

Otsu 准则的阈值性质分析

许向阳^{1,2}, 宋恩民^{1,2}, 金良海^{1,2}

(1. 华中科技大学计算机科学与技术学院, 湖北武汉 430074; 2. 图像信息处理与智能控制教育部重点实验室, 湖北武汉 430074)

摘 要: 分析 Otsu 阈值性质可以为应用和改进 Otsu 方法提供理论依据. 证明了 Otsu 方法找出的最佳阈值是用该阈值分割出的两类的均值的平均值. 当两类的类内方差差别较大时, Otsu 方法的分割阈值将偏向类内方差大的一类, 从而将类内方差大的一类的部分像素划分到类内方差小的类中. 针对这种情况, 提出了一种约束灰度范围的改进型 Otsu 方法. 实验结果表明, 新算法的性能明显优于传统的 Otsu 方法.

关键词: 图像分割; 阈值选取; Otsu 方法

中图分类号: TP391.41 文献标识码: A 文章编号: 0372-2112 (2009) 12-2716-04

Characteristic Analysis of Threshold Based on Otsu Criterion

XU Xiang-yang^{1,2}, SONG En-min^{1,2}, JIN Liang-hai^{1,2}

(1. School of Computer Science and Technology, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan, Hubei 430074, China;

2. Key Laboratory of Education Ministry for Image Processing and Intelligent Control, Wuhan, Hubei 430074, China)

Abstract: The analysis of the properties of the threshold in the Otsu segmentation method can provide theoretical help for improving and applying the Otsu method. This paper proves a conclusion that the threshold of the Otsu method is the average of the means of two classes partitioned by this threshold. Thus, when the difference of the two within class variances is large, the threshold of the Otsu method tends to be closer to the class with larger within class variance, which means that more pixels of this class will be classified into the another class. To overcome this problem, this paper presents an improved Otsu algorithm by constraining the search range of the ideal segmentation threshold. Experimental results show the superiority of the proposed algorithm by yielding more reasonable segmentation results compared to the traditional Otsu method.

Key words: image segmentation; threshold selection; Otsu criterion

1 引言

在图像分割中, 当目标和背景灰度有较大差异时, 阈值分割是一种普遍运用且行之有效的方法^[1]. 在众多的阈值分割方法中, Otsu 提出的最大类间方差法^[2]因计算简单自适应性强而被广泛使用^[3]. 面对千差万别的图像, Otsu 算法并不会在所有情况下都得到理想的结果^[4], 需要有针对性的改进. 分析阈值的性质可以为改进算法提供理论依据^[5]. 目前的阈值分析主要是通过实验来说明, 其结论难免受到所选取图像的影响. 例如, 有观点认为当图像中目标与背景的像素数目差别很大时, Otsu 算法倾向于将像素多的那一类劈开, 从而使两类的像素数目接近^[6], 相反的观点是 Otsu 阈值倾向于将两类像素数目的差距拉得更大^[7]. 上述争论表明单纯依赖目标和背景的像素数目难于确定 Otsu 阈值的倾向性.

本文证明了 Otsu 方法找出的最佳阈值是以该阈值分割出的两类的均值的平均值. 这表明对于目标和背景

两类类内方差差别较大的图像, Otsu 阈值将偏向方差大的一类. 该结论能够合理地解释文献^[6, 7]的实验结果. 对于实际应用中大量存在的两类类内方差差别大的情况, 该性质为限制理想分割阈值搜索范围提供了依据. 基于此提出了一种约束灰度范围的 Otsu 方法, 实验效果良好.

2 Otsu 阈值分析

2.1 Otsu 准则

设一幅图像的灰度等级为 L , 图中像素的灰度取值为 $[1, 2, \dots, L]$. 灰度值是 i 的像素个数为 n_i , 则总的像素数为: $N = \sum_{i=1}^L n_i$. 灰度值 i 出现的概率为 $p_i = n_i/N$.

设以灰度 T 为阈值将图像像素分成两类, 即灰度为 $[1, \dots, T]$ 的像素构成一类, 记为 C_0 ; 灰度为 $[T+1, \dots, L]$ 的像素构成另外一类, 记为 C_1 . 将 C_0 和 C_1 出现的概率分别记为 $P_0(T)$ 和 $P_1(T)$; 两类的灰度均值记

为 $\mu_0(T)$, $\mu_1(T)$; 两类的方差记为 $\sigma_0^2(T)$, $\sigma_1^2(T)$. 其计算方法如下.

$$P_0(T) = \sum_{i=1}^T p_i \quad (1)$$

$$P_1(T) = \sum_{i=T+1}^L p_i = 1 - P_0(T) \quad (2)$$

$$\mu_0(T) = \sum_{i=1}^T i \frac{p_i}{P_0(T)} = \frac{1}{P_0(T)} \sum_{i=1}^T i p_i \quad (3)$$

$$\mu_1(T) = \sum_{i=T+1}^L i \frac{p_i}{P_1(T)} = \frac{1}{P_1(T)} \sum_{i=T+1}^L i p_i \quad (4)$$

$$\sigma_0^2(T) = \sum_{i=1}^T (i - \mu_0(T))^2 \frac{p_i}{P_0(T)} \quad (5)$$

$$\sigma_1^2(T) = \sum_{i=T+1}^L (i - \mu_1(T))^2 \frac{p_i}{P_1(T)} \quad (6)$$

整幅图像的灰度均值为 μ :

$$\mu = \sum_{i=1}^L i p_i = P_0(T) \mu_0(T) + P_1(T) \mu_1(T) \quad (7)$$

两类的类间距离平方为 $\sigma_b^2(T)$:

$$\sigma_b^2(T) = P_0(T) (\mu_0(T) - \mu)^2 + P_1(T) (\mu_1(T) - \mu)^2 \quad (8)$$

两类的类内方差之和为 $\sigma_w^2(T)$:

$$\sigma_w^2(T) = P_0(T) \sigma_0^2(T) + P_1(T) \sigma_1^2(T) \quad (9)$$

Otsu 提出的最大类间距准则下的阈值为 T^* , 有:

$$\sigma_b^2(T^*) = \max_{1 \leq T < L} \sigma_b^2(T) \quad (10)$$

最小类内方差准则的阈值为 T^* , 有:

$$\sigma_w^2(T^*) = \min_{1 \leq T < L} \sigma_w^2(T) \quad (11)$$

Otsu 指出最大类间距准则和最小类内方差准则找出的阈值是相同的, 它们也等同于最大类间类内距离比准则下的阈值^[2].

2.2 Otsu 阈值的性质分析

假设只有一个阈值 $T^{(\text{opt})}$, 使得类内方差最小, 即对任意的 $1 \leq T < L$, $T \neq T^{(\text{opt})}$, 有 $\sigma_w^2(T^{(\text{opt})}) < \sigma_w^2(T)$. 采用 $T^{(\text{opt})}$ 分割成两类后, 两类的灰度均值分别为 $\mu_0^{(\text{opt})}$,

$\mu_1^{(\text{opt})}$. 则一定有 $T^{(\text{opt})} = \lfloor \frac{1}{2} (\mu_0^{(\text{opt})} + \mu_1^{(\text{opt})}) \rfloor$.

证明: 令 $T^{(\text{mid})} = \lfloor \frac{1}{2} (\mu_0^{(\text{opt})} + \mu_1^{(\text{opt})}) \rfloor$.

不妨设 $T^{(\text{mid})} > T^{(\text{opt})}$. 以 $T^{(\text{mid})}$ 为分割阈值得到的

两类的均值分别是 $\mu_0^{(\text{mid})}$, $\mu_1^{(\text{mid})}$.

对于 $i \in [T^{(\text{opt})} + 1, \dots, T^{(\text{mid})}]$, 有

$$2i \leq T^{(\text{mid})} \leq \mu_0^{(\text{opt})} + \mu_1^{(\text{opt})}$$

因此

$$i - \mu_0^{(\text{opt})} \leq \mu_1^{(\text{opt})} - i$$

由 $i > T^{(\text{opt})} \geq \mu_0^{(\text{opt})}$ 知, $i - \mu_0^{(\text{opt})} > 0$

故

$$(i - \mu_0^{(\text{opt})})^2 \leq (\mu_1^{(\text{opt})} - i)^2$$

$$\text{由 } P_0^{(\text{mid})} = \sum_{i=1}^{T^{(\text{mid})}} p_i$$

$$\mu_0^{(\text{mid})} = \sum_{i=1}^{T^{(\text{mid})}} i \frac{p_i}{P_0^{(\text{mid})}} = \frac{1}{P_0^{(\text{mid})}} \sum_{i=1}^{T^{(\text{mid})}} i p_i$$

$$\text{知 } \mu_0^{(\text{mid})} \left(\sum_{i=1}^{T^{(\text{mid})}} p_i \right) = \sum_{i=1}^{T^{(\text{mid})}} i p_i$$

$$\text{即 } \sum_{i=1}^{T^{(\text{mid})}} (i - \mu_0^{(\text{mid})}) p_i = 0$$

同理,

$$\sum_{i=T^{(\text{mid})}+1}^L (i - \mu_1^{(\text{mid})}) p_i = 0$$

$$\begin{aligned} \sigma_w^2(T^{(\text{opt})}) &= \sum_{i=1}^{T^{(\text{opt})}} (i - \mu_0^{(\text{opt})})^2 p_i + \sum_{i=T^{(\text{opt})}+1}^L (i - \mu_1^{(\text{opt})})^2 p_i \\ &= \sum_{i=1}^{T^{(\text{opt})}} (i - \mu_0^{(\text{opt})})^2 p_i + \sum_{i=T^{(\text{opt})}+1}^{T^{(\text{mid})}} (i - \mu_1^{(\text{opt})})^2 p_i \\ &\quad + \sum_{i=T^{(\text{mid})}+1}^L (i - \mu_1^{(\text{opt})})^2 p_i \\ &\geq \sum_{i=1}^{T^{(\text{opt})}} (i - \mu_0^{(\text{opt})})^2 p_i + \sum_{i=T^{(\text{opt})}+1}^{T^{(\text{mid})}} (i - \mu_0^{(\text{opt})})^2 p_i \\ &\quad + \sum_{i=T^{(\text{mid})}+1}^L (i - \mu_1^{(\text{opt})})^2 p_i \\ &= \sum_{i=1}^{T^{(\text{mid})}} (i - \mu_0^{(\text{opt})})^2 p_i + \sum_{i=T^{(\text{mid})}+1}^L (i - \mu_1^{(\text{opt})})^2 p_i \\ &= \sum_{i=1}^{T^{(\text{mid})}} (i - \mu_0^{(\text{mid})} + \mu_0^{(\text{mid})} - \mu_0^{(\text{opt})})^2 p_i \\ &\quad + \sum_{i=T^{(\text{mid})}+1}^L (i - \mu_1^{(\text{mid})} + \mu_1^{(\text{mid})} - \mu_1^{(\text{opt})})^2 p_i \\ &= \sum_{i=1}^{T^{(\text{mid})}} (i - \mu_0^{(\text{mid})})^2 p_i + \sum_{i=1}^{T^{(\text{mid})}} (\mu_0^{(\text{mid})} - \mu_0^{(\text{opt})})^2 p_i \\ &\quad + 2(\mu_0^{(\text{mid})} - \mu_0^{(\text{opt})}) \sum_{i=1}^{T^{(\text{mid})}} (i - \mu_0^{(\text{mid})}) p_i \\ &\quad + \sum_{i=T^{(\text{mid})}+1}^L (i - \mu_1^{(\text{mid})})^2 p_i + \sum_{i=T^{(\text{mid})}+1}^L (\mu_1^{(\text{mid})} - \mu_1^{(\text{opt})})^2 p_i \\ &\quad + 2(\mu_1^{(\text{mid})} - \mu_1^{(\text{opt})}) \sum_{i=T^{(\text{mid})}+1}^L (i - \mu_1^{(\text{mid})}) p_i \\ &= \sum_{i=1}^{T^{(\text{mid})}} (i - \mu_0^{(\text{mid})})^2 p_i + \sum_{i=T^{(\text{mid})}+1}^L (i - \mu_1^{(\text{mid})})^2 p_i \\ &\quad + P_0^{(\text{mid})} (\mu_0^{(\text{mid})} - \mu_0^{(\text{opt})})^2 \\ &\quad + P_1^{(\text{mid})} (\mu_1^{(\text{mid})} - \mu_1^{(\text{opt})})^2 \\ &\geq \sum_{i=1}^{T^{(\text{mid})}} (i - \mu_0^{(\text{mid})})^2 p_i + \sum_{i=T^{(\text{mid})}+1}^L (i - \mu_1^{(\text{mid})})^2 p_i \\ &= \sigma_w^2(T^{(\text{mid})}) \end{aligned}$$

对于 $i \in [T^{(\text{opt})} + 1, \dots, T^{(\text{mid})}]$, 若对其中任意的 i 皆有 $p_i = 0$, 则 $\sigma_w^2(T^{(\text{opt})}) = \sigma_w^2(T^{(\text{mid})})$. 若存在 $p_i \neq 0$, 则定有 $\sigma_w^2(T^{(\text{opt})}) > \sigma_w^2(T^{(\text{mid})})$. 这两者都与 $\sigma_w^2(T^{(\text{opt})})$ 是

唯一的最小内类方差矛盾. 对于 $T^{(mid)} < T^{(opt)}$ 的情况, 证明是类似的. 证毕.

从证明可看出, 对于任意一个灰度值 T , 以 T 为分割阈值得到的类内方差大于等于以两类均值的平均值 M 作为分割阈值得到的类内方差, 即 $\sigma_w^2(T) \geq \sigma_w^2(M)$, 并且只有当不存在灰度值在 T 和 M 之间的像素时, 才有 $\sigma_w^2(T) = \sigma_w^2(M)$. 当有多个阈值使得类内方差最小时, 对于其中的任意一个阈值 $T^{(opt)}$, 设其分割的两类灰度均值的平均值为 $T^{(mid)}$. 由 $T^{(opt)}$ 使类内方差最小, 有:

$$\sigma_w^2(T^{(opt)}) \leq \sigma_w^2(T^{(mid)})$$

类似上述证明, 又可以得到:

$$\sigma_w^2(T^{(opt)}) \geq \sigma_w^2(T^{(mid)})$$

因此必须要有: $\sigma_w^2(T^{(opt)}) = \sigma_w^2(T^{(mid)})$

当 $T^{(opt)}$ 和 $T^{(mid)}$ 不相等时, 由于不存在灰度值在 $T^{(opt)}$ 和 $T^{(mid)}$ 之间的像素, 此时用 $T^{(opt)}$ 和用 $T^{(mid)}$ 分割的结果是完全相同的. 因此, 可以简单地说, 最小类内方差的最佳阈值是左右两类灰度均值的平均值.

下面将根据 Otsu 阈值的上述性质, 分析两类方差差别较大时, Otsu 阈值位置的倾向性以及理想阈值与 Otsu 阈值之间的位置关系.

方差是刻画数据散布程度的一个度量. 方差越大数据散布越开, 类中数据离类中心的平均距离越大, 也即类的边缘数据离类中心越远. 如果两类的边缘数据到相应的类中心距离相近, 则两类的方差比较接近. Otsu 阈值到两类的中心距离相等, 表明 Otsu 阈值分割出的两类方差大小接近, 除非两类之间的边缘都远离了 Otsu 阈值. 在实际的灰度图像分割中, 目标和背景的灰度一般都有部分重叠, 很少会出现两类对象的灰度分布有一定间距, 而使阈值落在这段“空白区间”的情况. 上述分析表明, Otsu 方法会使阈值点靠近方差大的一方, 即将方差大的一类“劈开”, 将其中的部分像素划分到类内方差小的类中, 从而使两类的方差接近.

换个角度来看, 将灰度直方图视为两个分布叠加的结果, 当两个类中心有一定间距且类内方差差别较大的分布叠加 (叠加部分应较小) 在一起时, 它们的交点离分布散即方差大的一类的类中心远, 而离分布密集即方差小的一类的类中心近, 因而该交点不等于两类类中心的平均值, 也就不可能是 Otsu 阈值. Otsu 阈值将落在方差大的一类中, 以满足其到分割出的两类的类中心距离相等.

从实际图像来看, 当像素数目多的一类方差大时, 即将像素数多的一类劈开, 使得两类的数目接近, 这与文献[6]给出的图像和结论是一致的. 当像素数目多的一类方差小, 像素少的一类方差大时, 如纯色大背景下有灰度丰

富的小目标或者梯度图像, 该方法不是使两类像素数目接近, 相反将会使两类像素数目之差距变得更大, 与文献[7]的结论一致.

3 改进型的 Otsu 方法及实验

在图像分割中利用应用背景的先验知识可以有针对性的设计算法, 从而提高图像分割质量^[8]. 背景和目标两类的方差差别较大且可用阈值分开的情况非常多, 如细胞图像, 边缘检测后的图像, 变化检测中的差分图像^[9].

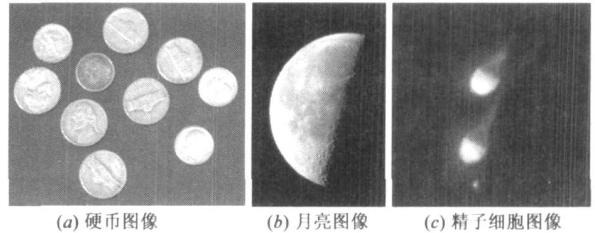


图1 测试图像

假设已知背景和目标两类的方差差别较大, 且目标的灰度高于背景的灰度, 目标的方差大. 从 Otsu 准则下的阈值性质可知, 分割阈值偏向于目标那一类. 理想的阈值实际上是小于 Otsu 阈值, 因此可以在限定范围内搜索理想阈值.

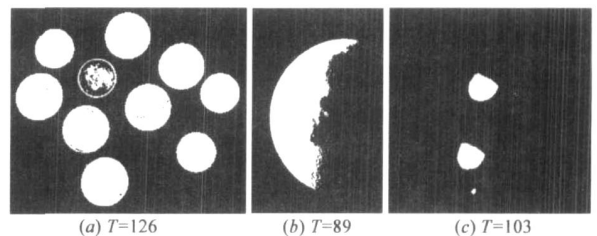


图2 用otsu方法的分割结果

基于上述结论, 本文提出了限定灰度范围的 Otsu 方法. 设用 Otsu 方法找出的阈值为 T . 将灰度值大于 T 的像素分到目标类中. 对于灰度级在 $[1, T]$ 的像素, 再次使用 Otsu 的最大类间距准则求出分割阈值.

采用 Otsu 算法, 对于图 1 中的三幅图像进行阈值分割, 其结果如图 2 所示. 三幅图像的灰度直方图如图 3 所示. 从直方图中可以看出目标类的方差大, 从结

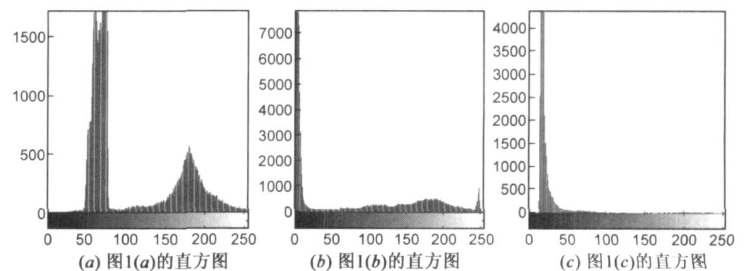


图3 图1中各图像的灰度直方图

果来看, Otsu 方法分割出的目标更小. 采用本文的改进算法的结果如图 4 所示, 其效果要明显好于 Otsu 的结果.

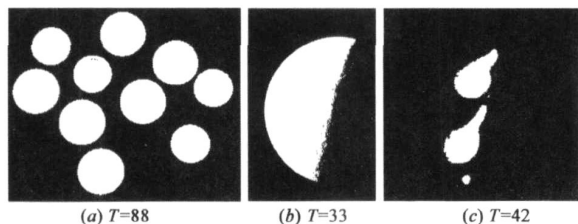


图4 改进算法后的分割结果

4 结论

本文发现并证明了 Otsu 阈值的一个性质, 即最大类间方差准则下的阈值是分割出的两类的均值的平均值. 基于该性质, 当两类的方差差别较大时, 可以推出 Otsu 阈值将偏向于方差大的一类, 从而为限定理想阈值的搜索范围给出了理论依据. 据此本文提出了一种限定灰度范围的改进型 Otsu 方法. 多种图像的测试表明, 算法的效果理想. 本文的发现可为设计更多更好的分割算法提供支撑.

参考文献:

- [1] Sezgin M, Sankur B. Survey over image thresholding techniques and quantitative performance evaluation[J]. Journal of Electronic Imaging, 2004, 13 (1): 146– 168.
- [2] Otsu N. A threshold selection method from gray level histograms[J]. IEEE Transactions on System Man and Cybernetic, 1979, 9 (1): 62– 66.
- [3] 范九伦, 赵凤. 灰度图像的二维 Otsu 曲线阈值分割法[J]. 电子学报, 2007, 35(4): 751– 755.
Fan Jiulun, Zhao Feng. Two dimensional Otsu's curve thresholding segmentation method for gray level images[J]. Acta Electronica Sinica, 2007, 35(4): 751– 755. (in Chinese)
- [4] Huifuang Ng. Automatic thresholding for defect detection[J]. Pattern Recognition Letters, 2006, 27 (14): 1644– 1649.
- [5] Qiao Yu, Hu Qingmao, Qian Guoyu, etc. Thresholding based on variance and intensity contrast[J]. Pattern Recognition, 2007, 40 (2): 596– 608.
- [6] Zhou Hou, Q Hu, Nowinski W L. On minimum variance thresholding[J]. Pattern Recognition Letters, 2006, 27 (14): 1732– 1743.
- [7] Medinar Carnicer R, Madrid Cuevas F J. Unimodal thresholding for edge detection[J]. Pattern Recognition, 2008, 41 (7): 2337 – 2346.
- [8] Hu Qingmao, Hou Zujun, Wieslaw L N. Supervised range constrained thresholding[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2006, 15 (1): 228– 240.
- [9] Rosin P L, Paul L. Unimodal thresholding[J]. Pattern Recognition, 2001, 34(11): 2083– 2096.

作者简介:

许向阳 男, 副教授, 中国计算机学会高级会员, 1967 年生于湖北松滋, 1988 年和 1991 年在华中科技大学先后获得学士学位和硕士学位. 现主要从事图像处理与模式识别, 人工智能与知识工程等方面的研究工作.

E mail : xuxy@ hust. edu. cn

宋恩民 男, 教授, 博士生导师, 华中科技大学计算机科学与技术学院应用系主任, 国际电子电气工程师协会(IEEE)高级会员. 1962 年生于湖北武汉, 1983 年和 1989 年在华中科技大学先后获得学士学位和硕士学位, 1999 年在英国 Teesside University 获博士学位. 现主要从事医学图像处理和医学图像信息分析等方面的研究工作.

E mail : esong@ hust. edu. cn

金良海 男, 副教授, 1966 年生于湖北通山, 1988 年, 2002 年, 2008 年分别在长沙铁道学院, 北方交通大学, 华中科技大学获得学士, 硕士和博士学位. 现主要从事图像处理, 运动跟踪和嵌入式系统等方面的研究工作.

E mail : lhjin@ hust. edu. cn