

# 基于 MG-CG 算法的图像超分辨率重建

韩玉兵<sup>1</sup>, 束 锋<sup>1</sup>, 孙锦涛<sup>1</sup>, 吴乐南<sup>2</sup>

(1. 南京理工大学电子工程与光电技术学院, 江苏南京 210094; 2. 东南大学无线电工程系, 江苏南京 210096)

**摘 要:** 提出一种基于多重网格(MG)和共扼梯度(CG)算法相结合的图像超分辨率重建快速算法. 首先采用 Tikhonov 正则化方法给出图像超分辨率重建模型; 然后在系统介绍 MG 和 CG 算法的基础上, 针对超分辨率重建中常见对称正定稀疏线性方程的求解, 提出多重网格-共扼梯度(MG-CG)算法; 详细讨论了 MG-CG 算法的光滑、限制、插值操作以及计算复杂度. 实验结果表明该算法与 MG、CG 和 Richardson 迭代算法相比, 具有更快的收敛速度.

**关键词:** 图像处理; 超分辨率重建; 多重网格算法; 共扼梯度算法; 多重网格-共扼梯度算法

**中图分类号:** TN911. 73 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2007) 07-1394-04

## Image Super-Resolution Reconstruction Based on MG-CG Algorithm

HAN Yu-bing<sup>1</sup>, SHU Feng<sup>1</sup>, SUN Jin-tao<sup>1</sup>, WU Le-nan<sup>2</sup>

(1. School of Electronic Engineering and Optoelectronic Techniques, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing, Jiangsu 210094, China; 2. Department of Radio Engineering, Southeast University, Nanjing, Jiangsu 210096, China)

**Abstract:** A fast image super-resolution reconstruction algorithm is proposed based on multigrid(MG) and conjugate gradient (CG) algorithms. Firstly, the image super-resolution reconstruction model is put forward using Tikhonov regularization. After systematically introduction of MG and CG algorithms, an accelerative MG algorithm named MG-CG is proposed to solve the sparse symmetric positive linear equation, which is often occurred in image super-resolution reconstruction. The smooth, restriction and interpolation operators are thoroughly studied and the computational complexity is analyzed in detail. Experimental results demonstrate that the proposed algorithm can greatly improve the speed of convergence compared with MG, CG, and Richardson iteration.

**Key words:** image processing; super-resolution reconstruction; multigrid algorithm; conjugate gradient algorithm; multigrid-conjugate gradient algorithm

### 1 引言

图像超分辨率重建是目前图像处理领域最为活跃的研究方向之一<sup>[1,2]</sup>, 其通过对观测图像信号进行处理, 在保证通频带内低频信息复原的基础上, 对截止频率以上的高频信息进行复原, 使重建图像获得更多的细节和信息, 更加接近退化前的理想高分辨率图像. 它在军事、天文、遥感等各方面都具有极其重要的应用. 超分辨率重建算法主要有频域法<sup>[3]</sup>和空域法, 而空域法又分为基于最小二乘的方法<sup>[4]</sup>、Bayesian 方法<sup>[5]</sup>、基于凸集投影<sup>[6]</sup>方法等. 本文针对图像超分辨率重建中常见的一类对称正定大型稀疏线性方程的求解, 提出一种基于多水平处理和 Krylov 加速技术的图像超分辨率重建快速算法. 具体组织如下: 首先利用病态问题的正则化处理给出图像超分辨率重建的数学模型; 其次在系统介绍多重网格和共扼梯度算法的基础之上, 提出基于多重网格和共扼梯度算法相结合的超分辨率重建算法; 最后为仿

真实验研究和结论.

### 2 图像超分辨率重建模型

一般图像退化可表示为  $Y = DBX + E$ , 其中  $X$ ,  $Y$ ,  $E$  分别为原始高分辨率图像、低分辨率退化图像和加性噪声,  $B$  为模糊卷积矩阵,  $D$  为降采样矩阵. 所谓超分辨率重建就是由观测图像  $Y$  复原重建出原来高分辨率图像  $X$ , 显然最直接方法就是最小二乘估计, 或在假设  $E$  为高斯白噪声条件下的极大似然估计, 即  $X = \arg \min \|Y - DBX\|^2$ , 其 Euler-Lagrange 方程为  $B^T D^T DBX = B^T D^T Y$ , 由于这是一个高度病态的反问题, 需要进行正则化处理, 典型的 Tikhonov 正则化泛函为

$$X = \arg \min \|Y - DBX\|^2 + CX^2 \quad (1)$$

其中  $\cdot$  为  $l_2$  范数,  $C$  为正则化算子, 常选为单位算子  $I$  或 Laplacian 算子,  $\cdot$  为与观测噪声有关的正则化参数, 起平衡高频能量与误差能量的作用, 当  $\cdot$  变大时, 解趋于光滑, 反之则数据拟合误差变小. 其对应的

Euler-Lagrange 方程可归结为如下对称正定线性方程组

$$TX = (B^T D^T DB + C^T C) X = B^T D^T Y = b \quad (2)$$

其中  $T = B^T D^T DB + C^T C$  为对称正定稀疏矩阵,  $b = B^T D^T Y$ . 由于上述方程规模很大难以直接求解, 而迭代解法(如多重网格算法、共扼梯度算法等)由于不需进行矩阵求逆, 因而特别适合此种方程的求解, 下面三节将对此展开详细讨论.

### 3 多重网格(MG)算法

MG 算法(multigrid algorithm)<sup>[7]</sup>是一种多水平的高效迭代算法, 目前已经成为求解微分方程和大型线性方程组最有效的方法之一, 它的最大优点就是具有拟线性复杂度和快速收敛性. 其基本思想主要源于线性方程组求解的误差校正理论、光滑迭代特性和网格粗化细化特性, 基本算法为:

#### 算法 1 多重网格算法

$$X^h = MG(T^h, b^h, X_0^h, I_h^{2h}, I_{2h}^h, 1, 2, p)$$

Step1 前光滑: 设置初始值  $X_0^h$ , 针对  $T^h X^h = b^h$  运用光滑迭代算法  $S_1$  迭代 1 次,  $X^h = S_1(T^h, b^h, X_0^h)$ ;

Step2 若  $h$  为最粗层, 转 Step4, 否则令  $T^{2h} = I_h^{2h} T^h I_{2h}^h$ ,  $b^{2h} = I_h^{2h} (b^h - T^h X^h)$ ,  $X_0^{2h} = 0$ , 针对粗网格  $2h$  和粗网格方程  $T^{2h} X^{2h} = b^{2h}$ , 调用  $p$  次

$$\begin{cases} X^{2h} = MG \left[ \begin{matrix} T^{2h}, b^{2h}, X_0^{2h}, I_h^{2h}, I_{2h}^h, 1, 2, p \end{matrix} \right]; \\ X_0^{2h} = X^{2h} \end{cases};$$

Step3 校正:  $X^h = X^h + I_{2h}^h X^{2h}$ ;

Step4 后光滑: 令  $X_0^h = X^h$ , 针对  $T^h X^h = b^h$  运用光滑迭代算法  $S_2$  迭代 2 次,  $X^h = S_2(T^h, b^h, X_0^h)$ .

其中  $h, 2h$  为细和粗网格层;  $I_h^{2h}, I_{2h}^h$  为限制和插值算子,  $S_1, S_2$  为前后光滑迭代算子,  $T^h, T^{2h}$  为相邻层网格矩阵,  $X_0^h, X_0^{2h}$  为迭代初值, 1, 2 为前后光滑迭代次数,  $p$  为内嵌的 MG 算法调用次数, 它决定 MG 算法的具体型式<sup>[7]</sup>, 如  $p=1$  时即为简单的 V 型算法,  $p=2$  时为 W 型算法, 若将多重网格与嵌套迭代相结合, 还可得到 Full 型算法.

### 4 共扼梯度(CG)算法

CG 算法(conjugate gradient algorithm)<sup>[8]</sup>是一种针对对称正定线性方程组的求解方法, 它根据 Ritz 变分原理将线性方程组的求解转化为一个二次泛函的极小化问题, 是一种属于 Krylov 子空间的加速迭代算法. 由于 CG 算法的收敛速度与矩阵  $T$  的条件数关系密切, 当前更多采用带预处理的 CG 算法, 设预处理矩阵为  $M$ , 具体算法如下:

算法 2 预处理共扼梯度法求解  $TX = b$

Step1: 初始化  $X_0, r_0 = b - TX_0, z_0 = M^{-1} r_0, s_0 = z_0, k = 0$ ;

Step2:  $\alpha_k = r_k^T z_k / s_k^T s_k$ ;

Step3:  $X_{k+1} = X_k + \alpha_k s_k$ ;

Step4:  $r_{k+1} = r_k - \alpha_k s_k$ ;

Step5:  $z_{k+1} = M^{-1} r_{k+1}$ ;

Step6:  $s_{k+1} = r_{k+1} + \beta_k z_k$ ;

Step7:  $\beta_k = z_{k+1}^T z_{k+1} / z_k^T z_k$ ;

Step8: 检验是否收敛, 否则令  $k = k + 1$  转 Step2.

### 5 多重网格 - 共扼梯度(MG-CG)算法

由于 MG 和 CG 算法均是当前求解大型稀疏方程组较有效的方法, 许多学者尝试将其有机结合, 以达到更好的性能. 所谓 MG-CG 算法(multigrid - conjugate gradient algorithm)就是一种结合 MG 和 CG 的混合算法, 它运用 Krylov 子空间加速技术(CG 算法)对 MG 算法进行加速, 换个角度看, 它也是一种采用 MG 算法作为内嵌预处理器的 CG 算法. 其最早由 Kettler 等<sup>[9]</sup>提出, Tatebe<sup>[10]</sup>针对预处理 CG 算法预处理矩阵的正定对称要求给出了内嵌 MG 算法光滑迭代算子的充要条件.

#### 5.1 算法描述

本节针对图像超分辨率重建中常见的对称正定稀疏方程, 采用 MG 算法作为预处理 CG 算法的预处理操作, 此时  $T = B^T D^T DB + C^T C$  为对称正定矩阵, MG-CG 算法的具体实现只需将算法 2 中的  $z_k = M^{-1} r_k$  修改为  $z_k = MG(T, r_k, z_k^{(0)}, S_1, S_2, I_h^{2h}, I_{2h}^h, 1, 2, p)$  即可, 其中  $z_k^{(0)}$  为内嵌 MG 算法迭代的初值.

#### 5.2 算子讨论

下面先来讨论 MG-CG 算法中的插值、限制算子以及粗网格矩阵, 至于光滑算子则在后面介绍.

本文  $I_{2h}^h$  采用循环周期边界的分片线性插值算子,

$$\text{插值模板为 } \begin{bmatrix} 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \end{bmatrix}. \text{ 限制算子为 } I_h^{2h} =$$

$0.25 \cdot (I_{2h}^h)^T$ . 对于粗网格矩阵, 因为  $T^h = (B^h)^T (D^h)^T D^h B^h + (C^h)^T C^h$ , 所以

$$\begin{aligned} T^{2h} &= I_h^{2h} T^h I_{2h}^h \\ &= I_h^{2h} (B^h)^T (D^h)^T D^h B^h I_{2h}^h + I_h^{2h} (C^h)^T C^h I_{2h}^h \quad (3) \end{aligned}$$

由于降采样算子和限制算子的相似性, 所以可将  $D^h$  近似为  $I_h^{2h}$ , 则

$$T^{2h} = I_h^{2h} (B^h)^T (I_h^{2h})^T I_h^{2h} B^h I_{2h}^h + I_h^{2h} (C^h)^T C^h I_{2h}^h \quad (4)$$

又由于以下二个原因: 正则化参数一般取值很小; 信号经过限制插值操作之后主要影响其高频部分, 对其低频部分影响不大, 而 MG 算法中粗网格迭代的主要作用是使细网格上的低频误差部分衰减更快, 对由于

限制插值操作可能引入的高频误差则可以在细网格层的后光滑阶段得到很好的抑制. 所以, 可以通过添加限制插值操作  $I_{2h}^h I_{2h}^{2h}$ , 将  $T^{2h}$  进一步近似为

$$T^{2h} = I_{2h}^h (B^h)^T (I_{2h}^{2h})^T I_{2h}^{2h} B^h I_{2h}^h + I_{2h}^h (C^h)^T I_{2h}^{2h} C^h I_{2h}^h \quad (5)$$

又因为  $(I_{2h}^{2h})^T = 0.25 I_{2h}^h$ , 所以整理得

$$T^{2h} = 0.25 (B^{2h})^T B^{2h} + (C^{2h})^T C^{2h} \quad (6)$$

其中  $B^{2h} = I_{2h}^h B^h I_{2h}^h$ ,  $C^{2h} = I_{2h}^h C^h I_{2h}^h$  分别为  $B^h$ ,  $C^h$  在粗网格  $2h$  上的近似. 同理可得  $T^h$  在更粗网格  $4h$  上的近似为

$$T^{4h} = 0.25 (B^{4h})^T B^{4h} + (C^{4h})^T C^{4h} \quad (7)$$

下面详细讨论 MG-CG 算法中内嵌 MG 算法的前后光滑迭代算子  $S_1, S_2$ , 为简单起见, 不妨设  $S_1 = S_2 = S$ , 且模糊卷积  $B$  和正则化算子  $C$  均采用循环卷积模型. 考虑到超分辨率重建的具体降质模型, 由于  $B, C$  和降采样矩阵  $D$  的复杂性, 很难确定矩阵  $T$  的具体结构, 这里采用如下的松弛 Richardson 迭代方法. 将  $T$  分解为

$$T = A^T A + C^T C = (I + C^T C) - (I - A^T A) \quad (8)$$

其中  $A = DB$ ,  $\omega$  为松弛因子, 则有如下迭代格式

$$X_{k+1} = (\omega I + C^T C)^{-1} (b + (I - A^T A) X_k) \quad (9)$$

本文称之为“Richardson”迭代格式, 其中  $X_0$  为初值, 显然当  $\omega > (A^T A)$  时  $(I + C^T C)^{-1} (I - A^T A)$  为对称正定, 满足预处理 CG 算法的预处理矩阵条件<sup>[10]</sup>, 其中  $\rho(\cdot)$  为矩阵的谱半径. 又因为

$$\rho[(I + C^T C)^{-1} (I - A^T A)] < 1 \quad (10)$$

即光滑迭代算法收敛, 所以 MG-CG 算法收敛.

下面确定松弛因子  $\omega$  的取值, 因为  $B$  采用循环矩阵模型, 由循环矩阵对角化性质<sup>[11]</sup>知  $(B^T B)$  为卷积核元素的绝对值之和, 不妨假设为 1. 又因降采样矩阵  $D$  的行和为 1, 则  $(D^T D) = 1$ . 所以

$$(A^T A) = (B^T D^T D B) = (D^T D B^T B) = 1 \quad (11)$$

因此根据  $\omega > (A^T A)$ , 取  $\omega = 1$  可以达到最大松弛效果. 另外关于逆矩阵  $(I + C^T C)^{-1}$  的计算, 由循环矩阵性质<sup>[11]</sup>知, 可以通过两次 FFT 直接求得.

### 5.3 算法复杂度分析

本节分析 MG-CG 的算法复杂度, 为简单起见, 主要考虑有关卷积运算, 忽略插值、限制等运算, 且卷积采用两次 FFT 进行计算. 设网格层数为  $L$ ,  $N_l, l = 0, \dots, L-1$  表示第  $l$  层网格节点数, 且令  $N_0 = N$ , MG 算法的光滑操作采用“Richardson”迭代公式, 则 V 型 MG 算法一次迭代的计算量为

$$W \sim O\left(\sum_{l=0}^{L-1} 6(1 + 2^l) \text{FFT}(N_l)\right) \quad (12)$$

其中  $l_1, l_2$  分别为前后光滑迭代次数, 又因为  $N_l = 4^{-l} N$ ,

$\text{FFT}(N_l) \sim O(N_l \log(N_l))$ , 则

$$O\left(\sum_{l=0}^{L-1} 6(1 + 2^l) \text{FFT}(N_l)\right) = O\left(\sum_{l=0}^{L-1} 6(1 + 2^l) 4^{-l} N \log(4^{-l} N)\right) \quad (13)$$

并有如下不等式估计

$$O(6(1 + 2^l) N \log(N)) > O\left(\sum_{l=0}^{L-1} 6(1 + 2^l) 4^{-l} N \log(4^{-l} N)\right) > O\left(\sum_{l=0}^{L-1} 6(1 + 2^l) 4^{-l} N \log(4^{-l} N)\right) = O\left(8(1 + 2^l) N \log(N) - \frac{16}{3}(1 + 2^l) N\right) \quad (14)$$

由于  $l_1, l_2$  均为不太大的整数, 所以 V 型 MG 算法一次迭代计算量为  $W \sim O(N \log(N))$ . 又因为预处理 CG 算法中每迭代步主要包含一次矩阵向量乘积、一次预处理矩阵计算和二次向量内积计算, 预处理矩阵计算即为 MG 算法; 而矩阵向量乘积由于运用 FFT 进行计算, 其计算量也为  $O(N \log(N))$ ; 内积的计算量为  $O(N)$ . 所以最终 MG-CG 算法的计算复杂度为

$$C_{\text{MGCG}} \sim O[k(N \log(N) + N \log(N) + 2N)] \sim O[k(N \log(N))] \quad (15)$$

其中  $k$  为 MG-CG 算法的外层 CG 算法迭代次数.

## 6 实验研究

本节针对二维图像的超分辨率重建, 给出 MG-CG 算法的数值实验, 采用 Baboon 测试图像, 大小为  $512 \times 512$ . 取方差为 1 的  $5 \times 5$  的高斯模糊核, 降采样因子为 2, 噪声为均值 0、标准差  $\sigma = 2$  的加性高斯白噪声. 正则化算子取 Laplacian 算子, 正则化参数  $\alpha = 0.01$ , MG 算法采用 V 型格式, 网格层数为 6, 前后光滑迭代次数  $l_1 = l_2 = 1$ , “Richardson”迭代松弛因子  $\omega = 1$ , 迭代停止条件为残值误差范数  $r_k = \|b - TX_k\|_2 \leq 1e-6$ .

图 1 给出了“Richardson”松弛迭代算法、CG 算法、MG 算法和 MG-CG 算法的残值误差范数曲线. 图 2 为具体的 Baboon 图像超分辨率重建结果.

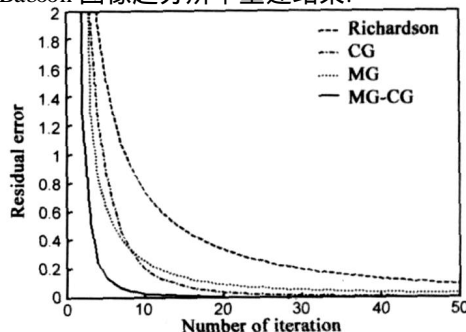
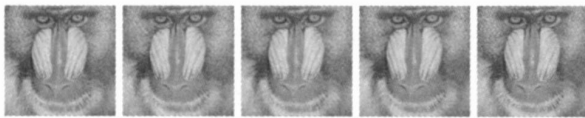


图 1 各种迭代算法的残值误差范数曲线



(a) 原图 (b) 降质图 (c) 双线性插值 (d) 双三次插值 (e) MG-CG  
图 2 Baboon 图像超分辨率重建

由实验结果可以看出, Richardson 松弛迭代收敛较慢, CG 算法收敛较快, MG 算法前期收敛较快, 后期由于某些误差频率不对应于任何一层网格步长, 因而收敛呈现缓慢趋势, 这可以通过 Krylov 子空间加速技术 CG 算法进行加速, 而 MG+CG 算法则结合了 MG 和 CG 算法的特点, 具有更好的收敛特性。

## 7 结论

本文针对图像超分辨率重建中常见的对称正定稀疏线性方程组的数值实现, 提出了基于 MG 与 CG 算法相结合的 MG+CG 算法。文中根据图像超分辨率重建问题的具体特点, 详细讨论了内嵌 MG 算法的插值、限制和光滑操作, 及其与 CG 算法相结合的相关细节问题, 深刻分析了 MG+CG 算法的计算复杂度。实验结果表明当图像退化矩阵为稀疏矩阵时, 这种算法具有良好的收敛特性。

## 参考文献:

- [1] Park S C, Park M K, Kang M G. Super-resolution image reconstruction: A technical overview [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2003, (5): 21 - 36.
- [2] 苏秉华, 金伟其, 牛丽红, 刘广荣. 超分辨率图像复原及其进展 [J]. 光学技术, 2001, 27(1): 6 - 9.  
SU Bing-hua, JIN Wei-qi, NIU Li-hong, LIU Guang-rong. Super-resolution image restoration and progress [J]. Optical Technology, 2001, 27(1): 6 - 9. (in Chinese)
- [3] Tsai R Y, Huang T S. Multiframe image restoration and registration [A]. In: Advances in Computer Vision and Image Processing [C]. Greenwich, CT: JAI Press, 1984, (1): 317 - 339.
- [4] Nguyen N, Milanfar P, Golub G. A computationally efficient superresolution image reconstruction algorithm [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2001, 10(4): 573 - 583.
- [5] Elad M, Feuer A. Super-resolution reconstruction of image sequences [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1999, 21(9): 817 - 834.
- [6] Patti A J, Sezan M I, Tekalp A M. Superresolution video reconstruction with arbitrary sampling lattices and nonzero aperture time [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1997, 6(8): 1064 - 1076.
- [7] Hackbusch W. Multi-Grid Methods and Applications [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1985.
- [8] Hageman L A, Young D M. Applied Iterative Methods [M]. New York: Academic Press, 1981.
- [9] Kettler R, Meijerink J A. A multigrid method and a combined multigrid-conjugate gradient method for elliptic problems with strongly discontinuous coefficients in general domains [R]. Technical Report 604, KSELP, Rijswijk, The Netherlands, 1981.
- [10] Tatebe O. MGCG method: a robust and highly parallel iterative method [D]. Tokyo: The University of Tokyo, 1996.
- [11] 徐仲, 张凯院, 陆全. TOEPLITZ 矩阵类的快速算法 [M]. 西安: 西北工业大学出版社, 1999.

## 作者简介:



韩玉兵 男, 1971 年 11 月出生于江苏省江都市, 2006 年毕业于东南大学无线电工程系, 获工学博士学位, 现为南京理工大学电子工程与光电技术学院讲师。研究方向为数字视频和图像处理、通信信号处理。E-mail: hanyb @163.com

束锋 男, 1973 年 3 月出生于安徽省桐城市, 2002 年毕业于东南大学无线电工程系, 获工学博士学位, 现为南京理工大学电子工程与光电技术学院副教授。研究方向为通信信号处理。E-mail: fengshu @seu.edu.cn