

# 基于高可靠性的重负载 I 类双星网络 性能评价的数学建模

孙丽<sup>1</sup>, 刘 飞<sup>2</sup>, 逯昭义<sup>3</sup>

(1. 青岛科技大学信息科学技术学院, 山东青岛 266061; 2. 招商证券股份有限公司, 山东青岛 266555;

3. 青岛大学信息工程学院, 山东青岛 266071)

**摘 要:** 充分考虑目前网络技术可靠性的大幅提升, 忽略网络服务存在失败的情况, 重新定义嵌入时点  $r$  系统状态的重负载条件, 通过数学建模对双星网络的性能进行了再评价, 求出了顾客转移概率  $P_{ij}$ 、顾客平均滞留时间等的算式, 同时进行了模拟实验. 与原有的性能评价相比, 由于数学解析和结论简洁, 本文的研究进展既有理论价值, 更具有实用价值.

**关键词:** 计算机通信; 双星网络; 竞争-冲突淘汰访问方式; 数学建模; 性能评价

**中图分类号:** TN91 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2011) 11-2659-04

## Mathematical Modeling Based on Performance Evaluation of Type I High Reliable and Heavy Load Double-Star Network

SUN Li-jun<sup>1</sup>, LIU Fei<sup>2</sup>, LU Zhao-yi<sup>3</sup>

(1. School of Information Science and Technology, Qingdao University of Science and Technology, Qingdao, Shandong 266061, China;

2. China Merchants Securities Co., LTD, Qingdao branch, Qingdao, Shandong 266555, China;

3. School of Information Engineering, Qingdao University, Qingdao, Shandong 266071, China)

**Abstract:** Taking full account of the high reliability of nowadays network technology, the instance of unsuccessful service can be ignored. This paper re-defined the system heavy load condition at embedding points, under which the performance of double-star is re-evaluated through the mathematical modeling. As the result, the customer transfer probability  $P_{ij}$  and the mean detained time of the customers are given, and then the performance evaluation is done through simulation. Compared with previous performance evaluation, with the concise mathematical analysis and conclusion, this investigation has not only theoretical value, but also practical value.

**Key words:** computer communication; double-star network; contention-collision cancellation access mode; mathematical modeling; performance evaluation

## 1 引言

关于计算机网络性能评价的研究, 应该说已经取得了很大进展, 但主要集中于通过仿真实验完成. 由于通过数学建模进行性能评价时, 出现了诸多扩展肯达尔 (Kendall) 排队模型尚待解决, 因此, 数学解析评价网络性能的研究仍处于极盛状态<sup>[1~5]</sup>.

本文报告的是一种无线通信网络与运筹学交叉课题的研究成果, 主要解决竞争-冲突淘汰 (Contention-Collision Cancellation, C-CC) 控制方式双星计算机通信网络 I 类模型的数学建模问题.

C-CC 方式单星网络的数学建模早已提出<sup>[6]</sup>. 但是由于数学解析存在困难, 包括双星网络在内的多星网络数学建模的研究进展缓慢, 只是在最近有关文献<sup>[7,8]</sup>才

报道了双星网络的部分研究进展, 而且数学解析又比较繁冗, 不便于工程应用. 考虑到目前网络技术可靠性有了大幅提升, 本文忽略网络服务存在失败的情况, 又重新定义嵌入时点  $r$  系统状态  $X_r = i > 1$  的重负载条件, 对 I 类双星网络的性能进行了再评价. 本文数学解析简洁可循, 对评价网络性能具有实用价值, 现予以报告.

## 2 解析条件分析与符号设定

### 2.1 重负载下 I 类双星网数学建模的引入

关于星型网的运行机理已有详尽阐述, 为了本文建模的需要, 不妨对其予以简单描述.

双星网结构如图 1 所示. 其中心结点有 2 条交换通道及  $N$  个用户终端,  $N > 2$ . 每个终端产生的数据单元在

自己的缓冲区排队,一旦排到队首,就立即提出服务请求.如果同时提出服务请求的用户终端数小于或等于空闲的交换通道数,就让它全部通过.否则就会产生冲突,中心结点从发生冲突的多路信息单元中随机选择等于空闲交换通道数的信息单元让其通过,其余的信息单元被淘汰.通过中心结点的信息单元一次服务成功,在冲突时被淘汰的信息单元经过“超时”时间后,由源终端重新发送.“超时”长度为 1 个定长时间.本文所研究双星网的特征为:顾客第一次竞争服务权、再次竞争服务权都在服务员空闲时发生,获得服务权的顾客一次服务成功.这种高可靠性双星网的系统模型如图 2 所示.

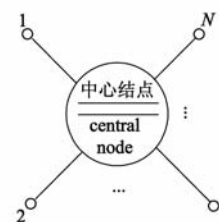


图1 双星网结构示意图

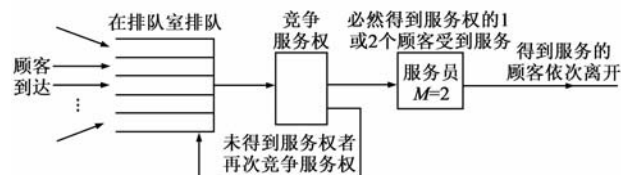


图2 高可靠性竞争-冲突淘汰存取方式I类系统模型

## 2.2 假设和设定

(1) 设系统由  $N$  个顾客源和两个服务员  $F_1$  和  $F_2$  组成,每个顾客源有一个大小为 1 的缓冲区,这  $N$  个缓冲区构成一个大小为  $N$  的排队室。

(2) 时间离散化.将时间轴划分为以时隙为单位的若干间隔.选择时隙的原则是在每个时隙中每个顾客源最多产生 1 个顾客.时隙记为  $\Delta t$ .当某个顾客源的缓冲区空闲、且至少有 1 个服务员空闲时,该顾客源才有可能在某时隙产生 1 个顾客且立即请求服务。

(3) 观察时点的选择.本文设定顾客按准泊松到达(二项式到达),到达理应无后效性.现在的问题是在两个服务员的条件下,如何按照服务情况确定嵌入点.经分析表明,双星 LAN 也能像单服务员系统那样<sup>[6]</sup>,设定顾客离开系统的时点(用  $r$  表示)为嵌入点。

(4) 服务时间的设定.由于本文考虑的是高可靠性服务网络,顾客被服务员服务一次就成功并离开系统,因此服务时间为定长.显然,对于系统中两个正在服务的顾客而言,先开始被服务的顾客必定先离开.而在非高可靠性网络中,由于存在服务失败的情况,先开始被服务的顾客不一定先离开系统,而且服务时间并非定长.因而解析时观察时点出现的情况并不一致。

(5) 时间关系图的确定.设  $r$  时点系统顾客数为  $i$ .本文在重负载下对双星网建模,是指网络运行过程中,中心结点不出现空闲期.因此  $r$  时点至少应该  $i > 0$ .根据  $i$  的取值不同,系统有可能出现下列两种情形:①  $r$  时点  $i = 1$ ,排队室无顾客.此时必定是一个服务员正在

忙碌,另一个服务员刚刚变为空闲( $F_1$  变空  $F_2$  忙碌或者是  $F_1$  忙碌  $F_2$  变空).因为有一个服务员空闲,则在服务期内的某时期(第  $t_a + 1$  时隙)可能产生新顾客  $h$  个,  $h > 0$ .且顾客一旦产生立即请求并由空闲的服务员来服务.如图 3(a)所示.图中  $t_a$  表示  $F_2$  空闲时间长短,单位为时隙.故  $t_a$  后的第 1 个时隙为第  $t_a + 1$  时隙;②  $r$  时点  $i > 1$  时,系统处于忙碌.在服务员刚变为空闲的那个时隙,系统产生新顾客  $h$ ,重负载时通常  $h > 0$ .刚结束服务的 1 个服务员又进入忙碌状态,于是系统两个服务员都处忙碌,如图 3(b)所示.现在的问题是在高可靠性下,  $1 \leq S_{\text{剩}} \leq v, 1 \leq t_a < v$  通常  $v$  的取值比较小,如果  $t_a \leq S_{\text{剩}}$ ,由于必不出现空闲期,在  $i > 0$  时必存在图 3(a).但是当  $S_{\text{剩}} < t_a < v$  时,图 3(a)会出现空闲期,重负载条件不成立.为了防止上述情况发生,本文在重负载、高可靠性情况下,设定重负载条件为  $i > 1$  (这是常见情况).这样一来,图 3 中不出现(a),从而使 I 类双星网的数学建模大大简化.顺便指出,当 I 类双星网未限定高可靠性时,由于  $1 \leq S_{\text{剩}} < v, S_{\text{剩}}$  的取值范围变大,出现空闲期的可能性明显变小,当设定  $i > 0$  时,通过近似处理,图 3(a)应该存在。

(6) 本文讨论的是对称多队列排队模型,选择观察终端  $A$  进行讨论.若该终端有顾客,称  $A$  处于状态 1;若无顾客,称  $A$  处于状态 0.如果在  $r$  时点  $A$  状态为 1,则用  $A_r = 1$  来表示.本文在重负载下对双星网建模,且所选的观察结点一定是  $A = 1$  的某一结点,即  $r$  时点  $i > 1, A_r = 1$ .

(7) 符号设定

$N$ —顾客源总数,  $2 \leq N < \infty$ ;

$p_c$ —无顾客的源在服务员空闲的一个时隙产生 1 个顾客的概率.  $0 < p_c \leq 1, q_c = 1 - p_c$ ;

$P_{ij}$ —以第  $r$  时点为起点,至第  $r+1$  时点系统顾客数由  $i$  变为  $j$  的转移概率.  $0 \leq i, j \leq N-1$ ;

$v$ —服务时间,服务员为顾客服务的时间设为定长.  $v$  的单位为时隙;

$X_r$ — $r$  时点系统的状态(系统中的顾客数);

$T_{i(A)}$ —在  $r$  时点系统状态  $X_r = i$ ,且  $A$  终端状态已知条件下,至  $A$  终端顾客被服务结束的时

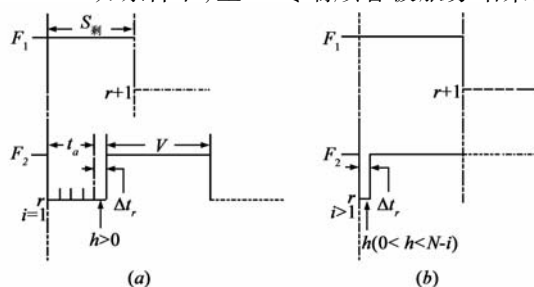


图3 重负载下时间关系图

间.重负载条件下会出现如下  $T_{i(1)}$ ;

$T_{i(1)}$ —在  $r$  时点  $i > 0$ 、 $A$  状态为 1 的条件下,至  $A$  终端顾客被服务结束的时间.由于在前面的设定中  $A_r = 1$ ,故  $T_{i(1)}$  为本文所求参数.

### 3 数学解析

#### 3.1 $T_{j(A)}$ 的形成、转移概率 $P_{ij}$ 、平均剩余服务时间 $E[S_{\text{剩}}]$

这里讨论  $r+1$  时点系统状态  $X_{r+1} = j$ 、且  $A$  终端状态确定后,至  $A$  终端顾客被服务结束的时间  $T_{j(A)}$ .显然  $T_{j(A)}$  与  $T_{i(A)}$  有关,也与  $r \sim r+1$  时点到达顾客的情况有关.

由图 3(b) 知,  $X_r = i > 1$  时,  $r$  时点后,  $F_1$  和  $F_2$  都忙碌,在服务期不存在空闲期,符合重负载条件.由于  $r$  时点后的第 1 个时隙就产生顾客  $h$ ,且一旦产生立即请求服务,故  $\Delta t_r$  请求顾客数为  $i+h-1$ ,在  $r+1$  时点共出现两种  $T_{j(A)}$ : ①如果  $F_1$  正在服务  $A$  顾客,则  $r+1$  时点出现  $T_{j(0)}$ ,  $j = i+h-1$ ; ②如果  $F_1$  服务非  $A$  顾客,  $i$  中的  $A$  顾客无论是否被  $F_2$  选取,则  $r+1$  时点出现  $T_{j(A)} |_{A=1} = T_{j(1)}$ ,  $j = i+h-1$ .

对转移概率分析如下,

(1) 当  $i=0$  时,  $P_{ij}=0$ ,这是由于重负载造成的.

(2) 当  $j < i-1$  时,  $P_{ij}=0$ .

(3) 当  $i > 1$  时,由图 3(b) 可知,  $X_r = i$  中必有  $A$  顾客,  $\Delta t_r$  产生的  $h$  中必无顾客  $A$ ,这时

$$\begin{aligned} P_{ij} &= P\{t_a = 0, \text{且在 } \Delta t_r \text{ 时隙 } N-i \text{ 个顾客源产生} \\ &\quad \text{顾客 } h > 0, j = i+h-1\} \\ &= C_{N-i}^{h-i+1} p_c^{j-i+1} q_c^{N-j-1} \end{aligned} \quad (1)$$

由更新过程得知

$$E[T_{1(1)}] = \frac{1 - F(x)}{h_f(x)} \quad (2)$$

其中  $h_f(x)$  为剩余服务时间的概率密度,  $F(x)$  为更新间隔分布.但当服务时间遵从定长分布时,剩余时间的平均值  $\bar{S}_{\text{剩}}$  可近似看作  $\frac{1}{2}v$ ,于是

$$E[T_{i(1)}]_{i=1} = \frac{1}{2}v \quad (3)$$

#### 3.2 $E[T_{i(1)}]$

如图 3(b) 所示,  $r$  时点  $i > 1$ ,  $A = 1$  时,  $T_{i(1)}$  按以下几种情况分析.

①如果  $r$  时点  $F_1$  正在服务的是  $A$  顾客、 $r+1$  时点  $A = 1$  顾客服务结束离开,则  $E[T_{i(1)}]_{i>1} = \bar{S}_{\text{剩}}$ ;

②如果  $r$  时点正在服务的是  $i$  个顾客中的 1 个非  $A$  顾客,这里称为  $B$  顾客,无论在  $\Delta t_r$  时隙  $F_2$  选取谁( $A$  或者非  $A$ ),  $r+1$  时点一定是  $F_1$  服务的  $B$  先离开,则  $T_{i(1)} = \bar{S}_{\text{剩}} + T_{j(1)}$ ,  $j \geq 1$ .

由以上分析可得

$$\begin{aligned} E[T_{i(1)}] &= E[T_{i(1)} \setminus r \text{ 时点 } F_1 \text{ 正在服务的是 } A \text{ 顾客}] \cdot P(r \text{ 时点 } F_1 \text{ 正在服务的是 } A \text{ 顾客}) \\ &\quad + E[T_{i(1)} \setminus r \text{ 时点正在服务非 } A \text{ 的 } B \text{ 顾客}] \cdot P(r \text{ 时点正在服务非 } A \text{ 顾客}) \\ &= E[S_{\text{剩}}] \cdot \frac{1}{i} + E[S_{\text{剩}} + T_{j(1)}] \cdot (1 - \frac{1}{i}) \\ &= \frac{1}{i} \cdot \bar{S}_{\text{剩}} + (1 - \frac{1}{i}) (\bar{S}_{\text{剩}} + E[T_{j(1)}]), \\ &\quad j = i+h-1 \end{aligned} \quad (4)$$

其中

$$E[T_{j(1)}] = \sum_{h=0}^{N-i} E[T_{(i+h-1)(1)}] \cdot P(\Delta t_r \text{ 产生 } h \text{ 个顾客}) \quad (5)$$

$P(\Delta t_r \text{ 产生 } h \text{ 个顾客})$  正是转移概率,由式(1)确定.如果用  $t_i$  表示  $E[T_{i(1)}]$ ,则由式(4)、(5)可得

$$\begin{aligned} t_i &= \frac{1}{i} \cdot \bar{S}_{\text{剩}} + (1 - \frac{1}{i}) (\bar{S}_{\text{剩}} + \sum_{h=0}^{N-i} t_{i+h-1} \cdot P_{i,i+h-1}) \\ &= \bar{S}_{\text{剩}} + (1 - \frac{1}{i}) \cdot \sum_{h=0}^{N-i} t_{i+h-1} \cdot P_{i,i+h-1}, i > 1 \end{aligned} \quad (6)$$

### 4 模拟实验及结果分析

根据上述已建立的数学模型,设计模拟实验的流程图,如图 4 所示.用 C 语言编程.设定  $N = 60$ ,  $p_c$  取 0.9、0.99,  $v = 10$  (时隙).实验程序共包含 7 个函数和 1 个主函数.程序共约 300 条.根据数学解析结果可知,求解等待时间的系数矩阵  $A_{ij}$  为非奇异矩阵,因此选用逐次超松弛迭代法(SOR 方法)来求解,直到误差小于  $10^{-6}$  为止.

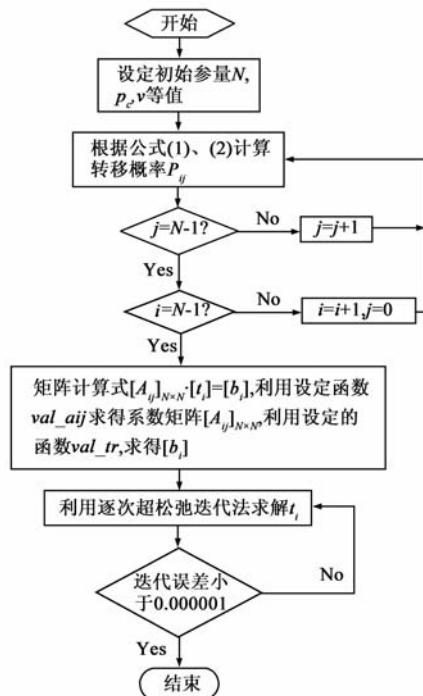


图4 模拟实验流程图

为了进行比较,引入重负载下  $N = 60, p_c = 0.99, v = 10$  非高可靠性双星网的实验结果<sup>[7]</sup>. 所得实验曲线如图 5 所示.

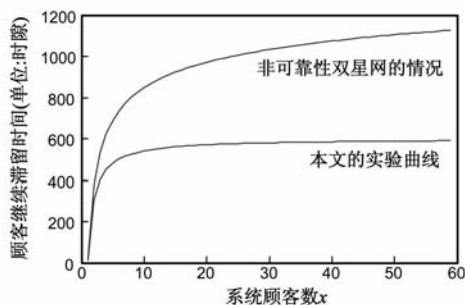


图5  $t_i$ - $i$ 关系图

### 实验结果分析:

(1)由图 5 可见,两种情况(高可靠性与非高可靠性)下,曲线的走势是相似的. 本文简化解析条件后,又对 I 类双星网络独立进行数学建模,所得  $E[T_{i(1)}]$  结论的模拟实验曲线与非高可靠性双星网络如此相似,说明本文的简洁研究结论是可靠的.

(2)由图 5 可见,系统顾客数  $i$  开始增加时,观察顾客 A 的继续滞留时间呈快速上升趋势,这是重负载工作环境下,两个服务员都处忙碌状态造成的. 但是这时高可靠性并未显示出优越性. 这是由于系统顾客数比较少,非高可靠性影响服务员服务质量比较小的原因.

(3)当系统顾客数  $i > 10$  时,  $E[T_{i(1)}]$  呈现缓慢上升趋势,这是由于当  $i$  较大时,观察顾客 A 被选择为服务对象的可能性的下降趋于缓慢变化的原因. 这一点说明双星网适于重负载、特别是超重负载的工作环境. 这时,高可靠性网的性能明显优越. 比如  $i = 30$  时,高可靠性网的  $E[T_{i(1)}]$  为 550 时隙,而非高可靠性网的  $E[T_{i(1)}]$  增加到 1000 时隙. 因此高可靠性网更加适于准时通信.

### 参考文献

- [1] B Krishna Kumar, G Vijayalakshmi, A Krishnamoorthy, S Sadiq Basha. A single server feedback retrial queue with collisions[J]. Computers & Operations Research, 2010, 37(7): 1247 - 1255.
- [2] I Atencia, I Fortes, S Nishimura, S Sánchez. Discrete-time retrial queueing system with recurrent customers[J]. Computers & Operations Research, 2010, 37(7): 1167 - 1173.
- [3] Lu Zhaoyi, Sun Lijun, Lu Mai, Zhao Dongfeng. Mathematical modelling for the contention-collision elimination access mode of the IVth system model to a multiple star LAN[J]. Applied Mathematical Modelling, 2006, 30(4): 367 - 385.
- [4] 赵东风, 丁洪伟, 赵一帆, 王明贵. 多级门限服务轮询系统 MAC 离散时间控制协议模型分析[J]. 电子学报, 2010, 38(7): 1495 - 1499.

Zhao Dongfeng, Ding Hongwei, Zhao Yifan, Wang Minggui. An analytical model of a discrete-time polling MAC protocol for wireless LANs using M-Gated service[J]. Acta Electronica Sinica, 2010, 38(7): 1495 - 1499. (in Chinese)

- [5] A. Mandelbaum, S. Zeltyn. Staffing many-server queues with impatient customers: constraint satisfaction in call centers[J]. Operations Research, 2009, 57: 1189 - 1205.
- [6] 逯昭义. 竞争-冲突淘汰存取方式 I 类系统模型性能评价[J]. 电子学报, 1995, 23(9): 115 - 117.  
Lu Zhaoyi. The Performance Judgement for the Ist Type System Model in Contention-Collision Cancellation Access Mode[J]. Acta Electronica Sinica, 1995, 23(9): 115 - 117. (in Chinese)
- [7] 刘海光, 逯昭义, 崔杰. 重负载下双星 LAN 的一种数学模型. 中国科学(E 辑), 2007, 37(6): 813 - 823.  
Liu Haiguang, Lu Zhaoyi, Cui Jie. Research of mathematical modeling for double-star LAN based on heavy load[J]. Science China (Series E), 2007, 37(6): 813 - 823. (in Chinese)
- [8] 孙丽 ■, 逯昭义, 崔杰, 刘海光. 重负载下双星 LAN I 类系统模型的性能再评价[J]. 电子学报, 2009, 37(7): 1428 - 1433.  
Sun Lijun, Lu Zhaoyi, Cui Jie, Liu Haiguang. Performance revaluation of I type system model for double-star LAN based on heavy load[J]. Acta Electronica Sinica, 2009, 37(7): 1428 - 1433. (in Chinese)

### 作者简介



孙丽 ■ 女, 1978 年生于山东淄博, 理学博士, 讲师, 硕士生导师. 2008 年获青岛大学系统理论专业博士学位后, 赴青岛科技大学信息科学技术学院任教. 研究方向为计算机网络体系结构、计算机网络建模与仿真、计算机网络复杂性等.  
E-mail: sun\_lijun@yahoo.com.cn



刘 飞 男, 1982 年生于山东邹平, 2008 年获青岛大学计算机软件与理论专业硕士学位, 现就职于招商证券股份有限公司青岛开发区营业部.



逯昭义(通信作者) 男, 1942 年生于甘肃省天水市泰安县, 教授, 博士生导师, 国务院政府特殊津贴享受者, 山东省专业技术拔尖人才. 1966 年兰州大学无线电物理专业毕业后留校任教, 1996 年被引进到青岛大学计算机系任教. 已在《中国科学》等刊物发表学术论文 110 余篇, 其中被 SCI 收录 14 篇, EI 收录 29 篇, 出版著作 9 部, 其中专著 4 部. 主要研究方向: ①计算机网络体系结构, ②现代通信业务量理论等.  
E-mail: luzhaoyi218@yahoo.com.cn