

二维混沌信号产生器的设计

李清都¹, 杨晓松²

(1. 重庆邮电学院非线性系统研究所, 重庆 400065; 2. 华中科技大学数学系, 湖北武汉 430074)

摘要: 混沌电路设计是混沌通信和混沌加密等应用的先决条件, 因此混沌电路的理论研究和设计具有十分重要的意义. 本文提出混沌电路的一种新的设计方法, 可以在二维空间中简单灵活的设计构造出一类混沌系统. 该方法的优点是: 采用模块化设计思路, 混沌吸引子的形状可以根据实际需要来设计, 易于电路和集成电路实现.

关键词: 混沌; 混沌信号; 符号动力学; 拓扑马蹄; 随机信号

中图分类号: TN710 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2005) 07-1299-04

2D Chaotic Signals Generator Design

LI Qing du¹, YANG Xiao song²

(1. Institute for Nonlinear Systems, Chongqing University of Posts and Telecomm., Chongqing, 400065, China;

2. Department of Mathematics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan, Hubei 430074, China)

Abstract: The chaotic circuit design is a prerequisite to chaotic communication, the chaotic encryption etc. Therefore the fundamental research and design of chaotic circuits are extremely significant. In this paper, a new method to design chaotic circuits is proposed, through which it becomes very simple and flexible to design chaotic dynamic systems in the 2D state space. The remarkable character of this design method is: we can choose complexity of the chaotic attractor as we need by combining the three kinds of modules, and the chaotic attractor can be easily implemented with a circuit or a integrate circuit.

Key words: chaos; chaotic signals; symbolic dynamics; topological horseshoes; random signals

1 引言

混沌现象是自然界普遍存在的一种现象, 是有序决定的无序从而类似于随机的现象. 从哲学、科学和工程上来说, 对它的研究都具有重要意义.

由于混沌现象具有长期不可预测性和伪随机性, 所以它可以做为随机信号源, 在通信、保密等领域有很大的应用价值. 从而掀起了对混沌信号产生器的设计的研究热潮. 研究发现, 虽然自然界许许多多系统都存在着混沌现象, 比如神经网络(包括人的大脑)、电力系统、大气系统、天体系统、生态系统、电路系统、分子运动系统等等, 但是这些系统却都不是理想的混沌信号源. 经过近二十年艰苦不断地研究, 人们在混沌系统的设计上已经取得可喜的成就^[1~7]. 从以前研究较多的 Lorenz, Chua, Rössler 吸引子到它们的各种变形和改进, 再到许多其它新的奇怪吸引子. 从目前的研究状况来看, 人们主要利用非线性系统理论和延时、扰动、控制等方法来构造混沌系统. 不过, 得到的往往是个别的或者某单一类的混沌系统, 缺乏普遍指导意义, 更不用说按一定需求去设计混沌系统, 所以对实际工程应用来讲, 还远远不够, 目前混沌信号设计还具有很大的挑战性.

因此, 本文在分段映射的拓扑马蹄理论的基础上, 分析混沌现象产生的机制, 然后提出一类混沌系统的设计方法. 该方法采用模块化的设计思路, 简单直接, 有利于满足实际需求.

2 分段映射的拓扑马蹄理论

拓扑马蹄理论是研究混沌现象的一种有力工具, 本节将介绍该理论的一些基本结论, 尤其是关于分段映射的拓扑马蹄理论.

首先, 我们回顾一下符号动力系统的有关知识^[8].

令 $S_m = \{0, 1, \dots, m-1\}$ 为一个非负连续整数从 0 到 $m-1$ 集合. 存在双边无限序列

$$s = \{\dots, s_{-n}, \dots, s_{-1}, s_0, s_1, \dots, s_n, \dots\}, \quad s_i \in S_m$$

令 Σ_m 为所有 s 的集合, 考虑另外一个序列 $\bar{s} \in \Sigma_m$

$$\bar{s} = \{\dots, \bar{s}_{-n}, \dots, \bar{s}_{-1}, \bar{s}_0, \bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n, \dots\}, \quad \bar{s}_i \in S_m$$

那么 s 和 \bar{s} 的距离定义为:

$$d(s, \bar{s}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{|i|}} \frac{|s_i - \bar{s}_i|}{1 + |s_i - \bar{s}_i|} \quad (1)$$

有了式(1)的距离定义, Σ_m 就成了一个度量空间, 于是得到下面的结论.

定理 1 空间 Σ_m 是 (a) 紧致的; (b) 完全不连通的; (c)

完备的.

同时满足上面命题三个条件的集合通常被称为 Cantor 集. 而 Cantor 集通常可以展现出混沌动力系统的不变集的结构复杂性.

定义 1 m 移位映射 (m shift map) $\sigma: \Sigma_m \rightarrow \Sigma_m$ 为 $\sigma(s_{(i)}) = s_{(i+1)}$, 即: $\sigma(s)$ 令 s 的每个元素左移一位. 例如, 若 $s_{(i)} = (\dots, s_{-1}, s_0, \dots)$ 则 $\sigma(s_{(i)}) = s_{(i+1)} = (\dots, s_{-1}, s_0, s_1, \dots)$.

于是我们可得到如下定理:

定理 2 (a) $\sigma(\Sigma_m) = \Sigma_m$, 并且 σ 连续.

(b) 定义在 Σ_m 上的动力系统的移位映射 σ 有以下性质:

- ① σ 有可数、无限多个、含有所有周期的周期轨;
- ② σ 有不可数且无限多个非周期轨;
- ③ σ 有一条轨道在 Σ_m 中稠密.

由定理 2(b) 可以推出由移位映射 σ 产生的动力系统对初值具有敏感依赖性, 所以是混沌的^[8].

现在回顾一下拓扑马蹄理论的一些基本结论^[9,10].

令 X 是一个可分的度量空间, Q 是 X 的紧子集, $f: Q \rightarrow X$ 是映射, 做出以下假设:

假设 1^[10] 存在 Q 的 m 个互不相交的子集 Q_1, \dots, Q_m , 且对于每个 Q_i 有 $f|Q_i$ 连续.

定义 2^[10] 令 Γ 是 Q 的紧子集, 对于任意 $1 \leq i \leq m$, $\Gamma_i = \Gamma \cap Q_i$ 非空且紧致, 我们称 Γ 为对应于 Q_1, \dots, Q_m 的连接. 令 F 为一簇对应于 Q_1, \dots, Q_m 的连接, 如果 $\Gamma \in F$ 可推出 $f(\Gamma_i) \in F$, 则 F 称为对应于 Q_1, \dots, Q_m 的连接簇.

定理 3^[10] 如果存在上面的连接簇 F , 那么将存在一个紧不变集 $Q_l \subset Q$, 并且 $f|Q_l$ 半共轭于一个 m 移位映射.

半共轭一般定义: 若存在连续映射 $h: Q_l \rightarrow \Sigma_m$ 满足 $h \circ f = \sigma \circ h$, 于是 f 与 σ 半共轭. 关于半共轭, 有以下重要结论.

定理 4^[9] 对于两个动力系统 (X, f) 和 (Y, g) , 如果 (X, f) 半共轭于 (Y, g) , 那么, f 的拓扑熵不小于 g , 即

$$\text{ent}(f) \geq \text{ent}(g)$$

因为 $\text{ent}(\sigma) = \log m$, 这里 $g = \sigma$, 所以 $\text{ent}(f) \geq \log m$. 当 $m > 1$ 时 $\text{ent}(f) > 0$, 所以动力系统 (X, f) 混沌^[9].

3 设计方法

混沌现象的本质就是对初始值的敏感依赖性. 如何构造含有这种性质的系统呢? 从上面的讨论可知, Cantor 集 Σ_m 内的元素在移位映射 σ 下具有这种性质. 如果在空间 X 内适当的选取一个集合 Q , 并构造一个系统 S , 若 S 包含一个满足定理 3 中条件的有界映射 f , 则在 Q 内就能找到一个不变集 Q_l , 并且 $f|Q_l$ 半共轭于一个 m 移位映射, 所以 S 是混沌的. 简而言之, 我们的任务就是选取 Q 和构造一个含有映射 f 的动力系统 S , 然后简化, 并用电路或集成电路实现.

首先, 我们考虑二维平面上一个简单的系统 S_B :

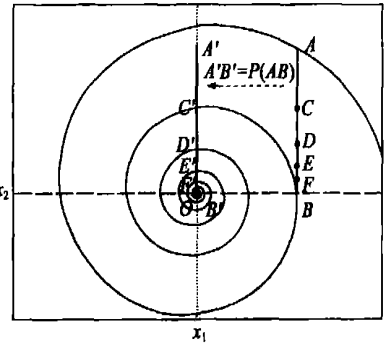
$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \tilde{\omega} \\ -\tilde{\omega} & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

它的解为:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} \cos \tilde{\omega} t & \sin \tilde{\omega} t \\ -\sin \tilde{\omega} t & \cos \tilde{\omega} t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix} \quad (3)$$

从几何的角度, λ 决定向量 $(x_1, x_2)^T$ 的伸缩速度, ω 决定向量 $(x_1, x_2)^T$ 的旋转速度. 设 λ 和 ω 都大于 0, 任取一较小的初始值, 得到的轨道如图 1 所示:

现在考虑如何
在上面建立切换控
制以将它变为混沌
系统. 利用某种切
换控制, 当系统状
态到达曲线 AB 的
时候 (A, B 均为轨
道上的点), 我们把
 AB 通过某一映射
连续 P 映射为另一



曲线 $A'B'$. $A'B'$ 与图中轨道有交点 C', D', E', F', \dots ; 然而, C', D', E', F', \dots 在系统经过某时间都将被拉伸覆盖到 AB 上, 设这个映射为 H , 接着 AB 又被 P 映射成为 $A'B'$, 如此下去. AB 相当于不断的被截为许多小段, 然后每段又被拉长覆盖到 AB 上. 对于任意相邻的两点, 它们总是趋于分离的, 又因为有界, 所以就产生了混沌.

定理 5 上面设计出的系统是混沌的.

证: 在 AB 上取点 C, D, E, F, \dots , 使得 $P(C) = C', P(D) = D', P(E) = E', P(F) = F', \dots$

令 Q 为 AB 在两端各移除一个任意小的开集后剩下的集合, 则 Q 紧致.

令 $f(\cdot) = H(P(\cdot))$, 则 $f(CD) = AB, f(DE) = AB, f(EF) = AB, \dots$, 所以我们可以找到 Q 的 m 个互不相交的集合 Q_1, \dots, Q_m , 且对于每个 Q_i 有 $f|Q_i$ 连续, 其中 $Q_1 \subset CD, Q_2 \subset DE, Q_3 \subset EF, \dots$, 所以存在定义 2 中的对应于 Q_1, \dots, Q_m 的 f 连接簇 F .

由定理 3 可知存在一个紧不变集 $Q_l \subset Q$, 并且 $f|Q_l$ 半共轭于一个 m 移位映射. 由定理 4 可知系统的拓扑熵不小于 $\log m$, 所以当 $m > 1$ 时系统是混沌的. 证毕.

从上面的证明可知, 系统 S_B 只要是螺旋且发散, AB 和 $A'B'$ 任意选取或者扭曲, 若仍能保证上面描述的映射性质, 那么就可用上面的证明证出整个系统是混沌的, 所以这种方式设计出的混沌的鲁棒性很强, 也就是说映射 P 只需要近似的实现即可.

从原理上讲, 系统 S_B 的作用是将曲线 $A'B'$ 分裂成若干部分, 然后把每部分拉伸覆盖到 AB 上. 映射 P 的作用是将 AB 演化为 $A'B'$, 不仅为了保证系统状态变量的有界性, 还为了 AB 的下一分分裂拉伸做准备, 具有映射 P 的作用的系统, 我们用 S_E 表示. 为了使各系统发挥出它应有的映射效果, 我们就需要构造一个切换控制 C_S 在不同系统间的不断切换. 从而, AB 就在不断的分裂和演化下产生了混沌.

动力系统 S_B , 动力系统 S_E 和切换控制 C_S 就构成了本设计思想的基本模块. 要在二维平面上设计混沌系统, 首先需要在平面上设计出各个曲线之间的映射关系图, 然后根据关系图, 分别设计动力系统 S_B 和动力系统 S_E , 最后设计各系统之间的切换控制方式 C_S . 只要合理的设计出这些基本模块就可

以构造出混沌系统。同样, 也可以用现有某个系统作为一个基本模块, 然后设计出其他模块来将它混沌化。经反复调节和简化, 最终用电路实现。

例 1 平面单螺旋混沌系统

S_B 的设计:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ -10 & 1 \end{pmatrix} x \quad (4a)$$

S_E 的设计:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \left(x - \begin{pmatrix} -1 \\ -0.5 \end{pmatrix} \right) \quad (4b)$$

C_S 的设计: 在系统 S_B 下, 当 x_1 正向穿过 $x_1 = 1$ 时启用动力系统 S_E ; 在系统 S_E 下, 当 x_1 负向穿过 $x_1 = 0$ 时启用系统 S_B 。

计算机仿真结果如图 2(a) 所示, 易见 $m > 3$, 这个系统是混沌的, 证明与定理 5 相同。经数值计算, 最大 Lyapunov 指数约为 0.21, 这就验证了例 1 的混沌性。

可见, 只要有界的情况下, 能够保证不断的分裂、拉伸, 系统就会产生混沌。如果我们采用一个具有分裂、拉伸功能的动力系统 S_B 去替代 S_E , 可以轻易证出新系统也是混沌的。下面例 2 为采用 S_{B1} 和 S_{B2} 产生混沌的一个例子。

例 2 平面双螺旋混沌系统

S_{B1} 的设计:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ -10 & 0 \end{pmatrix} \left(x - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \quad (5a)$$

S_{B2} 的设计:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ -10 & 0 \end{pmatrix} \left(x - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad (5b)$$

C_S 的设计: 在系统 S_{B1} 下, 当 x_2 正向穿过 $x_2 = 1$ 时启用动力系统 S_{B2} ; 在系统 S_{B2} 下, 当 x_2 负向穿过 $x_2 = -1$ 时启用系统 S_{B1} 。

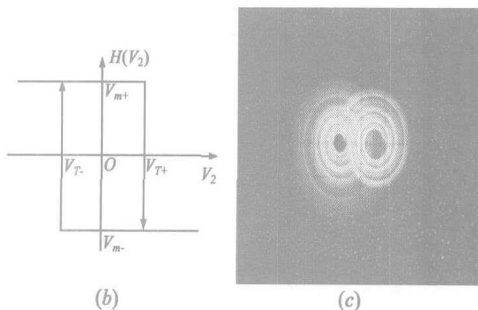
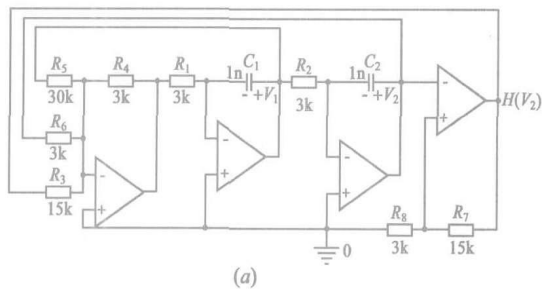
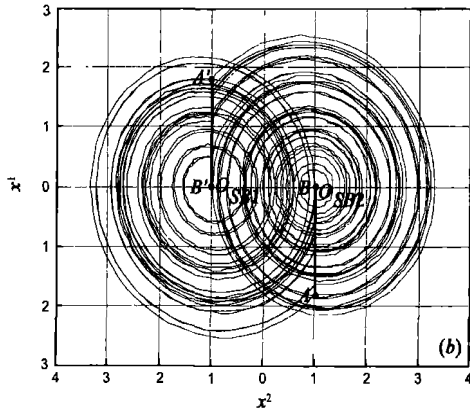
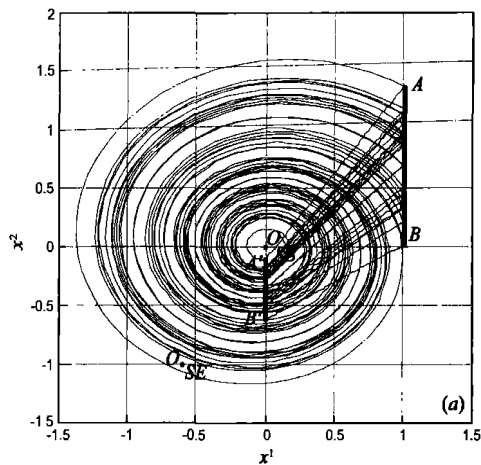
计算机仿真结果如图 2(b) 所示, 最大 Lyapunov 指数约为 0.50, 说明系统是混沌的。这一点可以证明, 证明过程与定理 5 相似, 即: 在曲线 AB 上可找到 $m > 1$ 个互不相交的子集, 每个子集经过某时间, 在这两个系统的作用下映射成为 AB 本身, 且对于每个子集映射连续。设 AB 上有 k 段被拉伸覆盖了 $A'B'$, $A'B'$ 上又有 l 段被拉伸覆盖了 AB , 则 $m \geq k \cdot l$ 。显然, 这里的 k 和 l 都不小于 3, 则 $m \geq 9$, 所以系统混沌。由定理 4 可知, 例 2 拓扑熵 $\log 9$ 比例 1 的拓扑熵 $\log 3$ 大, 所以更混沌。

例 2 的电路实现如图 3(a) 所示。该电路由两个积分器、一个加法器和一个滞回电压比较器构成。取 $C_1 = C_2 = C$, $R_1 = R_2 = R$, $r_1 = R_4/R_5$, $R_4/R_6 = 1$, $r_2 = R_4/R_3$, 则电路的状态方程如下:

$$\begin{pmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{RC} \begin{pmatrix} r_1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 + r_2 H(V_2) \end{pmatrix} \quad (6)$$

这里, $H(V_2)$ 为滞回比较器的输出。假设运放能输出的最高和最低电压分别为 V_{m+} 和 V_{m-} , 则滞回比较器的上下触发电压为 $V_{T\pm} = R_8 V_{m\pm} / (R_8 + R_7)$ 。不妨设 $H(V_2)$ 初始值为 V_{m+} , 则系统处于 S_{B1} 的状态, 当 V_2 正向穿过 V_{T+} 时, $H(V_2)$ 由 V_{m+} 变

为 V_{m-} , 系统进入 S_{B2} 的状态; 当 V_2 负向穿过 V_{T-} 时, $H(V_2)$ 由 V_{m-} 变为 V_{m+} , 系统进入 S_{B1} 的状态。这说明, 通过适当地选取 $R_{3 \sim 8}$, 是完全可以实现例 2 中的切换控制 C_S , 最终参数和结果如图 3(a, c) 所示。



由(6)可知, r_1 决定状态发散的速度(可用最大 Lyapunov 指数衡量), RC 决定混沌信号的频带范围。此外, 吸引子形状的杂乱程度决定着频谱的复杂程度, 而本方法可以在平面上

设计出任意复杂吸引子,参考文献[2, 3]可认为是本方法的特例。所以,这些基本性能指标在设计时可以得到充分考虑。

与同样是双螺旋的 Chua 电路相比,不但例 2 的最大 Lyapunov 指数 0.50 大于 Chua 电路的 0.34,而且在设计上也要明显简单直接一些。

4 结论

本文提出了一种二维混沌电路的设计的新思路,简单有效,并且易于推广到高维空间中去。利用该方法,可以设计出完全利用线性器件(电阻、电容、运放)来实现的混沌电路,所以实现起来成本低、易于集成化。该方法最大优点是理论与实践结合紧密,有较强的设计灵活性(参数选择的自主性高),有利于满足各种不同的实际需求等。

参考文献:

- [1] Ogorzalek M J. Overview of electronic chaos generation, control, and applications[A]. Proc. SPIE[C]. 1995, 2612: 2-13.
- [2] Nakagawa S, Saito T. An RC OTA hysteresis chaos generator[J]. IEEE Trans Circuits Syst I, 1996, 43(12): 1019-1021.
- [3] Kataoka M, Saito T, Chen G. A two port VCCS chaotic oscillator and quad screw attractor[J]. IEEE Trans Circuits Syst I, 2001, 48(2): 221-225.
- [4] Brown R. Generalization of the Chua equations[J]. IEEE Trans Circuits Syst I, 1993, 40(11): 878-884.
- [5] Li Q, Yang X-S, Yang F. Multiple scrolls chaotic attractor and its circuit implementation[J]. Electron Lett, 2003, 39(18): 1306-1307.

- [6] Yang X-S, Li Q. Chaos generator via Wien bridge oscillator[J]. Electron Lett, 2002, 38(13): 623-625.
- [7] Yang X-S, Li Q, Chen G. A twin star hyperchaotic attractor and its circuit implementation[J]. Int J Circ Theor And Appl, 2003, 31(6): 637-640.
- [8] Wiggins S. Introduction to Applied Nonlinear dynamical Systems and Chaos[M]. New York: Springer-Verlag, 1990.
- [9] Xiong J. A note on topological entropy[J]. Kexue Tongbao, 1989, 34(20): 1534-1536.
- [10] Yang X S, Tang Y. Horseshoes in piecewise continuous maps[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2004, 19(4): 841-845.

作者简介:



李清都 男, 1980 年 5 月生于湖北, 分别于 2002 年和 2004 年在重庆邮电学院获工学学士和硕士学位, 主要研究兴趣为: 混沌、电路与系统、神经网络等, 在 Electron. Lett. 等 SCI 源刊发表论文十余篇。E-mail: Qingdu_li@163.com.

杨晓松 男, 1964 年生于湖南, 1998 年在中国科技大学获博士学位, 现为华中科技大学博士生导师, 重庆邮电学院非线性系统研究所所长, 中国自动化学会控制理论专业委员会委员, 中国电子学会高级会员, J. Contr. Appl. 杂志编委, 研究领域为拓扑动力系统、控制论、混沌及其在电路系统中的应用, 在国际重要刊物上发表文章六十余篇, 被 SCI 收录四十余篇。E-mail: Yangxs@cqupt.edu.cn.