

电容层析成像图像重构的三阶混合算法

李翠环^{1,2}, 杨晓光¹, 汪友华¹

(1. 河北工业大学电磁场与电器可靠性省部共建重点实验室, 天津 300130; 2. 河北工业大学理学院, 天津 300130)

摘 要: 针对电容层析成像图像重构 Tikhonov 正则参数的选取问题, 提出利用 Morozov 偏差原理确定正则参数, 使其选取与初始数据的观测误差相匹配, 并提出三阶收敛算法与双参数模型相结合的混合算法, 使其选取更加快速、合理. 数值实验表明: 三阶混合算法优于典型的 Newton 方法; 正则参数的选取影响重构图像的精度和速度; 对于各种设定流型, 本文提出的混合算法重构图像速度更快, 重建图像质量更高.

关键词: 电容层析成像; 图像重构; 双参数模型; 三阶算法; Morozov 偏差方程; 混合算法

中图分类号: TN911.73 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2012) 03-0500-05

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.3969/j.issn.0372-2112.2012.03.015

A Three Order Hybrid Algorithm for Electrical Capacitance Tomography

LI Cui-huan^{1,2}, YANG Xiao-guang¹, WANG You-hua¹

(1. Province-Ministry Joint Key Laboratory of Electromagnetic Field and Electrical Apparatus Reliability, Hebei University of Technology, Tianjin 300130, China; 2. Science of Hebei University of Technology, Tianjin 300130, China)

Abstract: To solve the selection problem of Tikhonov regularization parameter in electrical capacitance tomography, A method is proposed to get an optimal regularization parameter using Morozov discrepancy principle, which make the (output) error due to regularization equals the error level in the data. To get an optimal regularization parameter rapidly and reasonably, a hybrid algorithm by combining three-order convergence algorithm and two parameter model is proposed. Numerical experimental results show that regularization parameter selection affects both the reconstruction speed and quality; the proposed hybrid algorithm has high image reconstruction speed and high accuracy for different flow patterns.

Key words: electrical capacitance tomography; image reconstruction; two parameter model; three order algorithm; Morozov discrepancy equation; hybrid algorithm

1 引言

电容层析成像技术 (Electrical Capacitance Tomography, ECT) 是基于电容敏感机理的过程层析成像技术, 是一种主要用于工业管道多相流参数测量的成像系统. 测试原理是: 多相流各相介质具有不同的介电常数, 当各相组分浓度及其分布发生变化时会引起多相流混合流体介电常数分布的变化, 电容测量值随之发生改变. 通过检测安置在容器外的阵列电容器电容值, 并通过适当的图像重建算法把它们转化成反应容器内各项介质的分布图像, 从而获得容器内介质混合物的空间分布信息. 电容层析成像技术作为一种使用较为广泛的层析成像技术, 具有非侵入、结构简单、成本低、响应速度快、安全性能好、适用范围广的优点. 目前电容层析成像系统已在流化床内物料分布、油/气两相流系统、气力输送的

气/固两相流等流型可视化监测中得到应用^[1~5].

电容层析成像得以实际应用的关键问题是图像重构的质量和速度. 目前, 用于 ECT 图像重建的较常用的方法分为非正则化方法和正则化方法. 图像重构本质上是一个不适定问题, 正则化方法抗噪能力较强, 特别适合于求解不适定问题, 而正则参数的选取是正则化方法的关键问题, 直接影响电容层析成像图像重构的速度和质量. 目前正则参数主要靠经验选取^[6~8], 具有一定的随机性和不确定性, 使得正则化方法在实际应用中具有一定的局限性. 因此关于正则参数的选择, 特别是更合理的选取原则和更快捷的数值实现方法, 仍然是有待于进一步加以解决的重要问题.

本文采用 Morozov 偏差原理来决定正则参数, 能使正则参数的确定与原始数据的观测误差相匹配; 其次, 由于在数值上确定正则参数是一个迭代过程, 计算量

比较大^[9],本文提出一个三阶收敛算法与双参数模型相结合确定正则参数的混合算法使其选取更加快速、合理,并进行了数值实验,结果表明方法是高效稳定的。

2 ECT 图像重建原理

ECT 技术包括求解正问题和反问题两部分。ECT 系统的正问题就是由已知的介电常数分布,求出电容敏感阵列各对电极间的电容值。

目前,多数 ECT 图像重构算法采用基于介电常数到电容映射的线性模型,经过离散化、归一化并转化为矩阵形式

$$\lambda = Sg \quad (1)$$

式中 λ 为 $m \times 1$ 维归一化电容测量值矩阵; g 为 $n \times 1$ 维归一化介电常数分布矩阵,在图像重构中表示图像像素灰度值; S 为 $m \times n$ 维归一化灵敏度矩阵。

ECT 反问题也称为图像重构,目的是通过求解方程(1)来获得管道内部的介质分布 g 。在图像重建问题中,存在两个主要的困难。首先,由于独立电容测量值数目 $m(N \times (N-1)/2, N$ 为极板数目)小于离散化的介电常数分布单元数 n ,所以这是个欠定问题,式(1)的解是不唯一的。其次,因为测量电容值的微小扰动,会引起图像灰度值 g 的巨大变化,对于 ECT 图像重构问题,式(1)是一个典型的病态方程。对于这类问题需要施加正则化和先验知识限制以保持解的惟一性和稳定性。处理不适定问题的正则化方法有多种,其中 Tikhonov 正则化是一种通用方法并已应用于 ECT 图像重建。

3 Tikhonov 正则化

Tikhonov 正则化的基本思想是用一组与问题相邻近的适定性问题的解去逼近原问题的解。典型的 Tikhonov 正则化就是在下述展平泛函(smoothing functional)

$$M(\alpha, g) = \|Sg - \lambda\|_Y^2 + \alpha \Omega(g) \quad (2)$$

$$\Omega(g) = \|g\|_X^2 \quad (3)$$

的极小解的集合中,选择适当的元素去近似式(1)的真解。上式中泛函 $\Omega(g)$ 起着恢复原问题解的稳定性的作用,因此也称为稳定泛函,对于同一个求解问题,它的选取不是唯一的(随着对待求解所附加的条件限制而定); α 为正则参数。

式(2)方程的极小解 $g_\delta(\alpha)$ 满足下述 Euler 方程

$$(S^T S + \alpha I)g = S^T \lambda \quad (4)$$

或者变分形式

$$(Sg, Sf) + \alpha(g, f) = (S\lambda, f) \quad (5)$$

其中 I 为单位算子, $f \in X$ 。对于任意常数 $\alpha > 0$,式(4)都是适定的,故问题转化为:选择适当的(即与误差水平相匹配)的参数使得式(4)相应于该参数的解就是式

(1)的解得稳定近似。

4 决定正则参数的混合算法

正则参数的选取是正则化方法的关键问题,直接影响解的精度。较小的 α 可对原始问题给出好的近似,但误差的影响可能使解不稳定;较大的 α 减少了解对误差的敏感性,但估计解通常又偏离真实值,实际应用中应兼顾二者来选取正则参数。理论上存在最优的 α 。

对于具体问题,初始数据的观测误差是固定的,所以,必须选择与误差水平相匹配的正则参数。通常正则参数的选取分成先验(prior)和后验(posterior)两类策略,不少先验的策略具有理论分析的价值,但在实际中常常难以验证赖以使用的条件,因而多采用决定正则参数的后验策略^[10]。

4.1 Morozov 偏差原理

Morozov 偏差原理是目前广泛采用的决定正则参数的后验策略,它要求正则参数 α 的选取与原始数据的观测误差相匹配。即当观测误差 δ 已知时选取 $\alpha = \alpha(\delta)$ 满足

$$\rho(\alpha, \delta) = \|Sg_\delta(\alpha) - \lambda\| = \delta \quad (6)$$

其中 $\rho(\alpha, \delta)$ 称为偏差函数。为讨论方便,式(6)也可以表示成

$$\varphi(\alpha) = \|Sg_\delta(\alpha) - \lambda\|^2 - \delta^2 = 0 \quad (7)$$

上式是关于 α 的非线性、隐式方程,可以采用牛顿法(Newton)求解。虽然牛顿法对于单根具有二阶收敛速率,但是因为:(1)在迭代过程中要反复求解函数值和导数值,计算量比较大;(2)牛顿法是局部收敛的,对于 α 的初始估计值要求比较高,如果初值选取不当可能导致迭代发散。

因此希望:(1)构造具有更高阶收敛速率的算法;(2)用不大的代价提供正则参数尽可能好的初值。

4.2 三阶收敛算法

为提高收敛速率,采用文献[11]中的三阶收敛算法。由 $\varphi(\alpha)$ 关于 α 的无穷次可微性,把 $\varphi(\alpha)$ 在 α_k 做 Taylor 展开

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha) &= \varphi(\alpha_k) + \varphi'(\alpha_k)(\alpha - \alpha_k) \\ &\quad + \frac{\varphi''(\alpha_k)}{2}(\alpha - \alpha_k)^2 + \frac{\varphi'''(\xi_k)}{3!}(\alpha - \alpha_k)^3 \end{aligned} \quad (8)$$

用二次多项式近似 $\varphi(\alpha)$,即

$$\varphi(\alpha) \approx \varphi(\alpha_k) + \varphi'(\alpha_k)(\alpha - \alpha_k) + \frac{\varphi''(\alpha_k)}{2}(\alpha - \alpha_k)^2 \quad (9)$$

所以求解式(7)就是近似求解

$$\varphi(\alpha_k) + \varphi'(\alpha_k)(\alpha - \alpha_k) + \frac{\varphi''(\alpha_k)}{2}(\alpha - \alpha_k)^2 = 0 \quad (10)$$

从而得到迭代格式:

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k + \frac{-\varphi'(\alpha_k) \pm \sqrt{\varphi'(\alpha_k)^2 - 2\varphi(\alpha_k)\varphi''(\alpha_k)}}{\varphi''(\alpha_k)} \quad (11)$$

在选择正负号时,选择使 $(\alpha - \alpha_k)$ 尽量小,即以接近 α_k 的 α 作为 α_{k+1} .为避免出现相近的数相减造成有效数字的流失,导致解的精度降低,把分母有理化,且取正负号与 $\varphi'(\alpha_k)$ 同号,从而可以构造三阶收敛的迭代格式

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k - \frac{2\varphi(\alpha_k)}{\varphi'(\alpha_k) + \text{sign}(\varphi'(\alpha_k))\rho(\alpha_k)} \quad (12)$$

其中

$$\text{sign}(\varphi'(\alpha_k)) = \begin{cases} 1, & \varphi'(\alpha_k) \geq 0 \\ -1, & \varphi'(\alpha_k) < 0 \end{cases} \quad (13)$$

$$\rho(\alpha_k) = \sqrt{\varphi'(\alpha_k)^2 - 2\varphi(\alpha_k)\varphi''(\alpha_k)} \quad (14)$$

$$\varphi'(\alpha_k) = 2(\mathbf{S}\mathbf{g}'_{\delta}(\alpha_k), \mathbf{S}\mathbf{g}'_{\delta}(\alpha_k)) - 2(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{S}\mathbf{g}'_{\delta}(\alpha_k)) \quad (15)$$

在式(5)中令 $\mathbf{f} = \mathbf{g}'_{\delta}(\alpha)$,则可得到

$$\varphi'(\alpha_k) = -2\alpha_k(\mathbf{g}'_{\delta}(\alpha_k), \mathbf{g}'_{\delta}(\alpha_k)) \quad (16)$$

$$\varphi''(\alpha_k) = -2(\mathbf{g}'_{\delta}(\alpha_k), \mathbf{g}'_{\delta}(\alpha_k)) - 2\alpha_k[\|\mathbf{g}'_{\delta}(\alpha_k)\|^2 + (\mathbf{g}'_{\delta}(\alpha_k), \mathbf{g}''_{\delta}(\alpha_k))] \quad (17)$$

由解的无穷次可微的性质可知, $\mathbf{g}'_{\delta}(\alpha)$ 、 $\mathbf{g}''_{\delta}(\alpha)$ 是

$$(\mathbf{S}^T\mathbf{S} + \alpha\mathbf{I})\mathbf{g}'_{\delta}(\alpha) = -\mathbf{g}_{\delta}(\alpha) \quad (18)$$

$$(\mathbf{S}^T\mathbf{S} + \alpha\mathbf{I})\mathbf{g}''_{\delta}(\alpha) = -\mathbf{g}'_{\delta}(\alpha) \quad (19)$$

的解,上述方程只需对式(4)关于 α 求导即可推出.

观察发现式(4)、(18)、(19)具有相同的系数矩阵,因此求解过程中只需要作一次矩阵分解,并进行三次回代,即可求出 $\mathbf{g}_{\delta}(\alpha_k)$ 、 $\mathbf{g}'_{\delta}(\alpha_k)$ 、 $\mathbf{g}''_{\delta}(\alpha_k)$,从而大大节省了计算量.有关收敛性证明可参见文献[11].

4.3 双参数算法

为了获得一个好的 α 的初值,本文将最初用于处理非线性参数识别问题^[9,12]的参数模型(四参数模型)简化成双参数模型,给出双参数算法.

令 $F(\alpha)$ 是式(2)的极小化函数,即

$$F(\alpha) = M(\alpha, \mathbf{g}_{\delta}(\alpha)) = \min M(\alpha, \mathbf{g}) \quad (20)$$

则有

$$F'(\alpha) = \|\mathbf{g}_{\delta}(\alpha)\|^2 \quad (21)$$

偏差方程式(7)可以用 $F(\alpha)$ 表示:

$$\varphi(\alpha) = F(\alpha) - \alpha F'(\alpha) - \delta^2 = 0 \quad (22)$$

双参数算法的基本思想就是将偏差方程式(22)近似为

$$\varphi(\alpha) \approx m(\alpha) - \alpha m'(\alpha) - \delta^2 = 0 \quad (23)$$

$$m(\alpha) = C \frac{\alpha}{T + \alpha} \quad (24)$$

上式是一个带有两个参数 C 、 T 的函数,称其双参

数模型函数.

这样通过确定双参数 C 、 T 可以求出正则参数 α 及正则解 $\mathbf{g}_{\delta}(\alpha)$.

从而有下面的双参数算法

步骤 1 给出初始估计值 α_0, ϵ ,令 $k = 0$;

步骤 2 根据式(20)、(21)计算 $F(\alpha_k)$ 、 $F'(\alpha_k)$;

步骤 3 计算 C_k 、 T_k

$$C_k = \frac{F^2(\alpha_k)}{\alpha_k F'(\alpha_k)} \quad (25)$$

$$T_k = \frac{\alpha_k^2 F'(\alpha_k)}{F(\alpha_k) - \alpha_k F'(\alpha_k)} \quad (26)$$

步骤 4 把

$$m(\alpha) = C_k \frac{\alpha}{T_k + \alpha} \quad (27)$$

$$m'(\alpha) = \frac{C_k T_k}{(T_k + \alpha)^2} \quad (28)$$

代入近似的 Morozov 偏差方程式(23)得到 α_{k+1} .

步骤 5 如果 $|\alpha_{k+1} - \alpha_k| < \epsilon$,迭代终止;否则令 $k = k + 1$ 转步骤 2.

数值实验表明:基于相当粗糙的初始估计值,利用双参数方法,只要迭代一到两步即可得到 α 的初始近似值;但是以后收敛速度就变得很慢,因此可以利用双参数算法作为一个良好的开始策略.对于任意给定的 $\alpha_0 > 0$,用双参数算法迭代一次或者两次,得到一个较好的初值,然后再继续使用三阶收敛方法,可望达到更快的收敛结果.

经过前面的讨论分析,我们把双参数算法和三阶收敛算法相结合,得到下面的混合算法:

(1) 给出正则参数的初始估计值,利用双参数算法作一次或两次迭代;

(2) 将上述算法得到的迭代值作为初值,使用三阶收敛算法继续迭代.

5 数值实验

为验证算法的有效性,采用 12 电极系统对按经验选取和混合算法选取正则参数图像重构的速度和质量进行比较.油/气两相流仿真实验中管道内径 $R_1 = 62\text{mm}$,外径 $R_2 = 75\text{mm}$,屏蔽罩直径 $R_3 = 80\text{mm}$,电极张角 $\theta = 26^\circ$,管内剖分 804 个单元.油的介电常数 $\epsilon_{\text{oil}} = 3$,空气介电常数为 $\epsilon_{\text{gas}} = 1$.迭代过程中迭代误差满足

$$|\varphi(\alpha_k)| \leq \text{eps} \quad (29)$$

eps 为给定精度.重建图像的相对误差

$$e = \frac{\|\mathbf{g}_{\delta} - \mathbf{g}\|}{\|\mathbf{g}\|} \quad (30)$$

\mathbf{g}_{δ} 为重建结果的介质分布, \mathbf{g} 为原始流型的介质分布.

表 1 给出了两种算法对不同初始估计值迭代次数

的比较, $\delta = 0.0001$, $\text{eps} = \delta^2$. 从表中可以看出:

(1)两种算法对于初始估计值 $\alpha = 0.5, 0.1, 0.05$ 收敛;

(2)参数选取影响图像重构的速度, 初值选取适当可使迭代次数减少, 重构速度提高;

(3)和典型的 Newton 法相比, 混合算法具有更快的图像重构速度.

表 1 对不同初值迭代次数的比较

仿真模形	迭代方法	$\alpha_0 = 0.5$	$\alpha_0 = 0.1$	$\alpha_0 = 0.05$
环状流	Newton	> 50	10	> 50
	混合算法	5	4	4
单气泡	Newton	7	6	5
	混合算法	2	2	2
二气泡	Newton	11	10	7
	混合算法	4	3	3
中心流	Newton	11	7	8
	混合算法	4	4	3

图 1 给出了混合算法中初始估计值 $\alpha = 0.1$, $\delta = 0.0001$ 时随迭代次数变化图像相对误差的变化, 从图中可见, 随迭代次数的增加, 图像的相对误差在逐步减小.

图 2 给出了混合算法和按经验选取正则参数图像重构的比较结果, $\delta = 0.0001$, $\text{eps} = \delta^2$. 从图中可以看出: (1)参数的选取影响重构图像的精度; (2)本文提出的混合算法重构出的图像轮廓清晰, 边界伪迹较少, 精度高于按经验选取正则参数重构出的图像的精度.

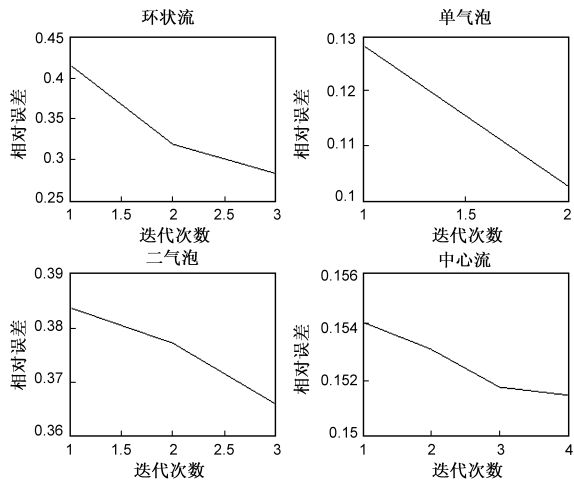


图1 图像相对误差随迭代次数的变化

6 结论

本文基于 Morozov 偏差原理确定正则参数, 提出一种三阶收敛算法与双参数算法相结合的混合算法, 使其选取更加快速合理, 并将混合算法应用于 ECT 图像重构仿真实验. 结果表明: 应用 Tikhonov 正则化进行图像重建, 正则参数的选取至关重要, 直接影响重构图像

的精度和速度; 文中提出的混合算法在图像重构的速度和精度上均具有较大的优势, 克服了经验选取正则参数的随机性和不确定性, 为 ECT 图像重构中 Tikhonov 正则参数的选择提供了一种有效的方法.

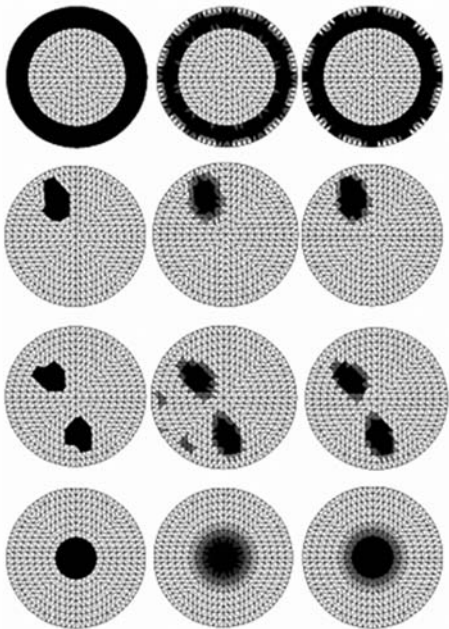


图2 仿真模型与重构图像比较

参考文献

[1] XIE C G, HUANG S M, HOYLE B S, et al. Electrical capacitance tomography for flow imagines-system model for development of image reconstruction algorithms and design of primary sensors [J]. IEE Proceedings G, 1992, 139(1): 89 - 98.

[2] JAWORSKIA J, DYAKOW SKI T. Application of electrical capacitance tomography for measurement of gas-solid flow characteristics in a pneumatic conveying system [J]. Measurement Science and Technology, 2001, 12 (8): 89 - 98.

[3] Shi Liu, Jingtao Li, Qi Chen. Visualization of flow pattern in thermosyphon by ECT [J]. Flow Measurement and Instrumentation, 2007, 18(5/6): 216 - 222.

[4] YANG W Q, PENG L H. Image reconstruction algorithms for electrical capacitance tomography [J]. Meas Sci Technol, 2003, 14(1): 1 - 13.

[5] 郭红星, 余胜生, 保宗悌, 王延平. 电容层析成像的电场分布于反演[J]. 电子学报, 2002, 30(1): 62 - 65.

GUO Hong-xing, YU Sheng-sheng, BAO Zong-ti, WANG Yan-ping. Electric field distributions and inversions for electrical capacitance tomography [J]. Acta Electronica Sinica, 2002, 30 (1): 62 - 65. (in Chinese)

[6] 陈宇, 陈德运, 王莉莉, 等. 基于多项式加速的电容层析成像图像重建算法[J]. 仪器仪表学报, 2008, 29(12): 2538 -

2542.

Chen Y, Chen D Y, Wang L, et al. Image reconstruction algorithm accelerated by polynomial for electrical capacitance tomography system[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2008, 29(12): 2538–2542. (in Chinese)

- [7] 彭黎辉, 陆耿, 杨五强. 电容成像图像重建算法原理及评价[J]. 清华大学学报. 2004, 44(4): 478–484.

Peng Lihui, Lu Geng, Yang Wuqiang. Image reconstruction algorithms for electrical capacitance tomography: state of the art [J]. J Tingshua Univ (Sci & Tech), 2004, 44(4): 478–484. (in Chinese)

- [8] 陈德运, 陈宇, 王莉莉, 于晓洋. 基于改进 Gauss-Newton 的电容层析成像图像重建算法[J]. 电子学报, 2009, 37(4), 739–743.

CHEN De-yun, CHEN Yu, WANG Li-li, YU Xiao-yang. A novel Gauss-Newton image reconstruction algorithm for electrical capacitance tomography system[J]. Acta Electronica Sinica, 2009, 37(4): 739–743. (in Chinese)

- [9] Kunisch K, Jun Zhou. Iterative choices of regularization parameter in liner inverse problems [J]. Inverse Problems, 1998, 14: 1247–1264.

- [10] 肖庭延, 于慎根, 王彦飞. 反问题的数值解法[M]. 北京: 科学出版社, 2003.

XIAO T Y, YU SH G, WANG Y F. Numerical Solution of In-

verse Problems [M]. Beijing: Science Press, 2003. (in Chinese)

- [11] Wang Yan-fei, Xiao Ting-yan. Fast convergent algorithms for solving 2-D integral equations of the first kind [A]. Lecture Notes in Physics (Numerical Treatment of Multiphase Flows in Porous Media) [C]. Berlin: Springer-Verlag, 2000. 333–344.

- [12] Ito K, Kunisch K. On the choice of the regularization parameter in nonlinear inverse problems [J]. SIAM Journal on Optimization, 1992, 2(3): 376–404.

作者简介



李翠环 女, 1975 年 3 月出生于河北滦县. 河北工业大学讲师, 博士研究生. 从事电磁场数值计算、反问题数值解法与优化方面的有关研究. E-mail: licuihuan@hebut.edu.cn

杨晓光 男, 1971 年出生, 河北工业大学副教授, 硕士生导师, 主要研究方向为电磁场的分析与综合.

汪友华 男, 1964 年出生. 河北工业大学教授, 博士生导师, 主要研究方向为工程电磁场综合效应、全局优化方法.