线性正则变换域的框架理论研究

李炳照[1,2], 陶 然[1], 王 越[1]
(1. 北京理工大学电子工程系, 北京 100081; 2. 北京理工大学理学院数学系, 北京 100081)

摘 要: 框架理论是研究信号采样特别是非均匀采样问题的一个重要工具, 基于框架理论的 Gabor 展开是在时频混合空间描述信号的非正交展开, 而 Weyl-Heisenberg 框架理论是 Gabor 展开的理论基础, 它描述了信号在时频平面的局部性质与特点, 在信号的短时 Fourier 变换(STFT)、Gabor 展开中起到非常重要的作用. 本文探讨了 W-H 框架在线性正则变换下的特点, 得到了在时域和线性正则变换域联合空间中信号的展开形式, 为在线性正则变换域中讨论信号的展开和非均匀采样问题打下了良好的理论基础.

关键词: 线性正则变换 (LCT); W-H 框架; 时频分析
中图分类号: TN911 文献标识码: A 文章编号: 0372-2112 (2007) 07-1387-04

Frames in Linear Canonical Transform Domain

LI Bing-zhao[1,2], TAO Ran[1], WANG Yue[1]
(1. *Electronic Engineering Department, Beijing Institute of Technology, Beijing* 100081, *China*
2. *Mathematics Department, School of Science, Beijing Institute of Technology, Beijing* 100081, *China*)

Abstract: The frame theory is one of the fundamental tools in study the sampling questions, epically for non-uniform sampling questions, in signal processing community. Weyl-Heisenberg frames are foundation of Gabor transform, Short time Fourier transform, and proved to be important tools in time-frequency signal processing, it gives a signal's local properties by using these frames to present a signal. Extensions of these frames are obtained in the linear canonical transform domains from the frames in the time-frequency domain, properties of frames in linear canonical transform domains are also derived.

Key words: linear canonical transform; Weyl-Heisenberg frames; time-frequency analysis

1 引言

W-H(Weyl-Heisenberg) 框架理论是信号处理中的 Gabor 展开、短时 Fourier 变换的理论基础, 它描述了信号在时频混合空间中的信号非正交展开, 基于框架理论的短时 Fourier 变换在信号处理中得到了广泛的应用, 在信号基于框架理论的非正交展开中所包含的冗余信息可以进一步的用来进行信息的隐藏、压缩等处理. 基于框架理论的信号分解还可以得到信号在时频平面的局部结构和信息, 同时随着小波理论的发展和完展, 基于 W-H 框架理论原理而提出的小波框架理论, 在信号处理中也得到了迅速的应用和发展[1~6].

同时, 随着对信号研究工具要求的不断提高, 当需要知道信号的频谱随时间变化的情况时, 传统的频谱分析方法已经不能适应这种要求, 在这种情况下发展起来的时频联合域分析方法, 如时频分布(time-frequency distribution)、小波变换(wavelets transform)[1]、分数阶 Fourier 变换(FRFT: fractional Fourier transform)[7,8] 以及线性正则变换(LCT: Linear canonical transform)[8,9] 等. 但是, 现有的关于信号的混合域展开大都集中在信号的时域和频域[4~6] 来讨论, 关于信号在时域和其它的空域联合空间中信号的框架表示以及框架理论的研究就比较少见[2,3]. 因此非常有必要来研究时频域中的框架理论在其它联合域中的特点和性质, 从而可以进一步的应用这些理论来研究基于时空联合域的信号特别是非平稳信号处理问题.

本文主要研究时频混合空间中的 W-H 框架在线性正则变换下的特点, 得到了在线性正则变换域框架表示, 为今后进一步的研究线性正则变换域的均匀、非均匀采样问题打下了良好的理论基础.

2 预备知识

2.1 W-H 框架

定义 1 一个时频平面的时频平移$\{g_{q,p}(t)\}_{(p,q)\in Z^2}$集

收稿日期: 2005-12-20; 修回日期: 2007-01-25
基金项目: 部委基金(No. 51417090305BQ0180); 北京理工大学基础研究基金

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

合称为是一个 W-H 框架的充要条件是, 对于任意的 $f(t)=L^2(R)$, 以下关系式成立

$$A\|f\|^2\leqslant\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}|\langle f,g_{p,q}\rangle|^2\leqslant B\|f\|^2 \quad (1)$$

其中, $g_{q,p}(t)=g(t-q\Delta c)e^{jpt\Delta d}$, $0<A,B<\infty$分别称为此框架的上下界, Δc, $\Delta d>0$ 分别表示时间频率尺度上的平移步长.

定义 **2** 如果$\{g_{q,p}(t)\}_{(p,q)\in Z^2}$构成一个 W-H 框架, 定义$\{\tilde{g}_{q,p}(t)=S^{-1}g_{q,p}(t)\}_{(q,p)\in Z^2}$为原来框架的对偶框架, 其中对于任意的$f(t)\in L^2(R)$, 框架算子 S 满足

$$Sf(t)=\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\langle f(t),g_{q,p}(t)\rangle g_{q,p}(t) \quad (2)$$

并且有以下关系式成立

$$f(t)=\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\langle f,g_{q,p}\rangle\tilde{g}_{q,p}(t) \quad (3)$$

关于 W-H 框架理论的及其有关在非均匀采样信号处理中的应用特点可以参看[1, 10], 基于小波变换的小波框架理论可以参考[1].

2.2 线性正则变换(LCT)

信号$f(t)$的以参数为矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ 的线性正则变换 LCT 定义为

$$L_{\boldsymbol{A}}[f](u)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)K_{\boldsymbol{A}}(t,u)\,\mathrm{d}t & b\neq0\\ \sqrt{d}\exp\left(\mathrm{j}\frac{cd}{2}u^2\right)f(du) & b=0\end{cases} \quad (4)$$

其中,

$$K_{\boldsymbol{A}}(u,t)=\sqrt{\frac{1}{\mathrm{j}2\pi b}}\exp\left\{\mathrm{j}\frac{d}{2b}u^2-\mathrm{j}\frac{1}{b}ut+\mathrm{j}\frac{a}{2b}t^2\right\},$$

$\boldsymbol{A}$ 表示 LCT 变换的参数矩阵, 并且满足关系式$|\boldsymbol{A}|=ad-bc=1$.

线性正则变换(LCT)满足其参数矩阵之间的可加性关系, 即

$$L_{\boldsymbol{A}_1}(L_{\boldsymbol{A}_2}[f(t)])=L_{\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2}[f(t)] \quad (5)$$

由此可以得到线性正则变换的逆变换就是以原变换的参数矩阵的逆矩阵为变换参数矩阵的变换, 即如下关系式成立:

$$L_{\boldsymbol{A}^{-1}}(L_{\boldsymbol{A}}[f(t)])=L_{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}}[f(t)]=f(t) \quad (6)$$

由文献[8]的结论可以知线性正则变换是酉变换, 也即其变换核满足以下关系

$$K_{\boldsymbol{A}}^{-1}(u,t)=K_{\boldsymbol{A}^{-1}}(u,t)=K_{\boldsymbol{A}}^{*}(t,u) \quad (7)$$

与 Fourier 变换一样, 线性正则变换也可以看作一个系统或者是一种形式的变换, 在这种情况下, LCT 给了我们信号在"另一个域"中的表示. 同时, 现有的在信号处理领域中应用较广泛的线性变换, 如 FT、FRFT、Fresnel 变换、尺度变换等都可以看作是 LCT 的特殊情况[11], 在这个意义上可以说 LCT 是一些传统线性变换的推广, 关于 LCT 的性质及其应用可以参看[8, 11], 最近的关于线性正则变换域的卷积性质及其应用参看文献[9].

2.3 无量纲化处理

无论是 Fourier 变换还是最近提出的 FRFT 和 LCT, 它们都是把一个域中的信号表示变换到另外一个域中, 所以在分析与计算时, 为了进行一些比较和处理需要对这两个域中的关系进行无量纲化处理[7, 8]. 例如在分析 FRFT 的时频分析时, 要考虑 FRFT 的时频分布, 就要用到时间量纲和频率量纲的加减. 为了在量纲上保持一致和对结果进行更好的解释, 我们引入无量纲化的概念.

假设信号$f(t)$在时间域, 而经过 LCT 后把信号$f(t)$变换到 u 域, 下面考虑时频平面上的点(t,w)和经 LCT 后的时间与 u 平面上点(t_A,u_A)的关系, 由文献[8]可以知道, 任意经过 LCT 变换以后新的点(t_A,u_A)与时频平面上的点(t,w)之间的关系为

$$\begin{cases}t=at_A+bu_A\\ w=ct_A+du_A\end{cases} \quad (8)$$

定义无量纲化尺度为 $s=\sqrt{\Delta c/\Delta d}$, 时间域 LCT 域中的矩阵网格点列$(q\Delta c,p\Delta d)$与时频平面上的点列$[l(q,p)\Delta u,k(q,p)\Delta v]$之间的关系有以下的引理.

引理 **1** 在线性正则变换域中的矩阵网格点列$(q\Delta c,p\Delta d)$, 通过线性正则变换的作用可以映射到时频平面的点阵$(l(q,p)\Delta u,k(q,p)\Delta v)$,

其中 $\Delta u=\left(\frac{a}{p}+\frac{b}{qs^2}\right)\Delta d$, $\Delta v=\left(\frac{c}{p}+\frac{d}{qs^2}\right)\Delta c$, $l(q,p)=pqs^2$, $k(q,p)=pq$; Δu, $\Delta v\in R^+$, $l(q,p)$, $k(q,p)\in Z$

证明 由(8)线性正则变换域中的点(t_A,u_A)映射到时频平面为

$$\begin{cases}t=at_A+bu_A\\ w=ct_A+du_A\end{cases}$$

把$(t_A,u_A)=(q\Delta c,p\Delta d)$带入上式并经过无量纲化处理 $s^2=\frac{\Delta c}{\Delta d}$, $s\in Z^+$, 得到

$$\begin{cases}t=(aqs^2+bp)\Delta d=pqs^2\left(\frac{a}{p}+\frac{b}{qs^2}\right)\Delta d\\ w=(cqs^2+dp)\frac{\Delta c}{s^2}=pq\left(\frac{c}{p}+\frac{d}{qs^2}\right)\Delta c\end{cases}$$

令 $\Delta u=\left(\frac{a}{p}+\frac{b}{qs^2}\right)\Delta d$; $\Delta v=\left(\frac{c}{p}+\frac{d}{qs^2}\right)\Delta c$; Δu, $\Delta v\in R^+$

即 t_A-u_A 域中的点阵格子$(q\Delta c,p\Delta d)$, 其可以表示为时频空间中点阵$[l(q,p)\Delta u,k(q,p)\Delta v]$.

3 主要结论

引理 1 给出了线性正则变换域下的矩形点阵格子

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

与时频空间中的点阵之间的对应关系, 本节我们探讨任何时频空间的 W-H 框架在线性正则变换下的特点, 也就说在线性正则变换下 W-H 框架能否构成时间域和域混合空间的框架. 通过下面的分析我们知道, 在线性正则变换的条件下, 上述 W-H 框架还能构成一个框架, 并且保持框架界不变.

引理 **2**　设信号 $f(t)\,g(t)\in L^2(R)$, 令 $L_A[f](u)$, $L_A[g](u)$ 分别表示信号 $f(t)$, $g(t)$ 的以参数矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ 的线性正则变换, 则以下结论成立

$$\langle f(t), g(t)\rangle = \langle L_A[f](u), L_A[g](u)\rangle \tag{9}$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 $L^2(R)$ 空间中的内积.

证明　因为线性正则变换是酉变换, 也就是说 L_A 是一个酉算子, 所以

$$\langle L_A[f](u), L_A[g](u)\rangle = \langle f, L_A^{-1}(L_A)(u)\rangle = \langle f, g\rangle \tag{10}$$

引理得证, 并且当信号时 $f(t)=g(t)$ 有

$$\| L_A[f(t)](u)\| = \|f\| \tag{11}$$

由此可以知道, 线性正则变换保持内积和范数的不变性. 其实, 由文献[8]中的性质可以得到, 线性正则变换可以保持面积不变.

引理 **3**　设 $g_{q,p}(t)=g(t-q\Delta c)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}p\Delta d}$, $\Delta c,\ \Delta d>0$ $g_A(u)=(L_Ag)(u)$, 则 $g_{q,p}(t)$ 的线性正则变换可以表示为

$$[L_Ag_{q,p}(t)](u)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}g_{A,l,k}(u) \tag{12}$$

其中

$$\theta=-\frac{ac}{2}(q\Delta c)^2-bc(p\Delta d)(q\Delta c)-\frac{bd}{2}(p\Delta d)^2$$

$$g_{A,l,k}(u)=g_A[u-l(q,p)\Delta u]\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}k(q,p)\Delta v u}$$

证明　因为

$$L_A(g_{q,p}(t))(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}K_A(u,t)\,g_{q,p}(t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{\frac{1}{\mathrm{j}2\pi b}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{d}{2b}u^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{1}{b}ut+\mathrm{j}pt\Delta d+\mathrm{j}\frac{a}{2b}t^2}g(t-q\Delta c)\,\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{\frac{1}{\mathrm{j}2\pi b}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{d}{2b}u^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{1}{b}\alpha-\mathrm{j}\frac{q}{b}u\Delta c+\mathrm{j}p\Delta d\alpha+\mathrm{j}p\Delta dq\Delta c+\mathrm{j}\frac{a}{2b}(x^2+2xq\Delta c+(q\Delta c)^2)}\cdot g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{ac}{2}(q\Delta c)^2-\mathrm{j}bc(p\Delta d)(q\Delta c)-\mathrm{j}\frac{bd}{2}(p\Delta d)^2}g_A[u-l(q,p)\Delta u]\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}k(q,p)\Delta v u}$$

$$=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}g_{A,l,k}(u).$$

我们以一个定理的形式给出本文的一个主要结论.

定理 **1**　若 $\{g_{q,p}(t)\}_{(p,q)\in Z^2}$ 构成一个 W-H 框架, 并且框架界分别为 A, B, 其对偶框架表示为 $\{\tilde{g}_{q,p}(t)\}_{(p,q)\in Z^2}$, 则有以下结论成立

(1) 对于线性正则变换的每个固定的参数矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ 来说, $\{g_{A,l,k}(u)\}_{(l,k)\in Z^2}$ 构成线性正则变换域的一个框架.

(2) $\{g_{A,l,k}(u)\}_{(l,k)\in Z^2}$ 的对偶框架可以表示为 $\{\tilde{g}_{A,l,k}(u)\}_{(l,k)\in Z^2}$

证明　(1) 定义 $f_A(u)=(L_Af)(u)$, $g_{A,l,k}(u)=g_A(u-l\Delta u)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\Delta v u}$ 因为 $\{g_{q,p}(t)\}_{(p,q)\in Z^2}$ 是框架界分别为 A, B 的一个框架, 则由框架的定义可以知道对于任意的 $f(t)\in L^2(R)$, 有

$$A\|f\|^2\leqslant\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}|\langle f, g_{p,q}\rangle|^2\leqslant B\|f\|^2 \tag{13}$$

其中

$$\langle f, g_{q,p}\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)g^*(t-q\Delta c)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}p\Delta d t}\,\mathrm{d}t \tag{14}$$

由引理 2, 对式(14)左边做线性正则变换, 可以得到

$$\langle f, g_{q,p}\rangle=\langle(L_Af)(u),(L_Ag_{q,p})(u)\rangle=\langle f_A(u),(L_Ag_{q,p})(u)\rangle \tag{15}$$

由引理 3 可知道 $(L_Ag_{q,p})(u)$ 与 $g_{A,l,k}(u)=g_A(u-l\Delta u)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\Delta v u}$ 之间的关系为 $[L_Ag_{q,p}(t)](u)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}g_{A,l,k}(u)$, 所以式(15)变为

$$\langle f, g_{q,p}\rangle=\langle(L_Af)(u),(L_Ag_{q,p})(u)\rangle=\langle f_A(u),\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}g_{A,l,k}(u)\rangle$$

又因为　$\|L_A[f(t)](u)\|=\|f_A\|=\|f\|$

代入框架的定义式并重新定义指标集合 $\{\{l(q,p),k(q,p),l\in L,k\in K\}\}$ 可以得到

$$A\|f\|^2\leqslant\sum_{k\in K}\sum_{l\in L}|\langle f_A,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}g_{A,l,k}\rangle|^2\leqslant B\|f\|^2$$

即

$$A\|f_A\|^2\leqslant\sum_{k\in K}\sum_{l\in L}|\langle f_A,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}g_{A,l,k}\rangle|^2\leqslant B\|f_A\|^2$$

所以, 由框架的定义可以知道 $\{g_{A,l,k}(u)\}_{(l,k)\in Z^2}$ 构成线性正则变换域的一个框架;

(2) 因为 $\tilde{g}_{q,p}(t)$ 是框架 $g_{q,p}(t)$ 的对偶框架, 即对于任意的信号 $f(t)\in L^2(R)$ 都有

$$f(t)=\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\langle f, g_{q,p}\rangle\tilde{g}_{q,p}(t)$$

对上式两边进行线性正则变换可以得到

$$L_A[f(t)](u)=\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\langle f, g_{q,p}\rangle L_A[\tilde{g}_{q,p}(t)](u)=\sum_{l\in L}\sum_{k\in K}\langle f_A,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}g_{A,l,k}(u)\rangle\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}\tilde{g}_{A,l,k}(u)$$

即　$f_A(u)=\sum_{l\in L}\sum_{k\in K}\langle f_A, g_{A,l,k}\rangle\tilde{g}_{A,l,k}(u)$

成立, 所 $\{g_{A,l,k}(u)\}_{(l,k)\in Z^2}$ 以的对偶框架可以表示为 $\{\tilde{g}_{A,l,k}(u)\}_{(l,k)\in Z^2}$ 的形式.

4　结论

本文在研究 W-H 框架以及基本理论的基础上, 给出了线性正则变换域中的框架的形式, 得到了 W-H 框架在线性正则变换下的特点, 证明了在 $L^2(R)$ 空间中

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

的时频域中的框架在经过线性正则变换以后还是一个框架,并且保持原来框架的框架界不变.为今后在线性正则变换域下研究信号的局部展开以及基于框架理论的均匀、非均匀采样问题奠定了良好的理论基础.

参考文献:

[1] I Daubechies. Ten Lectures on Wavelets[M]. SIAM, Philadelpha, 1992

[2] Bultan A, Akansu A N. Frames in rotated time-frequency planes [A]. In Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP) [C]. AZ: Phoenix, 1999. 1353- 1356.

[3] Bultan A. A four-parameter atomic decomposition of chirplets [J]. IEEE Trans. Signal Processing, 1999, 47(3): 731- 745.

[4] 刘立祥, 谢剑英, 王明中. 利用框架理论对信号进行重建[J]. 通信技术, 2002, 124(4): 1- 3.
Liu Lixiang, Xie Jianying, et al. Using frame theory to reconstruct signals[J]. Communications Technology, 2002, 124(4): 1- 3. (in Chinese)

[5] 张必山, 毛一波. 框架下的不规则采样定理[J]. 重庆大学学报, 2003, 26(6): 119- 120.
Zhang Bi-shan, Mao Yi-Bo. Irregular sampling theorem on the frame[J]. Journal of Chongqing Universtiy, 2003, 26(6): 119- 120.

[6] 薛健, 袁保宗. 临界抽样 Gabor 展开的非局部性分析. 电子学报, 1996, 24(12): 100- 103.
Xue Jian, Yuan Bao-zong. Non-locality analysis fo critical sanmpling gabor expansion[J]. Acta Electronica Sinica, 1996, 24(12): 100- 103. (in Chinese)

[7] 陶然, 齐林, 王越. 分数阶 Fourier 变换的原理与应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004
Tao Ran, Qi Lin, Wang Yue. Theory and applications of the fractional Fourier transform[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004. (in Chinese)

[8] H M Ozaktas, Z Zalevsky, M A Kutay. The Fractional Fourier Transform with Applications in Optics and Signal Processing [M]. John Wiley & Sons, 2001.

[9] Deng Bing, Tao Ran, Wang Yue. Convolution theorems for the linear canonical transform and their applications[J]. Science in China Series F: Information Sciences, 2006, 49(5): 592- 603.

[10] R J Duffin, A C Shaffer. A class of nonharmonic Fourier series[J]. Trans Amer Math Soc, 1952, (72): 341- 366.

[11] Soo-Chang Pei, Jiann-Jiun Ding. Relations between fractional operations and time-Frequency distributions, and their applications [J]. IEEE Trans Signal Processing, 2001, 49(8): 1638- 1655.

作者简介:



李炳照 男, 1975 年 5 月生于山东省沂南县, 讲师, 2001 年毕业于北京理工大学数学系, 获理学硕士学位, 并留校任教, 现为北京理工大学电子工程系通信与信息系统专业博士研究生. 目前从事均匀、非均匀采样理论, 时频分析理论及系统建模等方面的研究. 发表论文 10 余篇.
E-mail: li_bingzhao@bit.edu.cn



陶 然 男, 1964 年 11 月出生于安徽南陵, 教授、博士生导师, 1993 年于哈尔滨工业大学获博士学位, 现任北京理工大学电子工程系信息安全与对抗学科首席教授. 主要从事分数阶 Fourier 变换理论及应用、信息安全与对抗、通信与信息系统等研究工作. E-mail: rantao@bit.edu.cn

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net