau(B\to C)\sqcap\tau(C\to B))\\&=\xi_2(A,B)\otimes\xi_2(B,C).\end{aligned}$$

对于 ξ_3，由 MV 代数的基本性质知，$\tau(A)\vdash\tau(C)\geqslant(\tau(A)\vdash\tau(B))\otimes(\tau(B)\vdash\tau(C))$及 $\tau(C)\vdash\tau(A)\geqslant(\tau(C)\vdash\tau(B))\otimes(\tau(B)\vdash\tau(A))=(\tau(B)\vdash\tau(A))\otimes(\tau(C)\vdash\tau(B))$，所以，

$$\begin{aligned}\xi_3(A,C)&=(\tau(A)\vdash\tau(C))\sqcap(\tau(C)\vdash\tau(A))\\&\geqslant((\tau(A)\vdash\tau(B))\otimes(\tau(B)\vdash\tau(C)))\\&\quad\sqcap((\tau(B)\vdash\tau(A))\otimes(\tau(C)\vdash\tau(B)))\\&=((\tau(A)\vdash\tau(B))\sqcap(\tau(B)\vdash\tau(A)))\\&\quad\otimes((\tau(B)\vdash\tau(C))\sqcap(\tau(C)\vdash\tau(B)))\\&=\xi_3(A,B)\otimes\xi_3(B,C).\end{aligned}$$

以上三种概率相似度有如下关系.

定理 6　$\xi_1(A,B)\leqslant\xi_2(A,B)\leqslant\xi_3(A,B)$，$A,B\in F(S)$.

证明　注意到$\vdash((A\to B)\wedge(B\to A))\to(A\to B)$且$\vdash((A\to B)\wedge(B\to A))\to(B\to A)$，由定理 1(3)及定义 5 得，$\xi_1(A,B)=\tau((A\to B)\wedge(B\to A))\leqslant\tau(A\to B)$且 $\xi_1(A,B)\leqslant\tau(B\to A)$，则 $\xi_1(A,B)\leqslant\tau(A\to B)\sqcap\tau(B\to A)=\xi_2(A,B)$.

由定理 2(1)的结论及伴随对$(\otimes,\vdash)$的性质，知 $\tau(A\to B)\leqslant\tau(A)\vdash\tau(B)$，同样 $\tau(B\to A)\leqslant\tau(B)\vdash\tau(A)$. 所以，$\xi_2(A,B)=\tau(A\to B)\sqcap\tau(B\to A)\leqslant(\tau(A)\vdash\tau(B))\sqcap(\tau(B)\vdash\tau(A))=\xi_3(A,B)$.

更进一步有：

定理 7　$\xi_2(A,B)=\dfrac{1}{2}(\xi_1(A,B)+\xi_3(A,B))$，$A,B\in F(S)$.

证明　利用 $\alpha\sqcap\beta=\dfrac{1}{2}((\alpha+\beta)-|\alpha-\beta|)$，$\alpha,\beta\in[0,1]$，有

$$\begin{aligned}2\xi_2(A,B)&=2\tau(A\to B)\sqcap\tau(B\to A)\\&=(\tau(A\to B)+\tau(B\to A))\\&\quad-|\tau(A\to B)-\tau(B\to A)|\\&=1+\tau((A\to B)\wedge(B\to A))\\&\quad-|\tau(\neg A\vee B)-\tau(\neg(\neg A\wedge B))|\\&=1+\xi_1(A,B)-|\tau(\neg A)+\tau(B)\\&\quad-\tau(\neg A\wedge B)-(1-\tau(\neg A\wedge B))|\\&=\xi_1(A,B)+1-|\tau(A)-\tau(B)|\\&=\xi_1(A,B)+\xi_3(A,B)\end{aligned}$$

最后一步用到了 $\xi_3(A,B)=(\tau(A)\vdash\tau(B))\sqcap(\tau(B)\vdash\tau(A))=(1-\tau(A)+\tau(B))\sqcap(1-\tau(B)+\tau(A))=1-|\tau(A)-\tau(B)|$.

4　Boole 语义上的概率逻辑度量空间

基于 Boole 语义上的 B-概率相似度可自然地在 $F(S)$上引入逻辑伪度量.

定义 8　定义 $\rho_i:F(S)\times F(S)\to[0,1]$如下

$$\rho_i(A,B)=1-\xi_i(A,B),\ A,B\in F(S),\ i=1,2,3\qquad(12)$$

则由定理 4 知 ρ_i 是 $F(S)$上的伪度量，称$(F(S),\rho_i)$是 Boole 语义的第 i 种概率逻辑度量空间，简称 ρ_i-度量空间.

由前面的知识容易得到下面的定理.

定理 8　设 $A,B,C\in F(S)$，$i=1,2,3$，则

(1)$\rho_i(A,A)=0$，$0\leqslant\rho_i(A,B)\leqslant1$.

(2)$\rho_i(A,B)=\rho_i(B,A)=\rho_i(\neg A,\neg B)$.

(3)$\rho_i(A,C)\leqslant\rho_i(A,B)+\rho_i(B,C)$.

(4)$\rho_1(A,\neg A)=1$，$\rho_1(A,B)+\rho_1(A,\neg B)=1$.

(5)$\rho_1(A,B)=\tau(A\vee B)-\tau(A\wedge B)$

$$= 2 - \tau(A \to B) - \tau(B \to A).$$

(6) $\rho_3(A, B) = \tau(A) \sqcup \tau(B) - \tau(A) \sqcap \tau(B)$
$= |\tau(A) - \tau(B)|$

(7) $\rho_3(A, B) \leqslant \rho_2(A, B) \leqslant \rho_1(A, B)$.

(8) $\rho_2(A, B) = \frac{1}{2}(\rho_1(A, B) + \rho_3(A, B))$.

下面我们讨论逻辑运算 $\neg, \vee, \wedge, \to$ 等在概率逻辑度量空间 $(F(S), \rho_i)$ 上的一致连续性.

引理 1　设 $A, B, C, D \in F(S)$, $\alpha, \beta \in [0, 1]$, 若 $\rho_1(A, B) \leqslant \alpha$, $\rho_1(C, D) \leqslant \beta$, 则 $\rho_1(A \to C, B \to D) \leqslant \alpha + \beta$.

证明　由定理 1(6)和定理 8(5)有

$$\begin{aligned}
&\rho_1(A \to C, B \to C) \\
&= \rho_1(\neg A \vee C, \neg B \vee C) \\
&= \tau((\neg A \vee C) \vee (\neg B \vee C)) - \tau((\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee C)) \\
&= \tau((\neg A \vee \neg B) \vee C) - \tau((\neg A \wedge \neg B) \vee C) \\
&= (\tau(\neg(A \wedge B)) + \tau(C) - \tau(\neg(A \wedge B) \wedge C)) \\
&\quad - (\tau(\neg(A \vee B)) + \tau(C) - \tau(\neg(A \vee B) \wedge C)) \\
&= (\tau(A \vee B) - \tau(A \wedge B)) + (\tau(\neg(A \vee B) \wedge C) \\
&\quad - \tau(\neg(A \wedge B) \wedge C)) \\
&= \rho_1(A, B) + (\tau(\neg(A \vee B) \wedge C) - \tau(\neg(A \wedge B) \wedge C)) \\
&\leqslant \rho_1(A, B).
\end{aligned}$$

其中最后一步用到如下结果:因为 $\vdash A \wedge B \to A \vee B$, 所以 $\vdash (\neg(A \vee B) \wedge C) \to (\neg(A \wedge B) \wedge C)$, 由定理 1(3)知 $\tau(\neg(A \vee B) \wedge C) - \tau(\neg(A \wedge B) \wedge C) \leqslant 0$.

类似地,可得 $\rho_1(B \to C, B \to D) \leqslant \rho_1(C, D)$. 利用定理 8(3)得 $\rho_1(A \to C, B \to D) \leqslant \rho_1(A \to C, B \to C) + \rho_1(B \to C, B \to D) \leqslant \rho_1(A, B) + \rho_1(C, D) \leqslant \alpha + \beta$.

定理 9　概率逻辑度量空间 $(F(S), \rho_1)$ 上运算 $\neg, \vee, \wedge, \to$ 关于 ρ_1 都是一致连续的.

证明　设 ε 是任意给定的正数,由定理 8(2)知,当 $\rho_1(A, B) < \varepsilon$ 时,有 $\rho_1(\neg A, \neg B) = \rho_1(A, B) < \varepsilon$, 所以补运算 $\neg$ 关于 ρ_1 是一致连续的.

现在设 $\rho_1(A, B) < \varepsilon$, $\rho_1(C, D) < \varepsilon$, 则由引理 1 知, $\rho_1(A \to C, B \to D) \leqslant 2\varepsilon$, 则蕴涵运算 $\to$ 是一致连续的. 因为 $A \vee B = \neg A \to B$, $A \wedge B = \neg(\neg A \vee \neg B)$, 所以运算 $\vee, \wedge$ 也都是一致连续的.

引理 2　设 $A, B, C, D \in F(S)$, $\alpha, \beta \in [0, 1]$, 若 $\rho_2(A, B) \leqslant \alpha$, $\rho_2(C, D) \leqslant \beta$, 则 $\rho_2(A \to C, B \to D) \leqslant \alpha + \beta$.

证明　在 Boole 代数中有如下关系式成立: $\forall a, b, c \in \beta$, $a \to b \leqslant (b \to c) \to (a \to c)$. 则 $\forall v \in \Omega$, 有

$$\phi(\overline{A \to B}(v)) \leqslant \phi(\overline{(B \to C) \to (A \to C)}(v)),$$

同理, $\phi(\overline{B \to A}(v)) \leqslant \phi(\overline{(A \to C) \to (B \to C)}(v))$. 从而, $\tau(A \to B) \leqslant \tau((B \to C) \to (A \to C))$, $\tau(B \to A) \leqslant \tau((A \to C) \to (B \to C))$, 则 $\tau(A \to B) \sqcap \tau(B \to A) \leqslant \tau((B \to C) \to (A \to C)) \sqcap \tau((A \to C) \to (B \to C))$, 即

$$\xi_2(A \to C, B \to C) \geqslant \xi_2(A, B) \geqslant 1 - \alpha.$$

同理可证, $\xi_2(B \to C, B \to D) \geqslant \xi_2(C, D) \geqslant 1 - \beta$. 所以,由定理 5(4)得

$$\begin{aligned}
&\xi_2(A \to C, B \to D) \\
&\geqslant \xi_2(A \to C, B \to C) + \xi_2(B \to C, B \to D) - 1 \\
&\geqslant \xi_2(A, B) + \xi_2(C, D) - 1 \geqslant 1 - (\alpha + \beta).
\end{aligned}$$

再利用定义 8,得证.

定理 10　概率逻辑度量空间 $(F(S), \rho_2)$ 上运算 $\neg, \vee, \wedge, \to$ 关于 ρ_2 都是一致连续的.

可见伪度量 ρ_1 与 ρ_2 有很多相同的性质,事实上二者是相互等价的伪度量.

定理 11　在 $F(S)$ 上 ρ_1 与 ρ_2 是等价的伪度量.

证明　因为 $\forall A, B \in F(S)$, $\rho_2(A, B) \leqslant \rho_1(A, B)$, 为证其等价只需证:当 $\lim\limits_{n \to \infty} \rho_2(A_n, B_n) = 0$ 时 $\lim\limits_{n \to \infty} \rho_1(A_n, B_n) = 0$.

事实上,由定理 8(7)知 $\rho_3(A_n, B_n) \leqslant \rho_2(A_n, B_n)$, 则 $\lim\limits_{n \to \infty} \rho_3(A_n, B_n) = 0$. 又由定理 8(8)知 $\rho_1(A_n, B_n) = 2\rho_2(A_n, B_n) - \rho_3(A_n, B_n)$, 从而, $\lim\limits_{n \to \infty} \rho_1(A_n, B_n) = 0$. 得证.

定理 12　概率逻辑度量空间 $(F(S), \rho_3)$ 上运算 $\neg$ 是一致连续的,但 $\vee, \wedge, \to$ 关于 ρ_3 不连续.

证明　$\forall \varepsilon > 0$, 若 $\rho_3(A, B) < \varepsilon$ 时,有 $\rho_3(\neg A, \neg B) = \rho_3(A, B) < \varepsilon$, 即补运算 $\neg$ 关于 ρ_3 是一致连续的.

举例说明 $\vee, \wedge, \to$ 关于 ρ_3 不连续. 令 $A = q_1$, $B = q_2$, $C = D = q_3$, μ 是均匀概率测度,可见 $\rho_3(A, C) = \rho_3(B, D) = 0 < \varepsilon$, 但 $\rho_3(A \vee B, C \vee D) = \rho_3(q_1 \vee q_2, q_3) > 0$, $\rho_3(A \wedge B, C \wedge D) = \rho_3(q_1 \wedge q_2, q_3) > 0$, $\rho_3(A \to B, C \to D) = \rho_3(q_1 \to q_2, 1_B) > 0$. 即 $\vee, \wedge, \to$ 关于 ρ_3 不连续.

下面初步研究 Boole 语义中理论的发散度及近似推理理论.

定义 9　设 Γ 是 $F(S)$ 中的理论,即 $\Gamma \subset F(S)$, 令

$$\mathrm{div}_i(\Gamma) = \sup\{\rho_i(A, B) \mid A, B \in D(\Gamma)\},\ i = 1, 2, 3 \tag{13}$$

称 $\mathrm{div}_i(\Gamma)$ 为理论 Γ 的第 i 种 B-概率发散度,简称 i-发散度.

定理 13　设 $\Gamma \subset F(S)$, 则 $\mathrm{div}_1(\Gamma) = \mathrm{div}_2(\Gamma) = \mathrm{div}_3(\Gamma) = 1 - \inf\{\tau(B) \mid B \in D(\Gamma)\}$.

证明　设 $T = \{A \mid \tau(A) = 1\}$ 为全体 B-重言式之集,对于 $\Gamma \subset F(S)$, 若 $A \in T$ 则 $A \in D(\Gamma)$, 从而

$$\mathrm{div}_i(\Gamma) = \sup\{\rho_i(A, B) \mid A, B \in D(\Gamma)\}$$

$= \sup\{\rho_i(A,B) \mid A\in T, B\in D(\Gamma)\}$.

所以,由定理 4 得

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}_1(\Gamma) &= \sup\{\rho_1(A,B) \mid A\in T, B\in D(\Gamma)\}\\
&= \sup\{\tau(A\vee B)-\tau(A\wedge B) \mid A\in T, B\in D(\Gamma)\}\\
&= \sup\{1-\tau(B) \mid B\in D(\Gamma)\} = 1-\inf\{\tau(B) \mid B\in D(\Gamma)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}_3(\Gamma) &= \sup\{\rho_3(A,B) \mid A\in T, B\in D(\Gamma)\}\\
&= \sup\{|\tau(A)-\tau(B)| \mid A\in T, B\in D(\Gamma)\}\\
&= \sup\{1-\tau(B) \mid B\in D(\Gamma)\}\\
&= 1-\inf\{\tau(B) \mid B\in D(\Gamma)\}
\end{aligned}$$

即 $\mathrm{div}_1(\Gamma)=\mathrm{div}_3(\Gamma)=1-\inf\{\tau(B)\mid B\in D(\Gamma)\}$.再由定理 8(7)利用两边夹定理可得结论成立.

可见在三个$(F(S),\rho_i)$上有相同的理论发散度,统一表示为 $\mathrm{div}(\Gamma)$.若 $\mathrm{div}(\Gamma)=1$,称 Γ 是全发散的.

定义 10 设 Γ 是 $F(S)$中的理论,$B\in F(S)$,$\varepsilon>0$.

(1)如果 $\rho(B,D(\Gamma))=\inf\{\rho_1(A,B)\mid A\in D(\Gamma)\}<\varepsilon$,则称 B 为 Γ 的 I-型误差小于 ε 的结论,简记为 $B\in D_\varepsilon^1(\Gamma)$.

(2)如果 $1-\sup\{\tau(A\to B)\mid A\in D(\Gamma)\}<\varepsilon$,则称 B 为 Γ 的 II-型误差小于 ε 的结论,简记为 $B\in D_\varepsilon^2(\Gamma)$.

(3)如果 $\inf\{H(D(\Gamma),D(\Sigma))\mid\Sigma\subset F(S),\Sigma\vdash(B\}<\varepsilon$,则称 B 为 Γ 的 III-型误差小于 ε 的结论,简记为 $B\in D_\varepsilon^3(\Gamma)$.这里 H 是 $P(F(S))-\{\varnothing\}$上的 Hausdroff 距离.

定理 14 设 Γ 是 $F(S)$中的理论,$A\in F(S)$,$\varepsilon>0$,则

(1)$A\in D_\varepsilon^1(\Gamma)$当且仅当 $A\in D_\varepsilon^2(\Gamma)$.

(2)若 $A\in D_\varepsilon^3(\Gamma)$,则 $A\in D_\varepsilon^1(\Gamma)$,$A\in D_\varepsilon^2(\Gamma)$.

证明

(1)首先证明必要性.设 $A\in D_\varepsilon^1(\Gamma)$,由定义 10(1)可知存在 $C\in D(\Gamma)$使得 $\rho_1(A,C)<\varepsilon$,又由 $\rho_1(A,C)=2-\tau(A\to C)-\tau(C\to A)\geqslant 1-\tau(C\to A)$,所以 $1-\sup\{\tau(B\to A)\mid B\in D(\Gamma)\}\leqslant 1-\tau(C\to A)<\varepsilon$.因此 $A\in D_\varepsilon^2(\Gamma)$.

再证明充分性.又设 $A\in D_\varepsilon^2(\Gamma)$,则存在 $C\in D(\Gamma)$使得 $1-\tau(C\to A)<\varepsilon$,由 $C\to(C\vee A)$为 B-重言式及 MP 规则可知 $C\vee A\in D(\Gamma)$.又 $\rho_1(A,C\vee A)=1-\tau(C\to A)$,所以 $\rho(A,D(\Gamma))\leqslant\rho_1(A,C\vee A)=1-\tau(C\to A)<\varepsilon$,充分性得证.

(2)若 $A\in D_\varepsilon^3(\Gamma)$,则存在 $\Sigma_0\subset F(S)$使得 $\Sigma_0\vdash A$ 且 $H(D(\Gamma),D(\Sigma_0))<\varepsilon$,这时 $A\in D(\Sigma_0)$,所以 $\rho(A,D(\Gamma))\leqslant H(D(\Gamma),D(\Sigma_0))<\varepsilon$,即 $A\in D_\varepsilon^1(\Gamma)$.由(1)知后者也成立.

5 结束语

本文基于 B-赋值理论利用测度论和积分方法提出了一般 Boole 代数赋值格命题逻辑中公式的 B-概率真度,研究了 Boole 语义上的计量逻辑学的有关性质,完善了 Boole 语义的程度化方法.可以看到本文的方法具有一般性,对诸如以 MV 代数、R_0 代数等逻辑代数为赋值格的命题逻辑系统的程度化可类似研究,有关工作将另文讨论.

参考文献

[1] Hamilton A G. Logic for Mathematicians[M]. London: Cambridge University Press, 1978.

[2] Epstein G. Multiple-Valued Logic Design[M]. London: IOP Publishing Ltd, 1993.

[3] U Höhle. Commutative, Residuated l-Monoids[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1995.

[4] Hájek P. Mathematics of Fuzzy Logic[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1998.

[5] Esteva F, Godo L. Monoidal t-norm based logic: Towards a logic for left-continuous *t*-norms[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 124(3): 271 – 288.

[6] 王国俊.模糊命题演算的一种形式化演绎系统[J].科学通报,1997,42(10):1041 – 1045.
Wang Guojun. A formal deduction system for fuzzy propositional calculus[J]. Chinese Science Bulletin, 1997, 42(10): 1041 – 1045. (in Chinese)

[7] Pei D W. On equivalent forms of fuzzy logic system NM and IMTL[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2003, 138(1): 187 – 195.

[8] Wang Guojun, Zhou Hongjun. Introduction to Mathematical Logic and Resolution Principle[M]. Beijing: Science Press, Oxford: Alpha Science International Limited, 2009.

[9] 徐扬.格蕴涵代数[J].西南交通大学学报,1993,28(1):20 – 26.
Xu Yang. Lattice implication algrbras[J]. Jounral of Southwest Jiaotong University, 1993, 28(1): 20 – 26. (in Chinese)

[10] Xu Yang, Qin Keyun, Liu Jun. L-valued propositional logic L_{vpl}[J]. Information Scicence, 1999, 114(3): 205 – 235.

[11] Pavelka J. On fuzzy logic(I),(II),(III)[J]. Zeitschr f Math logik u Grundlagen d Math, 1979, 25: 45 – 52, 119 – 134, 447 – 464.

[12] Wang G J, Fu L, Song J S. Theory of truth degrees of propositions in two valued logic[J]. Science in China, Ser A, 2002, 45(9): 1106 – 1116.

[13] Li Bijing, Wang Guojun. Theory of truth degrees of formulas in Lukasiewicz n-valued propositional logic and a limit theorem[J]. Science in China, Ser F, 2005, 48(6): 727 – 736.

[14] Wang Guojun, Zhou Hongjun. Quantitative logic[J]. Information Sciences, 2009, 179(3): 226 – 247.

[15] Wang Guojun, Yee Leung. Integrated semantics and logic metric spaces[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2003, 136(1): 71 –

91.
[16] Zhou Hongjun, Wang Guojun, Zhou Wei. Consistency degrees of theories and methods of graded reasoning in n-valued R_0-logic (NM-logic) [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2006, 43(2): 117 – 132.
[17] Wang Guojun, Hui Xiaojing. Randomization of classical inference patterns and its application [J]. Science in China, Ser F, 2007, 50(6): 867 – 877.
[18] 张东晓,李立峰.二值命题逻辑公式的语构程度化方法[J].电子学报,2008,36(2):325 – 330.
Zhang Dongxiao, Li Lifeng. Syntactic graded method of two-valued propositional logic formulas [J]. Acta Electronica Sinica, 2008, 36(2): 325 – 330. (in Chinese)
[19] 罗敏霞,姚宁.L*系统中公式的语构程度化方法[J].电子学报,2011,39(2):424 – 428.
Luo Minxia, Yao Ning. Syntactic graded method of formulas in the system L* [J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(2): 424 – 428. (in Chinese)
[20] 傅丽,宋建社.经典命题逻辑的 Boole 语义理论[J].模糊系统与数学,2007,21(2):46 – 52.
Fu Li, Song Jianshe. Theory of Boolean semantics of classical propositional logic [J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2007, 21(2): 46 – 52. (in Chinese)
[21] 段景瑶,王国俊.关于 Boole 语义的真度不变性定理[J].模糊系统与数学,2008,22(2):36 – 40.
Duan Jingyao, Wang Guojun. Invariable properties of truth degrees on Boolean semantics [J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2008, 22(2): 36 – 40. (in Chinese)
[22] 王国俊,宋庆燕,宋玉靖.Boole 代数上的度量结构及其在命题逻辑中的应用[J].数学学报,2004,47(2):317 – 326.
Wang Guojun, Song Qingyan, Song Yujing. Metric structures on Boolean algebras and an application to propositional logic [J]. Acta Mathematica Sinica, Chinese Series, 2004, 47(2): 317 – 326. (in Chinese)
[23] 王国俊,周红军.MV 代数的度量化研究及其在 Lukasiewicz 命题逻辑中的应用[J].数学学报,2009,52(3):501 – 514.
Wang Guojun, Zhou Hongjun. Metrization on MV-Algrbras and its Application in Lukasiewicz Propositional Logic [J]. Acta Mathematica Sinica, Chinese Series, 2009, 52(3): 501 – 514. (in Chinese)

作者简介

左卫兵 男,1976 年 3 月生于河南省内黄县,现为华北水利水电学院数学与信息科学学院副教授,主要研究方向为非经典数理逻辑、不确定性推理. E-mail: zuoweibing@ncwu.edu.cn