连续型粒子群优化算法的均方收敛性分析

罗金炎
(闽江学院数学系,福建福州 350108)

摘 要: 粒子群优化算法是基于生物群体内个体间的合作与竞争等复杂行为产生的群体智能优化算法,已有的理论分析多在确定性的情况下进行算法收敛性分析.本文基于随机系统的矩方程法分析了连续型粒子群优化算法的均方收敛性,并给出了能够保证算法均方收敛域,最后通过仿真实验分析验证了相关结论.

关键词: 矩方程法;随机过程;粒子群优化算法;均方收敛
中图分类号: TP18 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112(2012)07-1364-04
电子学报 URL: http://www.ejournal.org.cn **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2012.07.013

The Analysis of Continuous Particle Swarm Optimization Algorithm′s Mean Square Convergence

LUO Jin-yan
(*Department of Mathematics*, *Minjiang University*, *Fuzhou*, *Fujian* 350108, *China*)

Abstract: Particle swarm optimization (PSO) algorithm is a population-based, self-adaptive search optimization method motivated by the observation of simplified animal social behaviors. Most of the analysis of PSO algorithm is in the deterministic assumptions. Based on the theory of stochastic process, this paper studies the mean square convergence of the particle swarm optimization algorithm. Simulations demonstrate the validity of the proposed method.

Key words: moment equations; stochastic process; particle swarm optimization; mean square convergence

1 引言

通过对生物群体的观察和研究发现,生物群体内个体间的合作与竞争等复杂性行为产生的群体智能,往往能为某些特定的问题提供高效的解决方法[1].Kennedy 等受鸟群觅食行为的启发,于 1995 年提出粒子群优化算法(PSO)[2],之后,Shi 和 Eberhart 在原有基础上提出了惯性权重的概念[3],并对基本算法中的粒子速度更新公式进行了修正,以获得更佳的优化效果,该式一般作为 PSO 算法的标准形式.与进化算法相比,PSO 算法保留了基于种群的全局搜索策略,但其所采用的速度—位移搜索模型操作简单,避免了复杂的进化操作,在解决复杂优化等许多的实际问题中取得了许多成功的应用[4].PSO 算法采用以下公式进行单位迭代次数解的更新:

$$\begin{cases} v_i^{k+1} = wv_i^k + c_1 r_1 (p_i^k - x_i^k) + c_2 r_2 (p_g^k - x_i^k) \\ x_i^{k+1} = x_i^k + v_i^{k+1} \end{cases} \tag{1}$$

其中 v_i^k、x_i^k 分别为第 i 个粒子的速度、位置,ω 为惯性权重,c_1 和 c_2 分写别为认知参数和社会参数,p_i^k 和 p_g^k 分别为个体和群体的历史最优位置.r_1 和 r_2 为两个相互独立的[0,1]之间服从均匀分布的随机变量,分别影响着认知和社会加速常数项(c_1 和 c_2),使得粒子运动路径趋向迭代的粒子群个体最好和全局最好的加权中心[5],即为 $o_i^k = \dfrac{\varphi_1 p_i^k + \varphi_2 p_g^k}{\varphi_1 + \varphi_2}$,记 $\varphi_1 = c_1 r_1$, $\varphi_2 = c_2 r_2$, $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.国内外学者对 PSO 粒子运动轨迹和算法收敛特性进行了广泛研究,Trelea[6]在 p_i^k、p_g^k、φ 时不变且 $\omega = 1$ 的假设前提下给出了 PSO 模型的稳定性以及相应的运动轨迹分析,Emara[7]给出了一种基于连续系统的 PSO 模型,并在 Lyapunov 理论基础上证明其稳定性,上述 PSO 算法收敛性分析大多基于线性系统理论,通过线性时变系统转换成线性定常系统利用成熟的线性定常稳定判据加以分析,往往存在不足.Kadirmakamanathan 基于 Lyapunov 理论对模型中存在随机性的 PSO 算法进行稳定性分析[9],得到算法收敛的充分条件为

$$\left\{ (\omega, \varphi) : |\omega| < 1, \omega \neq 0, \varphi < \frac{1 - 2|\omega| + \omega^2}{1 + \omega} \right\}$$

收稿日期:2011-06-28;修回日期:2011-12-01
基金项目:福建省自然科学基金(No.2009J05011);闽江学院科技启动项目(No.YKQ09001)

然而此条件显得过于严格,有资料[5~7]显示最佳的参数并不在此范围内.金欣磊等在算法分析中把时变系统通过随机过程理论转换成概率意义下的线性定常系统对 PSO 算法进行分析,给出了均方收敛的一个充分条件[10].Fernández-Martínez J L 等基于阻尼弹性力学理论并通过常系数微分/差分方程理论分析了 PSO 算法的收敛域[8],他们忽略随机扰动项将其简化为零值进而基于确定性系统理论进行分析.本文基于随机系统的矩方程法来分析连续型 PSO 算法的均方收敛性,充分考虑了随机因素,通过理论分析给出了保证算法均方收敛域,最后通过仿真实验分析验证了相关结论.

2　PSO 模型分析

PSO 模型中的粒子运动可以表述为下述差分方程,即式(1)可以改写为

$$\begin{cases} x_i^{k+1}+(\varphi-\omega-1)x_i^k+\omega x_i^{k-1}=\varphi o_i^k=\varphi_1 p_i^k+\varphi_2 p_g^k \\ x_i^0=x_{i0} \\ x_i^1=x_i^0+\omega v_{i0}+\varphi(o_i^0-x_i^0) \end{cases} \tag{2}$$

令随机变量 $\xi_i^k=x_i^k-o_i^k$ 为在 k 次迭代时粒子位置与群体中心 o_i^k 的偏差,则式(2)可转化为下述二阶差分方程形式

$$\begin{cases} \xi_i^{k+1}+(\varphi-\omega-1)\xi_i^k+\omega\xi_i^{k-1}=\beta(o) \\ \beta(o)=o_i^k-o_i^{k+1}+\omega(o_i^k-o_i^{k-1}) \end{cases} \tag{3}$$

上述 PSO 模型,已有学者证明其稳定区域为 $\{(\omega,\varphi):|\omega|<1,0<\varphi<2(1+\omega)\}$[11].

该稳定区域能够保证算法收敛,实验也确实表明 φ 取值一般不适合超过 $2(1+\omega)$ 的最大值 4,当 φ 取值超过 4 时,算法基本上很容易发散.但是 Pederson M E 通过实验分析提出的 PSO 算法的优选参数[12]却绝大部分都超出了 $\varphi<2(1+\omega)$ 区域.

定义 1　连续型 PSO 模型(Continuous PSO)[13].PSO 的标准公式(1)可变换为

$$\begin{cases} x''(t)+(1-\omega)x'(t)+\varphi x(t)=\varphi_1 p(t)+\varphi_2 g(t) \\ x(0)=x_0 \\ x'(0)=v_0 \end{cases} \tag{4}$$

其中 $p(t)$ 和 $g(t)$ 分别为个体和群体在 t 时的最优位置.令

$$o(t)=(\varphi_1 p(t)+\varphi_2 g(t))/\varphi,\ \xi(t)=x(t)-o(t)$$

连续型 PSO 可变换成

$$\begin{cases} \xi''(t)+(1-\omega)\xi'(t)+\varphi\xi(t) \\ \quad =-(1-\omega)o'(t)-o''(t)=\Phi(t) \\ \xi(0)=\xi_0 \\ \xi'(0)=\xi'_0 \end{cases} \tag{5}$$

上述 $x(t),\xi(t),o(t),\Phi(t)$ 是关于随机变量 φ 的随机过程且它们之间相互独立.φ 是服从均匀分布的随机变量,在模型分析中用其均值代替 $\phi=E(\varphi)=\dfrac{c_1+c_2}{2}$,$\Phi(t)$ 是复杂的随机过程,有学者基于分子动力学的分析方法将此归于维纳过程[13].PSO 可进一步转化为下述模型.

定义 2　PSO 的依托型随机微分模型(SPSO).连续型 PSO 模型令 $X(t)=\begin{pmatrix}\xi(t)\\ \xi'(t)\end{pmatrix}$,$f(X(t),t)=\begin{pmatrix}\xi'(t)\\ -\phi\xi(t)+(\omega-1)\xi'(t)\end{pmatrix}$,$G(X(t),t)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 则式(5)可表示为

$$\mathrm{d}X(t)=f(X(t),t)\mathrm{d}t+G(X(t),t)\mathrm{d}B(t) \tag{6}$$

3　PSO 算法的收敛性分析

定义 3　设 $X,X_n(n>1)$ 是同一概率空间(Ω,F,P)上的随机变量,若 $\lim\limits_{n\to\infty}E(|X_n-X|)=0$ 成立,则称 $\{X_n\}$ 均值收敛(平均渐进稳定)于 X;若 $\lim\limits_{n\to\infty}E(\|X_n-X\|^2)=0$ 成立,则称 $\{X_n\}$ 均方收敛(均方渐进稳定)于 X.

引理 1[14]　随机微分方程(6)解过程 $X(t)$ 的转移概率密度 $f(x,t|x_0,t_0)$ 满足向前方程

$$\frac{\partial f(x,t|x_0,t_0)}{\partial t}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}[f_i(x,t)f]+\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}[(GDG^T)_{ij}f] \tag{7}$$

引理 2[15]　随机微分方程(6)解过程 $X(t)$ 的矩满足微分方程

$$\frac{\mathrm{d}E\{h\}}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}E\left\{f_i\frac{\partial h}{\partial x_i}\right\}+\sum_{i,j=1}^{n}E\left\{(GDG^T)_{ij}\frac{\partial^2 h}{\partial x_i\partial x_j}\right\}+E\left\{\frac{\partial h}{\partial t}\right\} \tag{8}$$

若设 $h(x)=x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$,上述方程(8)就是对于

$$\begin{aligned} & m_{k_1k_2\cdots k_n}(t) \\ &=E\{x_1^{k_1}(t)x_2^{k_2}(t)\cdots x_n^{k_n}(t)\} \\ &=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}h(x)f(x_0,t_0)f(x,t|x_0,t_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}x_0 \end{aligned}$$

满足的矩方程.

证明　考虑期望

$$\begin{aligned} & m_{k_1k_2\cdots k_n}(t) \\ &=E\{x_1^{k_1}(t)x_2^{k_2}(t)\cdots x_n^{k_n}(t)\} \\ &=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}h(x)f(x_0,t_0)f(x,t|x_0,t_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}x_0 \end{aligned}$$

将上式对时间求导数,得

$$\dot{m}_{k_1k_2\cdots k_n}(t)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}h(x)f(x_0,t_0)\frac{\partial f(x,t\mid x_0,t_0)}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}x_0$$

由引理1,再将式(7)代入上式,然后在整个相空间($-\infty\leqslant x_j,x_{0j}\leqslant\infty$ 对一切 j)上进行分部积分,就得到只含解过程的矩的一阶常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}E\{h\}}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}E\left\{f_i\frac{\partial h}{\partial x_i}\right\}+\sum_{i,j=1}^{n}E\left\{(GDG^T)_{ij}\frac{\partial^2 h}{\partial x_i\partial x_j}\right\}+E\left\{\frac{\partial h}{\partial t}\right\}$$

定理1 连续型 PSO 系统的平均渐进稳定区域为 $\{(\omega,\phi):\omega<1,\phi>0\}$;

均方渐进稳定区域为 $\{(\omega,\phi):\omega<1,\phi>\frac{3}{4}(1-\omega)\}$.

证明 假设 $m_{jk}(t)=E\{\xi^j(t)\xi'^k(t)\}$,由式(8)可以得到一阶矩满足的微分方程

$$\begin{cases}\dot{m}_{10}(t)=m_{01}(t)\\ \dot{m}_{01}(t)=-\phi m_{10}(t)-(1-\omega)m_{01}(t)\end{cases}$$

与此相对应的特征方程为

$$\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ \phi & \lambda+(1-\omega)\end{vmatrix}=0 \text{ 或 } \lambda^2+(1-\omega)\lambda+\phi=0$$

为使特征方程的根有负实部,由罗斯-霍尔维茨准则要求可得

$$1-\omega>0 \text{ 和 } \phi>0$$

即连续型 PSO 系统平均渐进稳定的条件为 $\{(\omega,\phi):\omega<1,\phi>0\}$,与文献[8]分析的连续型粒子群优化算法的稳定性条件一致.

同样由式(8)还可以得到二阶矩满足的方程

$$\begin{cases}\dot{m}_{20}(t)=2m_{11}(t)\\ \dot{m}_{11}(t)=-\phi m_{20}(t)-(1-\omega)m_{11}(t)+m_{02}(t)\\ \dot{m}_{02}(t)=2[-\phi m_{11}(t)-(1-\omega)m_{02}(t)+D_{22}]\end{cases}$$

与此相对应的特征方程为

$$\begin{vmatrix}\lambda & -2 & 0\\ \phi & \lambda+(1-\omega) & -1\\ 0 & 2\phi & \lambda+2(1-\omega)\end{vmatrix}=0$$

或

$$\lambda^3+3(1-\omega)\lambda^2+2[2\phi-(1-\omega)]\lambda+4\phi(1-\omega)=0$$

根据罗斯-霍尔维茨准则,二阶矩稳定的条件是上述三次特征方程的所有系数是正的且满足不等式

$$3(1-\omega)\times 2[2\phi-(1-\omega)]>4\phi(1-\omega)$$

可得连续型 PSO 系统均方渐进稳定的条件为

$$\{(\omega,\phi):\omega<1,\phi>\frac{3}{4}(1-\omega)\}$$

算法的均方稳定区域中 ϕ 的上界,涉及复杂的随机扰动项 $\Phi(t)$,若掌握了该随机扰动项的特性(比如:谱密度或协方差 D_{22}),则可分析出均方稳定区域 ϕ 的上界.

4 仿真实验分析

本文选取 Sphere、Rastrigrin、Griewank、Rosenbrock 和 Schaffer's $f6$ 五个函数为测试函数,实验中惯性权重 ω 选取三段取值范围:Ⅰ(0.5 ~ 0.9)、Ⅱ(0 ~ 0.5)、Ⅲ(−0.6~ −0.1).实验表明加速因子 ϕ 取值一般不适合超过 $2(1+\omega)$ 的最大值4,所以 ϕ 取值在0至4之间.对于惯性权重 ω 的每一段取值,加速因子 ϕ 分别设置了三段取值,一是符合均方渐进稳定条件的取值段,另一个是稳定条件的边界取值段,最后是完全不符合均方渐进稳定条件的取值段.对于每个参数的取值段,随机选取 ω 和 ϕ 的组合值,对于每个组合取值函数的实验次数为100次,种群大小为30,每次运行的最多迭代次数为4000次,实验结果如表1所示.

从测试的数值结果来看,满足均方稳定条件 ω 和 ϕ 参数取值的优化结果达优率在八成以上,处于边界条件的参数取值的优化结果达优率在六成以上,满足稳定条件的优化结果明显优越于不满足条件的情况,验

表1 不同 ω 和 ϕ 取值的实验结果

ω		Ⅰ			Ⅱ			Ⅲ		
ϕ		(0 ~ 0.01)	(0.01 ~ 0.04)	(0.04 ~ 4.0)	(0.01 ~ 0.04)	(0.04 ~ 0.75)	(0.75 ~ 4.0)	(0.01 ~ 0.8)	(0.8 ~ 1.2)	(1.2 ~ 4.0)
Sphere 函数(30维)	平均迭代次数	2493.4	908.2	568.7	1774.5	718.9	231.7	2387.4	1043.6	723.6
	达优率	0.35	0.74	0.89	0.53	0.8	1	0.6	1	1
Rastrigrin 函数(10维)	平均迭代次数	2038.9	1107.4	476.5	1061.5	744.9	273.5	1734.8	848.2	359.8
	达优率	0.32	0.62	0.83	0.4	0.75	0.9	0.49	0.76	0.95
Griewank 函数(10维)	平均迭代次数	1983.9	1236.6	501.7	1248.3	804.7	395.6	1443	910.9	414.7
	达优率	0.28	0.64	0.8	0.37	0.69	0.85	0.58	0.73	0.9
Rosenbrock 函数(10维)	平均迭代次数	2294.3	2052.5	517.3	1818.2	979.8	425.5	2689.1	1058.7	775.1
	达优率	0.31	0.52	0.88	0.38	0.55	0.95	0.29	0.60	0.93
Schaffer's $f6$ 函数(2维)	平均迭代次数	1041.2	878.5	460.7	893.6	718.3	354.6	998.9	838.9	389
	达优率	0.18	0.37	0.8	0.24	0.44	0.81	0.31	0.58	0.85

证了算法均方稳定的条件.算法在不满足稳定条件下仍具有一定的达优率,表明该稳定条件只是充分条件而不是必要条件.在收敛速度方面,三段不同的惯性权重 ω 取值并没有明显的差异;而三段不同的加速因子 ϕ 取值有较大的差异,算法在数值小的 ϕ 值时收敛明显比数值大的 ϕ 值要慢,是因为数值小的 ϕ 值提供的算法迭代步长小于数值大的 ϕ 值的情况.

5　结论

在分析 PSO 系统中粒子运动随机过程的基础上,基于随机系统的矩方程法讨论了连续型 PSO 算法的均方收敛性,给出了能够保证算法均方收敛的参数取值区域,最后通过对 5 个经典测试函数进行的仿真实验,比较了算法在各种参数组合下的优化情况,实验结果表明满足收敛条件的优化结果明显优越于不满足条件的情况,验证了算法均方收敛的条件.本文的结果为 PSO 算法的参数选择具有一定的借鉴作用,并为更好的解决实际问题提供了算法改进的基础和依据.

参考文献

[1] 彭喜元,彭宇,戴毓丰,等.群智能理论及其应用[J].电子学报,2003,31(12A):1982–1988.
PENG Xi-yuan, PENG Yu, DAI Yu-feng. Swarm intelligence theory and applications[J]. Acta Electronica Sinica, 2003, 31(12A):1982–1988.(in Chinese)

[2] Kennedy J, Eberhart RC. Particle swarm optimization[A]. Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks[C]. Perth, Australia, 1995. 1942–1948.

[3] Shi YH, Eberhart RC. A modified particle swarm optimizer[A]. Proceedings of the IEEE International Conference on Evolutionary Computation[C]. Piscataway, NJ, Anchorage, AK USA: IEEE service center, 1998. 69–73.

[4] Poli R, Kennedy J, Blackwell T. Particle swarm optimization[J]. Swarm Intelligence, 2007, (1):33–57.

[5] Clerc M, Kennedy J. The particle swarm-explosion, stability, and convergence in a multidimensional complex space[J]. IEEE Transactions on Evolutionary computation, 2002, 6(1):58–73.

[6] Trelea I C. The particle swarm optimization algorithm: Convergence analysis and parameter Selection[J]. Information Processing Letters, 2003, 85(6):317–325.

[7] Emara H M, Fattah A H A. Continuous swarm optimization technique with stability analysis[A]. Proceedings of American Control Conference[C]. Cairo, Egypt, 2004. 2811–2817.

[8] Fernández-Martínez J L, García-Gonzalo E, Fernández-Alvarez J P. Theoretical analysis of particle swarm trajectories through a mechanical analogy[J]. International Journal of Computational Intelligence Research, 2008, 4(2):93–104.

[9] Kadirkamanathan V, Selvarajah K, Fleming P. Stability analysis of the Particle dynamics in particle swarm[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2006, 10(3):245–255.

[10] 金欣磊,马龙华,吴铁军,等.基于随机过程的 PSO 收敛性分析[J].自动化学报,2007,33(12):1263–1268.
Jin X L, Ma L H, Wu T J, et al. Convergence analysis of the particle swarm optimization based on stochastic processes[J]. Acta Automatica Sinica, 2007, 33(12):1263–1268.(in Chinese)

[11] Van der Bergh F, Engelbrecht A P. A study of particle swarm optimization particle trajectories[J]. Information Sciences, 2006, 176(8):937–971.

[12] Pederson M E. Good Parameters for Particle Swarm Optimization[R/OL]. Hvass aboratories, Technical Report HL1001. http://www. hvass-labs. org/people/magnus/publications/pedersen10good-pso.pdf. 2010.

[13] Mikki S M, Kishk A A. Physical theory for particle swarm optimization[J]. Progress in Electromagnetics research, 2007, 75:171–207.

[14] Soong T T. Random Differential Tail Equations in Science and Engineering[M]. New York and London: Academic Press, 1973.

[15] Collins J D, Thomson W T. The eigen value problem for structural systems with statistical properties[J]. AIAA Journal, 1969, 7(4):642–648.

作者简介

罗金炎　男,1975 年 7 月出生于福建上杭.现为闽江学院副教授,研究方向为计算数学和智能优化算法.
E-mail: jyluo_jms@yahoo.com.cn