适用于加各种窗的一种离散频谱相位差校正法

丁 康[1],朱小勇[2]

(1. 汕头大学机械电子工程系,广东汕头 515063;2. 重庆大学机械工程学院,四川重庆 400044)

摘 要: 针对现有两种离散频谱相位差校正法的局限,提出了一种构造新序列,即将原时域序列前 $N/2$ 点平移 $N/4$ 点,将序列的前后 $N/4$ 点置零,分别对原序列和新序列进行 FFT 分析,利用对应峰值谱线的相位差进行频谱校正的通用方法. 与原两种相位差法相比,这种方法只采一段时域信号,且进行两次相同点数的 FFT 分析. 仿真结果表明,该方法实现方便,精度较高,适合各种对称窗函数,抗噪声能力强.

关键词: 频谱分析; 校正; 信号处理; 相位差

中图分类号: TN991.6 **文献标识码**: A **文章编号**: 0372-2112 (2001) 07-0987-03

A Phase Difference Correcting Method on Discrete Spectrum Adapting to Any Window Function

DING Kang[1],ZHU Xiao-yong[2]

(1. *Department of Mechatronic Engineering, Shantou University, Shantou, Guangdong* 515063, *China*;

2. *Department of Mechanical Engineering, Chongqing University, Chongqing, Sichuan* 400044, *China*)

Abstract: Aimed at the limitation of two current kinds of Phase Difference Correction on discrete spectrum, a new global method is presented. That is to construct a new sequence by shifting the former $N/2$ points of original time-domain sequence at the scale of $N/4$ points, set both the former and latter $N/4$ points to zero, and then perform FFT analysis on the original sequence and new one. The spectrum can be corrected by taking advantage of the phase difference of two corresponding peak lines. Compared with the original two kinds of Phase-Difference Correction, only one sequence of time-domain signal is sampled and FFT analysis of same points is performed twice in this method. Simulated result demonstrates that this method is easily carried out with high precision, suits for all kinds of symmetrical window function and has high ability of anti-noise.

Key words: spectrum analysis; correction; signal processing; phase difference

1 引言

频谱分析是应用极为广泛的信号处理方法. 由于计算机只能对有限多个样本进行运算,FFT 和谱分析也只能在有限区间内进行,这就不可避免地存在由于时域截断产生的能量泄漏,使谱峰值变小,精度降低. 从理论上分析,加矩形窗时单谐波频率成分的幅值最大误差达 36.4%[1],即使加其它窗时,也不能完全消除此影响,如加 Hanning 窗时,只进行幅值恢复时的最大误差仍高达 15.3%,相位误差更大,高达 90 度.

目前国内外有四种对幅值谱或功率谱进行校正的方法: 第一种方法是离散频谱三点卷积校正法[1,2],第二种方法是比值校正法[3~6],第三种方法是 FFT + FT 谱连续细化分析法[7],第四种方法是相位差法[8,9]. 在相位差校正法中,第一种做法是采连续两段数据,对这两段进行傅立叶变换,利用其对应离散谱线的相位差校正出谱峰处的准确频率和相位[9]; 第二种做法是只采样一段时域信号,对这一段序列分别进行前 N 点和前 $N/2$ 点的 FFT 分析,利用其相位差进行频谱校正[8]. 本文提出一种构造新序列,即将原时域序列前 $N/2$ 点平移 $N/4$ 点,将序列的前后 $N/4$ 点置零,分别对原序列和新序列进行 FFT 分析,利用对应峰值谱线的相位差进行频谱校正的方法,该方法适用于加各种对称窗情况下的频谱校正.

2 校正原理[10]

对加长度为 T 的对称窗 $w(t)$ 的信号 $x(t)$ 进行傅立叶变换有

$$F[x(t)\cdot w_T(t)] = \int x(t)\cdot w_T(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi ft}dt \qquad (1)$$

其中,$w_T(t)$ 由对称窗 $w(t)$ 在时间上平移 $T/2$ 得到,即

$$w_T(t) = w(t - T/2) \qquad (2)$$

设 $w(t)$ 的傅立叶变换为

$$F[w(t)] = W(f) \qquad (3)$$

根据傅立叶变换的奇偶性质,当 $w(t)$ 是实偶函数时,$W(f)$ 也为实偶函数. 又由傅立叶变换的时移特性可得

$$F[w_T(t)] = W(f)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi fT} \qquad (4)$$

设有一谐波信号 $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta)$,其傅立叶变换结果为

收稿日期:2000-04-24;修回日期:2001-01-26

基金项目:国家自然科学基金(No. 50075049);振动、冲击、噪声国家重点实验室开发基金(VSN-2001-04)

$$X(f)=\frac{A}{2}e^{-j\theta}\delta(f+f_0)+\frac{A}{2}e^{j\theta}\delta(f-f_0) \quad (5)$$

加窗后的谐波信号 $x(t)\cdot w_T(t)$ 的傅立叶变换可根据卷积定理表示为

$$F[x(t)\cdot w_T(t)]=F[x(t)]*F[w_T(t)] \quad (\text{“ * ”表示卷积})$$
$$=\{\frac{A}{2}e^{-j\theta}\delta(f+f_0)+\frac{A}{2}e^{j\theta}\delta(f-f_0)\}*\{W(f)e^{-j\pi fT}\}$$
$$=\frac{A}{2}W(f+f_0)e^{-j[\pi T(f+f_0)+\theta]}+\frac{A}{2}W(f-f_0)e^{-j[\pi T(f-f_0)-\theta]} \quad (6)$$

由此可得,加窗后的相位为

$$\Phi=\theta-\pi T(f-f_0) \quad (7)$$

设频率误差 $\Delta f=f-f_0$,式(7)表示为

$$\Phi=\theta-\pi T\Delta f \quad (8)$$

将连续信号 $x(t)$ 向后平移 $T/4$ 得 $x_0(t)$,根据傅立叶变换的性质得 $x_0(t)$ 的相角为

$$\theta_0=\theta-2\pi f_0\frac{T}{4}=\theta-\frac{(f-\Delta f)\pi T}{2} \quad (9)$$

构造一新的对称窗函数

$$w_0(t)=\begin{cases}w(t), & |t|\le T/2\\ 0, & |t|>T/2\end{cases} \quad (10)$$

$w_{T0}(t)$ 由对称窗 $w_0(t)$ 在时间上平移 $T/2$ 得到

$$w_{T0}(t)=w_0(t-T/2) \quad (11)$$

此时,对 $x_0(t)\cdot w_{T0}(t)$ 作和 $x(t)\cdot w_T(t)$ 同起点、同长度的 FFT 分析,根据前面的推导,同理得

$$\Phi_0=\theta-\pi T\Delta f-\left[\frac{(f-\Delta f)T\pi}{2}\right]=\theta-\frac{\pi T\Delta f}{2}-\frac{fT\pi}{2} \quad (12)$$

式(8)减式(12),求相位差得

$$\Delta\Phi=\Phi-\Phi_0=\theta-\pi T\Delta f-[\theta-\frac{\pi T\Delta f}{2}-\frac{\pi fT}{2}]=-\frac{\pi T\Delta f}{2}+\frac{\pi fT}{2} \quad (13)$$

由此可得其频率修正量为

$$\Delta f=-(2\Delta\Phi-\pi fT)/(\pi T) \quad (14)$$

上面所有推导没有具体利用哪一种窗函数,所以这种校正方法适用于所有的对称窗函数.

3 离散频谱校正实现方法

(1)对信号 $x(t)$ 进行采样,采样频率为 f_s,点数为 N(通常为 1024),得到时间序列 $x(n)(n=0,1,2...N-1)$.

(2)对时间序列 $x(n)$ 作 N 点 FFT 分析.对于谱线号 $i(i=0,1,2,...N-1)$,设频率校正量为 $\Delta f_i=d_if_s/N$,其中 d_i 为归一化的谱线号修正量. $T=N/f_s$,根据式(8),有

$$\Phi(i)=\theta-\pi T\Delta f=\theta-\pi\frac{N}{f_s}\frac{d_if_s}{N}=\theta-\pi d_i \quad (15)$$

(3)将 $x(n)$ 的前 $N/2$ 点平移 $N/4$,然后将序列的前后 $N/4$ 点置零,得到序列 $x_0(n)$,作 N 点 FFT 分析.对应于谱线号 i,由公式(12)有

$$\Phi_0(i)=\theta-\frac{\pi T\Delta f}{2}-\frac{\pi fT}{2}=\theta-\pi\frac{N}{2f_s}\frac{d_if_s}{N}-\frac{\pi}{2}\frac{if_s}{N}\frac{N}{f_s}$$
$$=\theta-\frac{\pi d_i}{2}-\frac{\pi i}{2} \quad (16)$$

(4)根据相位差,求出频率修正量.对于谱线号 i 有

$$\Delta\Phi=\Phi(i)-\Phi_0(i)=-\frac{\pi T\Delta f}{2}+\frac{\pi fT}{2}=-\frac{\pi d_i}{2}+\frac{\pi i}{2} \quad (17)$$

由于 FFT 后取相位是在 $(-\pi,\pi)$ 之间,周期为 2π,所以上式中的各项相位进行运算后可能超过区间 $(-\pi,\pi)$ 这一区间,所以在实际计算中除以 2π 后的余数.令 $\delta=\pi i-2\Delta\Phi$,用 2π 对 δ 进行求余运算,将 δ 调整到 $(-\pi,\pi)$ 区域内,然后有

$$d_i=\delta/\pi \quad (18)$$

(5)校正其频率、幅值和相位.

校正的频率为

$$f_i=if_s/N-d_if_s/N=(i-d_i)f_s/N \quad (19)$$

当知道窗谱函数表达式时,可进行幅值校正.设窗函数的频谱模函数为 $W(x)$,y_i 为谱线号 i 对应的原始序列 FFT 分析的幅值,校正后的幅值为[3,4]

$$A_i=\frac{y_i}{W(-d_i)} \quad (20)$$

根据对称窗函数相位特点,归一化频率校正量为 d_i 时,相位的校正量应为 $\Delta\phi=d_i\pi$[3~5],设信号 FFT 的实部为 R_i,虚部为 I_i,则校正后的相位为

$$\theta_i=tg^{-1}(\frac{I_i}{R_i})+\Delta\phi \quad (21)$$

4 仿真研究

用计算机生成式(22)的信号,采样频率为 1024Hz,作谱点数为 1024,频率间隔(频率分辨率)为 1Hz,选用 Hanning 窗,分别进行无噪声和加具有白噪声性质的均匀分布伪随机噪声的仿真分析,信噪比为 1.97.

$$y(t)=\cos(2\pi 4.2t+40\pi/180)+\cos(2\pi 123.4t+20\pi/180)$$
$$+\cos(2\pi 127.4t+30\pi/180)+\cos(2\pi 256.7t+70\pi/180)$$
$$+\cos(2\pi 380.5t+50\pi/180) \quad (22)$$

表 1 加 Hanning 窗时的校正结果

理论频率(Hz)	4.200000	123.400000	127.400000	256.700000	380.500000
未校正频率	4.000000	123.000000	127.000000	257.000000	380.000000
校正频率	4.203039	123.398354	127.390121	256.702179	380.506500
理论幅值(V)	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
未校正幅值	0.974772	0.897294	0.907910	0.943290	0.848826
校正幅值	1.001107	0.995043	1.002523	0.999148	1.004382
理论相位(度)	40.000000	20.000000	30.000000	70.000000	50.000000
未校正相位	76.009499	91.958435	101.922935	16.000008	140.000000
校正相位	39.498123	20.324722	31.769421	69.554451	48.916733

表 2 加 Hanning 窗有噪声时的校正结果

理论频率(Hz)	4.200000	123.400000	127.400000	256.700000	380.500000
未校正频率	4.000000	123.000000	127.000000	257.000000	380.000000
校正频率	4.193496	123.390259	127.372589	256.689484	380.512024
理论幅值(V)	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
未校正幅值	0.990668	0.884969	0.942688	0.968362	0.836812
校正幅值	1.014939	0.977259	1.031815	1.030896	0.993879
理论相位(度)	40.000000	20.000000	30.000000	70.000000	50.000000
未校正相位	76.254983	89.862717	101.784859	15.071550	139.903854
校正相位	41.459572	19.685406	34.784634	70.711835	47.830650

图 1 和表 1 是加 Hanning 窗无噪声时频谱的校正前后对比结果,图 2 和表 2 为在有噪声时校正的情况.从图表中可以得出以下结论:

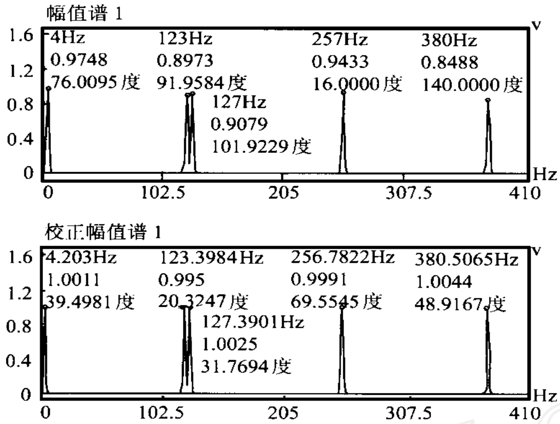

图 1　加 Hanning 窗无噪声时校正前后谱图对比

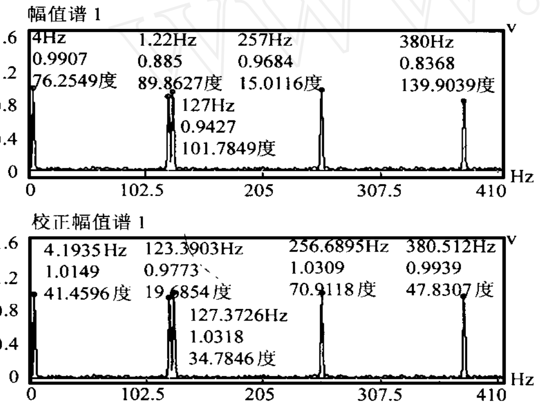

图 2　加 Hanning 窗有噪声校正前后谱图对比

(1) 对间隔较远的频率成分,如本例中的 256.7Hz 和 380.5Hz,这种相位差法对频率、幅值和相位的校正精度很高,频率最大误差为 0.0065 个频率分辨率,幅值误差为 0.438 %,相位误差为 1.083 度. 由于 Hanning 窗的旁瓣较低,所以校正精度高于加其它窗.

(2) 采用这种校正方法,负频率成分的干涉影响很小[6],本例中加 Hanning 窗时频率为 4.2Hz 的信号的校正精度仍很高.

(3) 当两个频率越靠近,由于旁瓣的干涉[6],其幅值和相位误差都很大,采用这种相位差法校正精度有所降低,但是在相隔 4 条线谱线以上时(由于 Hanning 窗的主瓣宽为 4 条谱线),其校正精度仍然比较高. 本例中 123.4Hz 与 127.4Hz 这两个频率相隔 4 条谱线,频率最大误差为 0.0098 个频率分辨率,幅值误差为 0.496 %,相位误差为 1.769 度. 从理论上分析,当两个频率的间隔小于 4 个频率分辨率时,由于主瓣重叠,此法校正精度将明显降低.

(4) 在加较大噪声时,校正精度有一定的降低,但仍然很高,频率最大误差为 0.0274 个频率分辨率,幅值误差为 3.18 %,相位误差为 4.785 度,能够满足工程分析的需要,说明这种方法的抗噪能力比较强.

5　结论

(1) 提出了一种构造新序列,即将原时域序列前 $N/2$ 点平移 $N/4$ 点,将序列的前后 $N/4$ 点置零,分别对原序列和新序列进行 FFT 分析,利用对应峰值谱线的相位差进行频谱校正的方法. 与其它校正方法相比,此方法具有很好的通用性,其校正方法不受所加窗函数不同的影响,算法简单,计算速度快. 相对于采连续两段时域信号的相位差校正法[9],其采样长度缩短了一半;与只采样一段时域信号,然后这一段序列进行 N 点和 $N/2$ 点的 FFT 分析的相位差方法[8]相比较,其两次作 FFT 的点数相同,避免了不同长度 FFT 分析的复杂程序和寻找对应谱线号的过程.

(2) 负频率成分和间隔较近的多频率成分产生的干涉现象所带来的误差对精度的影响与所加窗函数有关,但总体精度都比较高,这种方法的抗噪声干扰的能力较强.

(3) 校正精度与窗函数有关. 对单频率成分加 Hanning 窗时具有较高的校正精度,由于矩形窗谱的能量泄漏严重,校正精度较低.

(4) 这种方法不适用于频率过于密集的分析场合或连续谱.

参考文献:

[1] 丁康,谢明. 离散频谱三点卷积幅值校正法的误差分析 [J]. 振动工程学报. 1996,9(1):92 - 98.

[2] 朱利民,钟秉林,黄仁. 离散频谱多点卷积幅值修正法的理论分析 [J]. 振动工程学报,1999,12(1):120 - 125.

[3] Xie Ming, Ding Kang. Correction For the Frequency, Amplitude and phase in FFT of Harmonic sigial [J]. Mechanical System and Signal Processing,1996,10(2):211 - 221.

[4] 丁康,张晓飞. 频谱校正理论的发展 [J]. 振动工程学报,2000,13(1):14 - 22.

[5] 谢明,丁康. 频谱分析的校正方法 [J]. 振动工程学报,1994,7(2):172 - 179.

[6] 谢明,丁康,莫克斌. 频谱校正时谱线干涉的影响和判定方法 [J]. 振动工程学报,1998,11(1):22 - 28.

[7] 刘进明,应怀樵. FFT 谱连续细化分析的傅立叶变换法 [J]. 振动工程学报,1995,8(2):162 - 166.

[8] 刘渝. 正弦波频率快速估计方法 [J]. 数据采集与处理,1998,13(1):7 - 11.

[9] 谢明,张晓飞,丁康. 频谱分析中相位和频率校正的一种新方法——相位差校正法 [J]. 振动工程学报,1999,12(4):454 - 459.

[10] 丁康,谢明,等. 离散频谱的幅值. 相位和频率的新校正方法及误差分析 [J]. 动态分析与测试技术,1996,14(1):10 - 29.

作者简介:

丁　康　男. 1957 年 8 月生于辽宁本溪,1984 年获清华大学汽车系硕士学位. 汕头大学机械电子工程系教授、系主任,中国机械工程学会高级会员,振动工程学报编委. 现从事信号处理与机械设备故障诊断方面的研究.