

稀疏网格平方根求积分非线性滤波器

伍宗伟^{1,2}, 姚敏立¹, 马红光¹, 贾维敏¹, 田方浩¹

(1. 第二炮兵工程大学, 陕西西安 710025; 2. 解放军 96265 部队, 河南南阳 473000)

摘 要: 针对具有加性噪声的非线性高斯动态系统的状态估计问题, 本文提出一种新的基于稀疏网格法的平方根求积分滤波器(SSRQF), 该滤波器通过稀疏网格取点来近似计算多维积分并进行平方根滤波. 与常规 QF 的积分点数随着维数呈指数增长相比, 该方法的积分点数随着维数呈多项式增长, 减少了计算量; 理论分析表明, 无味卡尔曼滤波器(UKF)只是稀疏网格求积分滤波器(SQF)的一个特例, 因此 SSRQF 在精度和取点上比 UKF 更为灵活. 仿真实验表明, SSRQF 的滤波精度均高于 UKF 和扩展卡尔曼滤波器(EKF), 是一种效率较高的高精度非线性滤波算法.

关键词: 非线性滤波器; 稀疏网格; 高斯-厄米特积分; 求积分滤波器; 无味卡尔曼滤波器

中图分类号: TP391 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2012) 07-1298-06

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2012.07.002

Sparse-Grid Square-Root Quadrature Nonlinear Filter

WU Zong-wei^{1,2}, YAO Min-li¹, MA Hong-guang¹, JIA Wei-min¹, TIAN Fang-hao¹

(1. The Second Artillery Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710025, China;

2. The 96265th Unit of PLA, Nanyang, Henan 473000, China)

Abstract: For nonlinear estimation with additive noise, we utilized the sparse-grid theory to propose a novel nonlinear filter, Sparse-grid Square-Root Quadrature Filter (SSRQF). The quadrature points for the conventional QF increases exponentially with the dimension. However, the new filter SSRQF uses the sparse-grid theory to reduce the number of quadrature points to a polynomial with the dimension, which alleviates the computation burden greatly. Through the theoretical analysis, we proposed that Unscented Kalman Filter (UKF) is only a special case for Sparse-grid Quadrature Filter (SQF), thus SSRQF is more flexible in terms of choosing points and controlling accuracy. The simulation results show that the SSRQF achieves higher accuracy than the UKF and the Extended Kalman Filter (EKF). Thus, it is a high accuracy nonlinear filter algorithm with computationally efficient.

Key words: nonlinear filter; sparse grid; Gauss-Hermite quadrature; quadrature filter; unscented Kalman filter

1 引言

非线性滤波问题广泛存在于轨道控制、姿态估计、组合导航、雷达声纳监视系统、目标跟踪等领域^[1,2], 开发出有效的、能够实时在线估计系统状态的非线性滤波器是非常关键的. 当前, 工程领域应用最多的是扩展卡尔曼滤波器(Extended Kalman Filter, EKF)^[2,3], 采用一阶泰勒近似将非线性系统线性化, 在高效率的同时也带来了滤波器的潜在不稳定性及线性化误差, 并且在某些情况下, 求解 Jacobian 矩阵与 Hessian 矩阵(二阶 EKF)会遇到复杂的计算甚至某些系统根本无法求导. Julier 和 Uhlman 提出的无味卡尔曼滤波器(Unscented Kalman Filter, UKF)^[4]在一定程度上改善了 EKF 的上述问题, 用确定的采样点来传递均值和方差, 其精度可以达到二阶泰

勒近似并且不用计算 Jacobian 矩阵与 Hessian 矩阵; 另外, 与 UKF 类似的差分滤波算法(Divided Difference Filter, DDF)^[5]采用了 Stirling 插值公式, 也是通过某些固定点来传递高斯统计特性, DDF 和 UKF 很相似, 精度均可达二阶泰勒展开精度, 高于 EKF 的一阶泰勒展开近似. 当前研究较为集中的是基于随机采样点的粒子滤波算法, 该算法基于重要性采样、序贯蒙特卡罗以及重采样等技术, 可以精确的估计非线性非高斯系统^[6], 但是昂贵的计算负担使得该方法在当前阶段尚无法应用于实时系统.

Ito 和 Xiong 于 2000 年提出了高斯-厄米特求积分滤波器(Gauss-Hermite Quadrature Filter, GHQF, 下文均简称 QF)^[7,8], 将 Gauss-Hermite 数值积分应用于计算迭代贝叶斯估计, 理论上可以达到任意阶泰勒展开精度. 文献

[7]给出了基于 Kalman 滤波框架下的非线性滤波公式,其仿真结果要优于 UKF 并且没有增加计算负担.但是,将该方法应用于多维的状态空间时,由于其采用直接张量积的方法将一维积分扩展至多维积分,所以积分点随着维数呈指数增长,造成所谓的“维度灾难”,计算量较大,因此 QF 仅适用于低维系统,对于高维系统计算量过大.文献[9]将 UKF 中的平方根滤波方法应用到了 QF,提出了平方根求积分滤波器(Square-Root Quadrature Filter, SRQF),保证了状态协方差阵的半正定性,增强了滤波器的稳定性,但是没有考虑多维情况下计算量大的问题,另外采用平方根滤波时,QR 分解也会遇到计算量过大的问题,对于指数增长速度的积分点来说,文献[9]中矩阵 $[X_{k|k-1}^* \quad \sqrt{Q_k}]$ 的 QR 分解计算量是很大的.因此如何减少求积分滤波器的积分点数目是应用该算法的关键问题.

本文在文献[9]的基础上考虑了多维状态空间的 SRQF 方法,提出了采用稀疏网格的方法来计算贝叶斯估计中多维积分的稀疏网格平方根求积分滤波器(Sparse-grid Square-Root Quadrature Filter, SSRQF),使积分点数目由维数的指数增长减少为多项式增长,大大减少了高斯积分点数,在不损失精度的同时减少高斯滤波器的计算量.

2 高斯求积分滤波器

对于一般的离散动态系统,其系统方程和测量方程分别为

$$\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1} \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_k = h(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k \quad (2)$$

式中的 \mathbf{x} 为 d 维状态变量, \mathbf{w}_{k-1} 、 \mathbf{v}_k 分别为独立的零均值高斯白噪声,方差分别为 \mathbf{Q}_{k-1} 和 \mathbf{R}_k . 对状态变量的最优估计即是在观测变量 $\mathbf{Y}_k = \{\mathbf{y}_i, 1 \leq i \leq k\}$ 已知的情况下得到 $E(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_k)$, 因此求解后验概率密度函数即为关键所在. 根据贝叶斯理论可以得到如下的预测步和更新步^[2],

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}) \\ = \int p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) \cdot p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}_{1:k-1}) \cdot d\mathbf{x}_{k-1} \end{aligned} \quad (3)$$

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}) = \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k-1})}{\int p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}) d\mathbf{x}_k} \quad (4)$$

通过迭代上述预测式(3)和更新式(4)即可实现最优非线性状态后验概率密度估计,但是式中的积分却难以计算,很多情况下难以得到解析形式的密度函数. 粒子滤波是通过蒙特卡罗模拟方法来近似计算积分,但是由于其收敛速度较慢,需要大量的随机采样点来保证精度^[10],而采用高斯积分规则来近似计算上述积

分值则能够利用较少的积分点达到较高的精度. 在数值积分的各种方法中,高斯积分的代数精度最高,采用 n 个积分点能够达到的最高代数精度为 $2n-1$. 首先考虑单维积分,由于所求的积分式中分布密度都近似为高斯分布,所以采用高斯-厄米特积分(Gauss-Hermite Quadrature, GHQ),其一般形式为^[7,11]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \omega_i f(\xi_i) \quad (5)$$

式中的 $f(x)$ 为被积函数, n 为积分点的数目, ξ_i 和 ω_i 分别为积分点和积分权值,其中的 ξ_i 为 Hermite 多项式的零点. 根据高斯积分和正交多项式的关系,可以利用基于正交多项式三项递推关系的对称三对角矩阵特征分解求法来得到积分点和积分权值^[11],计算方法为: \mathbf{J} 是一个对称三对角矩阵,且有 $\mathbf{J}_{i,i+1} = \sqrt{i/2}, 1 \leq i \leq m-1$, 则积分点为 $\xi_i = \sqrt{2} \lambda_i$, 相应的积分点权值为 $\omega_i = (v_i)_1^2$, 这里的 λ_i 为 \mathbf{J} 的第 i 个特征值, $(v_i)_1$ 为 \mathbf{J} 的第 i 个特征向量的第一个元素^[7].

对于多维情况(假设为 d 维),高斯积分可以通过张量积的形式扩展为

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^d} e^{-\mathbf{x}^T \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &\approx (\mathbf{I}_n \otimes \cdots \otimes \mathbf{I}_n)(f) \\ &= \sum_{i_1=1}^n \omega_{i_1} \cdots \sum_{i_d=1}^n \omega_{i_d} f(\xi_{i_1}, \cdots, \xi_{i_d}) = \sum_{i=1}^{n^d} \omega_i f(\xi_i) \end{aligned} \quad (6)$$

式中的 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$, \mathbf{I}_n 为 n 点单维高斯积分, \otimes 代表张量积运算, d 维积分的积分点为 $\xi_i = [\xi_{i_1}, \cdots, \xi_{i_d}]^T$, 积分权值为 $\omega_i = \prod_{p=1}^d \omega_{i_p}$, 上标“T”表示转置运算. 通过式(6)的扩展结果得到 d 维状态变量的 GHQ 公式,结合式(3)和式(4)即可得到基于 GHQ 的多维平方根求积分滤波算法^[7-9]:

①预测:在 $k-1$ 时刻,已知系统的状态和方差分别为 $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$ 、 $\mathbf{P}_{k-1|k-1}$, 计算方差阵分解 $\mathbf{P}_{k-1|k-1} = \mathbf{S}\mathbf{S}^T$, 根据高斯点与状态变量的关系得到, $\mathbf{x}_i = \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \mathbf{S} \cdot \xi_i$, 则得到状态和方差阵平方根的一步预测

$$\hat{\mathbf{X}}_{i,k|k-1} = f(\mathbf{x}_i), \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \sum_{i=1}^{n^d} \omega_i \hat{\mathbf{X}}_{i,k|k-1}$$

$$\mathbf{S}_{k|k-1} = \text{qr}\{[\sqrt{\omega_i}(\hat{\mathbf{X}}_{1:n^d,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \quad \sqrt{\mathbf{Q}_{k-1}}]\}$$

②更新:在预测值的基础上,计算新的高斯点变换, $\tilde{\mathbf{x}}_i = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{S}_{k|k-1} \cdot \xi_i$, 则有

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{L}_k(\mathbf{y}_k - \mathbf{z}_k)$$

$$\mathbf{S}_{k|k} = \mathbf{S}_{k|k-1} - (\mathbf{L}_k \mathbf{S}_{zz})(\mathbf{L}_k \mathbf{S}_{zz})^T$$

式中的 \mathbf{y}_k 为 k 时刻的观测值,

$$\mathbf{Z}_{i,k|k-1} = h(\tilde{\mathbf{x}}_i), \mathbf{z}_k = \sum_{i=1}^{n^d} \omega_i \mathbf{Z}_{i,k|k-1}$$

$$\mathbf{L}_k = \frac{(\mathbf{S}_{zz}/\mathbf{S}_{zz}^T)}{\mathbf{S}_{zz}}$$

$$\mathbf{S}_{\mathbf{z}\mathbf{z}} = \sum_{i=1}^n \omega_i (f(\tilde{\mathbf{x}}_i) - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) (\mathbf{Z}_{i,k|k-1} - \mathbf{z}_k)^T$$

$$\mathbf{S}_{\mathbf{z}\mathbf{z}} = \text{qr} \{ [\sqrt{\omega_i} (\mathbf{Z}_{1:n,k|k-1} - \mathbf{z}_k) \quad \sqrt{R_k}] \}$$

式中的 $\text{qr}\{\cdot\}$ 表示 QR 分解, 算法细节见文献[7,9]. 从上面的算法流程来看, QF 与 UKF 很相似, 不同的是 UKF 仅仅能够达到对于高斯分布的泰勒展开 3 阶截断, 而 QF 通过增加积分点数目可以达到任意阶截断. 但是 QF 积分点的增长速度呈维数的指数增长, 对于 d 维积分, 其积分点为 d 个单维积分点任意的排列, 总的积分点数为 n^d 个, 计算量过大, 另外在计算 $\mathbf{S}_{k|k-1}$ 、 $\mathbf{S}_{\mathbf{z}\mathbf{z}}$ 、 $\mathbf{S}_{\mathbf{z}\mathbf{x}}$ 时矩阵列数较大, QR 分解难以计算. 下面采用稀疏网格的方法来减少取点数.

3 稀疏网格高斯积分滤波器

3.1 稀疏网格取点规则

近年来, 稀疏网格 (Sparse Grid) [12~14] 方法广泛应用于求解多维积分问题, 该方法最初源自于 Smolyak 在 1963 年提出的用于解决多维数值积分“维度灾难”的一种积分规则 [15], 其积分规则如下,

$$\int_{\mathbf{R}^d} e^{-\mathbf{x}^T \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \approx \mathbf{I}_{d,L}(f)$$

$$= \sum_{q=L-d}^{L-1} (-1)^{L-1-q} \mathbf{C}_{d-1}^{L-1-q} \sum_{\Phi \in \mathbf{N}_q^d} (\mathbf{I}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{I}_{i_d})(f) \quad (7)$$

式中的 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$, $\mathbf{I}_{d,L}(f)$ 即为对 d 维状态变量的精度为 L 级的数值积分, 这里的精度为 L 级代表着 $\mathbf{I}_{d,L}(f)$ 能够精确积分的多项式 $x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_d^{i_d}$ 阶数 $\sum_{j=1}^d i_j$ 最高为 $2L-1$, \mathbf{I}_{i_j} 代表精度为 i_j 级的单变量积分, $i_j \in \Phi$, Φ 为包含 d 个自然数的精度序列, 包含在精度序列集合 \mathbf{N}_q^d 中, 精度序列集合 \mathbf{N}_q^d 定义为

$$\begin{cases} \mathbf{N}_q^d = \{ \Phi: \sum_{j=1}^d i_j = d+q \}, & q \geq 0 \\ \mathbf{N}_q^d = \emptyset, & q < 0 \end{cases} \quad (8)$$

设 X_{i_j} 为精度为 i_j 级的单变量积分 \mathbf{I}_{i_j} 的积分点, 通过式(7)可以得到多维积分的点集为,

$$X_{d,L} = \bigcup_{q=L-d}^{L-1} \bigcup_{\Phi \in \mathbf{N}_q^d} (X_{i_1} \otimes \cdots \otimes X_{i_d}) \quad (9)$$

X_{i_j} 为精度级为 i_j 的单维积分点集. 简单的说, 式(9)意义就是对每一个给定的 q 值将可以组合的单维积分点任意组合为 d 维积分点, 之后遍历所有的 q 即可. 根据稀疏网格取点规则的性质 [14], 积分点个数由原来的呈维数的指数级增长变为多项式增长, 大大减小了计算量.

为了更加清晰的理解其取点规则, 下面我们给定精度级为 $L=3$ 时的 d 维取点过程, 精度级为 3 级时的积分精度已经达到了泰勒展开的 5 阶截断, 优于 UKF 高斯函数泰勒 3 阶截断的同时计算量较小. 首先确定单

维积分取点方式, 采用的精度为 L 级的单变量积分点选取规则为开区间梯形选点规则, 此规则广泛用于复杂求积中 [12], 也是 Smolyak 最初提出稀疏网格规则的取点方式, 即单维积分选点为 2^L-1 个, 如图 1 中的 X_1, X_2, X_3 , 分别为精度级为 1, 2, 3 的高斯积分单维取点方式.

下面确定精度序列集合 \mathbf{N}_q^d . 由式(8)可以得到 q 的取值为 $q=L-d, L-d+1, \cdots, L-1=3-d, 4-d, \cdots, 2$, 若 $d=1$ 时, 即为一维情况, 不需要利用稀疏网格取点; $d=2$ 时, $q=1, 2$; $d \geq 3$ 时, $q=0, 1, 2$. 通过后面的分析我们可以看到实际上 $q=0$ 是全原点方式取点, 是包括在 $q=1, 2$ 中的, 所以直接考虑 $d \geq 3$ 的情况即可.

当 $q=0$ 时, 精度级之和为 $\sum_{j=1}^d i_j = d$, 此时可以精确积分的多项式 $x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_d^{i_d}$ 阶数为 d , 显然 i_j 只能够全部为 1, \mathbf{N}_0^d 含有的积分点为

$$\mathbf{N}_0^d = \{ \underbrace{(1, 1, 1, \cdots, 1)(1, 1, 1, \cdots, 1), \cdots, (1, 1, 1, \cdots, 1)}_d \}$$

即所有的点均取为原点, 显然 $\text{Num}(\mathbf{N}_0^d) = 1$.

当 $q=1$ 时, 精度级之和为 $\sum_{j=1}^d i_j = d+1$, 此时可以精确积分的多项式 $x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_d^{i_d}$ 阶数为 $d+1$, 显然 i_j 只能够有一个取值为 2, \mathbf{N}_1^d 含有的积分点为

$$\mathbf{N}_1^d = \{ \underbrace{(2, 1, 1, \cdots, 1)(1, 2, 1, \cdots, 1), \cdots, (1, 1, 1, \cdots, 2)}_d \}$$

而根据单维取点规则, 除去全取原点的取点方式, X_2 中仅有两个点可取, 以 $(2, 1, 1, \cdots, 1)$ 为例, 其中只有一维取点为 X_2 中的点, 其它维均取原点, 故共有 3 点, 而全原点组合在 \mathbf{N}_0^d 中已经取过, 故此时的积分点数为 $\text{Num}(\mathbf{N}_1^d) = 2d$.

当 $q=2$ 时, 精度级之和为 $\sum_{j=1}^d i_j = d+2$, 此时可以精确积分的多项式 $x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_d^{i_d}$ 阶数为 $d+2$, 显然 i_j 只能够有一个取值为 3 或者两个取值为 2, 此时 \mathbf{N}_2^d 含有的积分点为

$$\mathbf{N}_2^d = \left\{ \underbrace{(3, 1, 1, \cdots, 1)(1, 3, 1, \cdots, 1), \cdots, (1, 1, 1, \cdots, 3)}_d, \underbrace{(2, 2, 1, \cdots, 1)(2, 1, 2, \cdots, 1), \cdots, (1, 1, 1, \cdots, 2, 2)}_{C_d^2} \right\}$$

和分析 \mathbf{N}_1^d 类似, 但是我们要注意所有全原点组合以及只有一个不是原点的组合已经包括在 \mathbf{N}_0^d 与 \mathbf{N}_1^d , 所以可以得到 i_j 只有一个取 3 的点数为 $7d-d$, 而 i_j 中有两个取值为 2 的点数为 $C_d^2 (C_{3-1}^1 C_{3-1}^1) = 2d(d-1)$, 因此 $\text{Num}(\mathbf{N}_2^d) = 2d^2 + 4d$.

综上所述, 精度级为 $L=3$ 时的 d 维稀疏网格高斯积分点数为

$$X_{d,3} = 2d^2 + 6d + 1, d \geq 2 \quad (10)$$

我们称这种采用稀疏网格取点规则的 GHQ 为 SGHQ (Sparse-grid Gauss-Hermite Quadrature), 为了更为直观地理解稀疏取点规则, 下面以二维情况进行图示, 以 $X_{2,3}$ 为例, 取点结果如图 1. 从图中取点过程可以更加直观的理解稀疏取点规则的取点方式, 从取点结果上看, SGHQ 共需要取点数为 21 点, 而 GHQ 采用式(6)的传统的张量积形式 $X_3 \otimes X_3$ 的点数共需要 49 个, 点数减少了一半以上, 对于维数更高的情形点数减少的更多. 表 1 给出精度级为 3 的不同维度状态空间的稀疏网格取点与传统方法取点个数的对比, 其中 SGHQ 的取点个数按照式(10)计算.

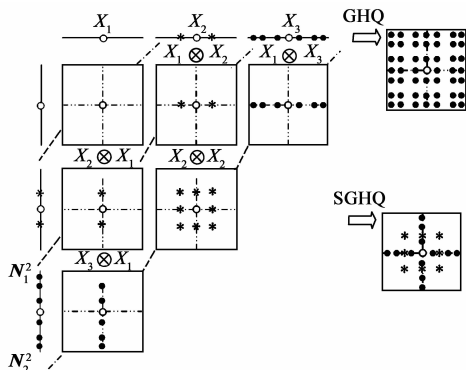


图1 稀疏网格取点示意图

表 1 $L=3$ 时不同维数取点对比

维数 d	1	2	3	4	5	6
GHQ	7	49	343	2401	7203	50421
SGHQ	7	21	37	57	81	109

上述的稀疏网格积分算法实际上是将单维积分通过特殊的取点规则扩展到多维积分, 其算法容易实现, 可以将其总结为下式

$$I_{d,L}(f) = \sum_{q=L-d}^{L-1} \sum_{\Phi \in N_q^d} \sum_{x_1 \in X_1} \cdots \sum_{x_d \in X_d} f(x_1, \dots, x_d) \cdot \left\{ (-1)^{L-1-q} C_{d-1}^{L-1-q} \prod_{p=1}^d \omega_{i_p} \right\} \quad (11)$$

采用上述的稀疏网格取点规则进行的高斯求积分滤波器即为稀疏网格求积分滤波器 (Sparse-grid Quadrature Filter, SQF).

3.2 SQF 与 UKF

从第二节给出的高斯滤波算法可以发现其与 UKF 的相似性, 下面通过计算分析分析二者的关系. 考虑对称采样点的 UT 变换, 其点数为 $2d+1$ (d 维状态空间), 采样点和权值分别为^[4]

$$\begin{cases} \chi_1 = \bar{\mathbf{x}}; \\ \chi_i = \bar{\mathbf{x}} + \lambda \sqrt{\mathbf{P}_{xx}}; 2 \leq i \leq d+1 \\ \chi_i = \bar{\mathbf{x}} - \lambda \sqrt{\mathbf{P}_{xx}}; d+2 \leq i \leq 2d+1 \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} \omega_i = \kappa / (d + \kappa), i = 1 \\ \omega_i = 1/2(d + \kappa), 2 \leq i \leq 2d+1 \end{cases} \quad (13)$$

其中 $\lambda = \sqrt{d + \kappa}$. 为了便于和 SQF 取点对比, 考虑状态变量分布为零均值方差为 1 的标准高斯分布情况, 此时调节因子 $\kappa = 3 - d$, 则式(12)与式(13)变为

$$\begin{cases} \chi_1 = \mathbf{0}_{d \times 1}; \\ \chi_i = \sqrt{3} \mathbf{e}_{i-1}; 2 \leq i \leq d+1 \\ \chi_i = -\sqrt{3} \mathbf{e}_{i-1}; d+2 \leq i \leq 2d+1 \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_1 = \frac{(3-d)}{3} \\ \tilde{\omega}_i = \frac{1}{6}, 2 \leq i \leq 2d+1 \end{cases} \quad (15)$$

式中的 \mathbf{e}_{i-1} 为 R^d 空间中的第 $i-1$ 个元素为 1 的单位矢量, $\mathbf{0}_{d \times 1}$ 为零矢量. 按照前文所述的计算稀疏取点和权值的方法计算精度级 $L=2$ 的稀疏积分点, 此时单维取点 X_1, X_2 的取点分别为 $n_1=1, n_2=3$, 对应的高斯积分点和权值为

$$\xi_1 = 0, \omega_1 = 1$$

$$\xi_2 = 0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}, \omega_2 = \frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$$

对于一维情况, $\kappa = 2, d = 1$, SQF 计算积分时, q 只能取 1, 故其取点即为 ξ_2 , 和 UKF 是等价的. 下面看多维情况 ($d \geq 2, L=2$, 此时 $q=0, 1$), 稀疏网格取点为

$$\xi = \begin{cases} [0, 0, \dots, 0]^T; q=0 \\ [0, 0, \dots, 0]^T, [\sqrt{3}, 0, \dots, 0]^T, [-\sqrt{3}, 0, \dots, 0]^T; q=1 \end{cases}$$

显然点数为 $1 + C_2^1 C_d^1 = 2d + 1$ (注意这里的原点重复取了 d 次, 否则就是 $1 + C_3^1 C_d^1 = 3d + 1$), 按照式(14)计算此时的 Sigma 点, 可以发现 SQF 的积分点与 UT 变换的 Sigma 点是一致的, 权值同理计算也与式(15)得到的 Sigma 点的权值一致, 因此对称采样的 UKF 与开区间梯形单维取点方式的 SQF 是一致的. 以两维为例, 从几何观点看, 如图 2 所示.

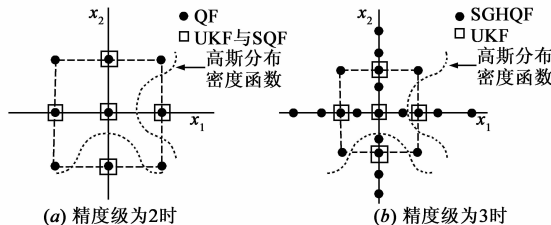


图2 UKF与GHQF取点方式对比

从图 2(a) 可以看到精度级为 2 时, SQF 取点与 UKF 取点一致, 都少于 QF, QF 精度最高. 图中的虚线表示高斯函数, 已知二维独立分布的变量其联合分布密度即为二个高斯函数的乘积, 显然在 UKF 没有取到的外正方形的四个顶点位置函数值较小, 所以 UKF 算法将其忽略掉了. 从图 2(b) 可以看到随着精度级的提高, SQF

的取点要多于 UKF, 并且开始取到除坐标轴以外的点, 但思想和 UKF 一致都是将远离原点的二维交叉部分的点舍去了, 不同的是 SQF 还保留了距离原点较近的交叉的点, 而 UKF 完全舍去. 从图 2 中还可以看到另一个重要的特点: UKF 采用的点都是集中在坐标轴上, 仅有需要近似的那一维取值为 $\sqrt{3}$, 其它维的取值均为 0, 因此 UKF 在精确计算形如 $x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdots x_d^{n_d}$ 多项式时无能为力, 仅仅可以近似形如 $x_i^{n_i}$ 的多项式, 这也是 UKF 精度不如 SQF 的一个重要原因.

4 仿真与分析

通过 Julier 和 Uhlmann 采用的再入跟踪问题^[16]比较本文提出的 SSRQF 与已知常用的非线性滤波方法的性能(其中 SRQF 与 QF 性能均与 SSRQF 近似, 但计算时间较长, 故仿真结果未予体现). 该问题描述了雷达跟踪再入大气层飞行器问题, 飞行器的动态受到 3 个外力影响. 第一个外力为空气阻力, 为飞行器速度的函数, 并且随着高度变化表现出高非线性; 第二个外力为重力, 造成飞行器向地心加速运动; 第三个外力为随机振动项. 系统的状态空间包括位置 $x_1(k)$, $x_2(k)$ 、速度 $x_3(k)$, $x_4(k)$ 和空气动力参数 $x_5(k)$, 系统的连续时间状态方程为

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_4(t) \\ \dot{x}_3(t) &= D(t)x_3(t) + G(t)x_1(t) + v_1(t) \\ \dot{x}_4(t) &= D(t)x_4(t) + G(t)x_2(t) + v_2(t) \\ \dot{x}_5(t) &= v_3(t)\end{aligned}$$

其中 $D(t)$ 为阻力系数, $G(t)$ 为重力系数, 分别为

$$D(t) = \beta(t) \exp\left\{\frac{[R_0 - R(t)]}{H_0}\right\} V(t)$$

$$G(t) = -\frac{Gm_0}{R^3(t)}, \beta(t) = \beta_0 \exp(x_5(t))$$

其中的 $R(t) = \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)}$ 为飞行器与地心的距离, $V(t) = \sqrt{x_3^2(t) + x_4^2(t)}$ 为飞行器速度, 其中的常数分别按照文献^[16]设置. 从上述的状态方程可以看出, 此跟踪问题是一个复杂非线性问题.

雷达观测值为距离 $r(t)$ 和方向角 $\theta(t)$, 而雷达的坐标为 (x_r, y_r) , 测量频率为 10Hz, 测量方程为

$$r(t) = \sqrt{(x_1(t) - x_r)^2 + (x_2(t) - y_r)^2} + w_1(t)$$

$$\theta(t) = \tan^{-1}\left(\frac{x_2(t) - y_r}{x_1(t) - x_r}\right) + w_2(t)$$

$w_1(t)$ 与 $w_2(t)$ 分别为零均值高斯白噪声. 滤波器的参数详细参数设定见文献^[16], SSRQF 采用的是 3 级精度 $L=3$. 下面我们给出滤波器的性能对比, 经过 50

次蒙特卡罗仿真结果如图 3.

从图 3 可以看出, 三种方法的位置跟踪最后均能收敛, 这是由于位置的可观性较强, 测量误差较小, 因此三种方法的位置估计都能收敛.

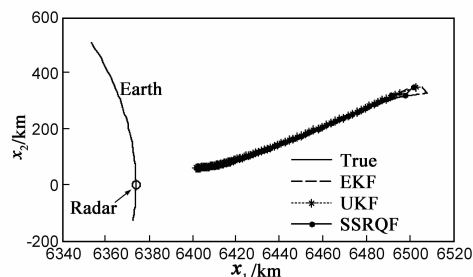


图3 再入轨迹估计结果

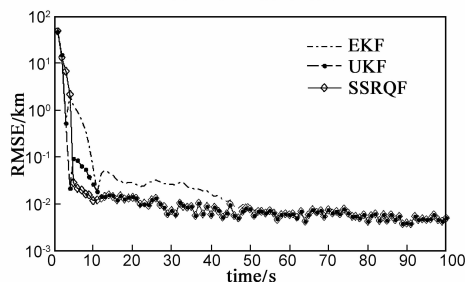


图4 位置(x_2)均方根误差比较

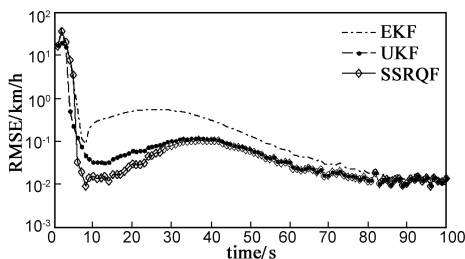


图5 速度(x_4)均方根误差比较

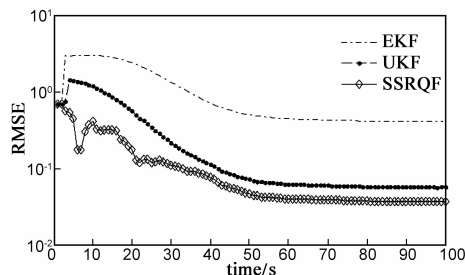


图6 空气动力参数(x_5)均方根误差比较

从图 4 和图 5 可以看到, 采用 SSRQF 估计位置和速度的收敛速度要快于其它两种方法, 说明 SSRQF 比 UKF 和 EKF 的数值计算精度高, 能够达到更高阶的泰勒展开截断精度, 因此在有初始误差时, 在估计值附近泰勒展开时, 初始误差越大, 高阶项对收敛性能的影响越为明显, 因此 SSRQF 收敛速度更快, 其次为 UKF, EKF 最差.

图 6 的参数估计中, 可以看到采用 SSRQF 估计结果的均方误差明显要小于 EKF 和 UKF, 由于此参数建

模为高斯白噪声的积分,这就再一次说明对于高斯积分近似,SSRQF 的精度要高于 UKF 和 EKF,线性化误差更小。但是,从平均计算时间上来看,SSRQF 的计算时间最长为 1.1699s,其次为 UKF,时间为 0.4117s,最快的是 EKF,时间仅为 0.1089s。

5 结论

本文应用稀疏网格理论改进平方根求积分 Kalman 滤波器,为了克服高维积分带来的“维度灾难”,提出采用稀疏网格取点的方法将 QF 积分点数的指数增长减慢为多项式增长,解决了随着维数增长平方根求积分 Kalman 滤波器计算量增长迅速的问题;从采样点的角度分析得到 UKF 是 SQF 的一个特例的结论,并且在此基础上进一步说明了 SQF 相比于 UKF 的优越性;另外,由高斯积分的性质可知,其精度扩展灵活方便,如果需要提高精度,仅需要增加高斯积分点数目即可。但是,需要注意的是,采用 SSRQF 方法尽管其计算复杂度较 SRQF 已经减小很多,但是其积分点仍然较 UKF 多,所以该算法在实时性方面比 UKF 要差一些,对于高维系统来说只能适用于精度要求高但实时性不高的场合。

参考文献

- [1] Y B Shalom, X-R Li, T Kirubarajan. Estimation with Applications to Tracking and Navigation [M]. New York: Wiley and Sons, 2001.
- [2] Jazwinski A. Stochastic Processing and Filtering Theory [M]. New York: Academic Press, 1970. 93 – 347.
- [3] H J Kushner. Approximation to optimal nonlinear filters [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1967, 12(5): 546 – 556.
- [4] S J Julier, J K Uhlmann, H F Durrant-Whyte. A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2000, 45(3): 477 – 482.
- [5] Norgaard M, Poulsen N, Ravn O. New developments in state estimation for nonlinear systems [J]. Automatica, 2000, 36(11): 1627 – 1638.
- [6] N J Gordon, D J Salmond, A F M Smith. Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation [J]. IEE Proceedings on Radar and Signal Processing, 1993, 140(2): 107 – 113.
- [7] Ito K, Xiong K. Gaussian filters for nonlinear filtering problems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2000, 45(5): 910 – 927.

- [8] Arasaratnam I, Haykin S, Elliott R J. Discrete-time nonlinear filtering algorithms using Gauss-Hermite quadrature [J]. Proceedings of the IEEE, 2007, 95(5): 953 – 977.
- [9] 巫春玲, 韩崇昭. 平方根求积分卡尔曼滤波器[J]. 电子学报, 2009, 37(5): 987 – 992.
WU Chun-ling, HAN Chong-zhao. Square-root quadrature Kalman filter [J]. Acta Electronica Sinica, 2009, 37(5): 987 – 992. (in Chinese)
- [10] Guo Dong, Wang Xiao-dong. Quasi-Monte Carlo filtering in nonlinear dynamic systems [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54(6): 2087 – 2098.
- [11] G H Golub, J H Welsch, B. Calculation of Gauss quadrature rules [J]. Mathematics of Computation, 1969, 23(106): 221 – 230.
- [12] Gerstner T, Griebel M. Numerical integration using sparse grids [J]. Numerical Algorithms, 1998, 18(4): 209 – 232.
- [13] Bungartz H J, Griebel M. Sparse grids [J]. Acta Numerica, 2004, 13: 1 – 123.
- [14] Florian H, Viktor W. Likelihood approximation by numerical integration on sparse grids [J]. Journal of Econometrics, 2008, 144: 62 – 80.
- [15] Smolyak, S A. Quadrature and interpolation formulas for tensor products of certain classes of functions [J]. Soviet Math Dokl, 1963, 4: 240 – 243.
- [16] S J Julier, J K Uhlmann. Unscented filtering and nonlinear estimation [J]. Proceedings of the IEEE, 2004, 92(3): 401 – 422.

作者简介



伍宗伟 男, 1985 年 11 月出生于湖北十堰。现为第二炮兵工程大学博士生, 从事姿态估计、信息融合方面的有关研究工作。

E-mail: wzw_submit@163.com



姚敏立 男, 1966 出生于山西运城, 第二炮兵工程大学教授、博士生导师, 主要从事信号与信息处理、智能天线、移动卫星通信等方面的教学和研究工作。近年来致力于开发低成本动中通的理论研究与工程研究。

E-mail: yaominli@sohu.com