

# 基于信息自由度采样的信号重构方法研究进展

林 杰,石光明,董伟生

(西安电子科技大学电子工程学院,陕西西安 710071)

**摘 要:** 有限的采样能力和高分辨的重构需求是现代信号处理中最基本的矛盾.不完全采样(或观测),高分辨重构信号,是信号处理、通信、应用数学等领域的期待解决的问题之一.本文通过回顾现有的不完全采样、高分辨率重构方法的研究成果,提炼出一个基于信息自由度采样的信号优化重构方法的框架.在此框架中有三个核心方面,信息自由度决定采样率,采样方法确定约束条件,信号特征指导目标函数的建立.本文着重综述采样重构方法有效性的分析手段,评论其优缺点.最后,我们展望基于信息自由度采样的信号重构问题的研究前景,并展示我们的新探索与新成果.

**关键词:** 信息自由度; 不完全采样; 高分辨优化重构; 压缩感知; 低秩矩阵填充问题

**中图分类号:** TN911.7      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112 (2012) 08-1640-10

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>      **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2012.08.023

## Research Advances in Reconstruction Methods Based on Information Degree-of-Freedom Sampling

LIN Jie, SHI Guang-ming, DONG Wei-sheng

(School of Electronic Engineering, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China)

**Abstract:** As is well known, the limited ability of data acquisition and the high-resolution reconstruction (required by many applications) is an inherent contradiction in modern signal processing. How to reconstruct the signal with high-resolution from a limited number of data is one unsettled problem in the research areas of signal processing, communications, applied mathematics etc. By reviewing the achievements of data acquisition approaches by incomplete sampling and high-resolution reconstruction, an optimization framework for signal reconstruction based on degree-of-freedom of information is abstracted. There are three key aspects in this framework, the degree of freedom of the signal information directly influences the sampling rate, the constraints are determined by the sampling method and the object function is decided by the feature of signal. This paper focuses on the effectiveness of the means used to analyze these data acquisition approaches and the discussion of their advantages and disadvantages. In the end, we propose the research prospect of data acquisition by the incomplete sampling and high-resolution reconstruction and show our new research and result.

**Key words:** degree of freedom of information; incomplete sampling; high-resolution reconstruction by optimization; compressed sensing; low-rank matrix completion

### 1 引言

在传统的信号获取传输处理中,通常以满足奈氏(Nyquist)采样定理的采样率对信号均匀采样、变换压缩再进行传输,这样的行为对采样成本和计算成本均造成了浪费.另一方面,在实际的信号处理中存在以下困难:获取大量的采样数据是非常耗时、昂贵或者物理上不可行的,如核磁共振成像,地震数据采集;对于特定类信号,如超宽带信号,若根据奈氏采样定理对其采样,现有

商业的采样芯片无法满足其采样率或分辨率的要求.

归根结底,信号的采样重构处理是为了获取感兴趣的信号信息(即不确定性).那么信号信息到底以何种形式体现出来的呢?为了定量描述信号的不确定性,文献[1~3]使用单位时间内的信号自由度(degrees of freedom per unit time)这一概念.信号的自由度越小,可压缩性就越大.对实带限信号(频率范围为 $[-B/2, B/2]$ ),以奈氏采样间隔 $T=1/B$ 对其均匀采样,其单位时间内的自由度为 $B^{[2]}$ ,信息体现在每一个离散样本上;在变换空

间中,信号自由度为表示信号所需基函数的数量<sup>[3]</sup>,信息体现在这些基函数所对应的非零系数上.鉴于信号信息量由信号在某个空间的自由度来度量,因此,在信号的采样重构处理中,信号自由度是样本数量的根本依据.本文把利用信号自由度指导信号采样重构的方法称为“基于信息自由度采样的信号重构方法”.目前已有几种具有代表性的基于信息自由度采样的信号重构方法.

(1)更新率采样(Sampling with innovation rate)

对某些非带限信号类,如狄拉克序列(Diracs)、非均匀样条信号(nonuniform splines)和分段多项式信号(piecewise polynomials)等,奈氏采样定理无法指导它们的采样.然而,Vetterli 等人指出<sup>[2,4]</sup>,这些类信号的自由度(或更新率,innovation rate)是有限的,用合适的采样核以等于(或高于)更新率对其均匀采样,由采样样本利用零化滤波器方法可精确重构信号.Vetterli 等人提出的采样定理是奈氏采样定理中的“带限信号与 sinc 核函数”的推广.更新率采样方法在信号无噪声时可达近最优的采样率(更新率为  $2K$  的信号仅需要  $2K + 1$  个采样).该方法可应用于信号处理中获取脉冲位置调制信号,生物系统中的脑电图(EEG)、光学相干 X 射线断层扫描术(CT).但是,在此方法中,信号类型发生变化,采样方法和恢复方法也随之发生变化,这使得其方法的应用范围受到了很大的限制.

(2)压缩感知(Compressed sensing)

通常,感兴趣的信号都具有一定的结构特征,选择变换空间  $\Phi = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n]$ ,  $\varphi_i \in R^n$ ,使信号  $f \in R^n$  可表示为  $K$  个基函数的线性叠加,即  $f = \sum_{k=1}^K x_{i_k} \varphi_{i_k}$ ,  $i_k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $x \in R^n$  是变换系数.如果  $K \ll n$ ,则称  $x$  为  $K$ -稀疏的,信号  $f$  在空间  $\Phi$  中是  $K$ -稀疏的,并且自由度是  $K$ <sup>[5]</sup>.使用随机矩阵  $\Psi \in R^{m \times n}$ ,  $K < m \ll n$  (其元素服从某种随机分布)对稀疏信号  $f$  进行观测,得到观测  $b$ ,即  $b = \Psi f$ .根据信号  $f$  在空间  $\Phi$  中稀疏的特征,采用优化计算可恢复信号系数:

$$(l_0) x^{(0)} = \operatorname{argmin} \|x\|_0 \quad \text{s.t.} \quad b = Ax \quad (1)$$

其中  $A = \Psi\Phi$ ,  $\|x\|_0$  表示向量  $x$  中非零系数的个数.式(1)的问题是非凸的组合优化问题,当问题的维度较大时,是 NP-难问题.常用的方法是把非凸函数  $\|x\|_0$  松弛为凸函数  $\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$ ,进而转化为线性规划问题,可采用内点法等方法有效求解.

(3)低秩矩阵填充问题(Low-rank matrix completion)

矩阵分析中,把秩为 1、Frobenius 范数为 1 的矩阵(简称为秩 1 矩阵)作为原子,  $C^{m \times n}$  空间中所有不共线原子的(无穷)集合记为  $\Gamma$ <sup>[6]</sup>.任意矩阵  $X \in C^{m \times n}$  的原

子分解可表示为  $X = \sum_j a_j \varphi_j$ ,  $\varphi_j \in \Gamma$ .矩阵的分解和信号的分解的不同在于,用来表示信号的离散基函数的每一个元素都是确定的,信号和基函数是“元素级”对应.用来表示矩阵的原子是元素未定的秩 1 矩阵,即矩阵和原子是“对象级”对应.因此,矩阵的自由度由秩和维度共同决定.一个维度为  $m \times n$ 、秩为  $r$  的矩阵,自由度为  $r(m + n - r)$ .

低秩矩阵填充问题研究的是利用不完整的采样数据来恢复低秩矩阵,是现代应用数学中的一个研究热点,通常表现为秩最小化问题<sup>[6]</sup>:

$$\min \operatorname{rank}(X) \quad \text{s.t.} \quad X \in \Xi \quad (2)$$

其中  $X \in R^{m \times n}$  是决策变量,  $\Xi$  为凸的约束集合.常用约束为仿射变换  $A(X) = b$ ,  $A: R^{m \times n} \rightarrow R^p$  ( $p \ll mn$ ) 是线性映射,此类问题被称为仿射秩最小化问题.式(2)问题是非凸的 NP-难问题.一类有效的方法是使用核函数最小化方法<sup>[7]</sup>进行求解,即使用核函数  $\|X\|_* = \sum_i \sigma_i$  ( $\sigma_i$  是矩阵  $X$  的奇异值)代替目标函数中的秩,进而可转化为半定规划问题进行有效求解.

通过以上的简单回顾,我们认识到上述基于信息自由度采样的信号重构方法中,除了更新率方法,压缩感知和低秩矩阵填充问题非常类似的,在特殊情况下,压缩感知和低秩矩阵填充问题中的仿射秩最小化问题等效:若矩阵  $X$  是对角阵,即  $X = \operatorname{diag}(x)$ ,  $x = (x_1, \dots, x_N)$ ,这时  $\operatorname{rank}(X) = \operatorname{card}(x) = \|x\|_0$  成立,并且对角阵的奇异值之和(核函数)等于对角阵元素的绝对值之和,即  $\|X\|_* = \|x\|_1$ .

这里把压缩感知与低秩矩阵填充问题的关联性归纳为以下几个方面,参照表 1.

表 1 研究内容类比

	压缩感知	(仿射)低秩矩阵填充问题
自由度概念	向量势 $\ x\ _0$	矩阵秩 $\operatorname{rank}(X)$
观测方程	$b = Ax$	$b = A \operatorname{vec}(X)$
目标函数	$\min \ \cdot\ _1$	$\min \ \cdot\ _*$

(1)压缩感知的处理对象是具有稀疏表示的信号或者图像,低秩矩阵完整问题处理对象是低秩矩阵.处理对象均具有低自由度的特点,可用低维空间中的向量(分解系数)来刻画.

(2)观测方法采用线性观测,把高维对象投影到低维(观测)空间中,投影的原则是:信号投影后不在(或不接近)投影矩阵的零空间中(因为若  $AX_1 = AX_2 = 0$ ,则无法区分  $X_1$  和  $X_2$ ).

(3)依据待恢复对象特征,重构方法采用优化计算,均需要建立可正确求解的目标函数.

上述几个方面可包含在同一个问题框架中:给定

函数类  $F$  (维度为  $n$ ), 线性采样算子  $I_n$  (采样  $m$  个样本,  $m \ll n$ ), 恢复算子  $R_n$ , 则不完全采样、高分辨重构问题可表示为  $(F, I_n, R_n)$ , 或称为信息采样恢复问题, 该问题中最优的恢复误差为  $\inf_{I_n, R_n} \sup_{f \in F} \|f - R_n(I_n(f))\|_2$ . 我们关注的问题是: “哪些  $(F, I_n, R_n)$  可以保障对信号不完全采样后进行高分辨重构, 可达到最优 (或近最优) 的误差界限?”. 稀疏信号和低秩矩阵是典型的可以被不完全采样、高分辨重构的对象. 本文通过分析这两类对象的采样重构方法, 把采样重构问题的研究核心凝练为“信息采样, 特征解耦”这样一个优化问题框架, 信息采样即对信号进行观测的过程, 特征解耦即根据信号特征优化求解, 这是一对互相影响、互相制约的问题. 精确重构信号所必需的观测样本数量与信息采样和特征解耦的方法有着直接的联系, 但是本质上取决于信号的信息自由度. 本文着重综述了“信息采样和重构方法的有效性”的理论分析方法, 指出其中的关联, 为以后的研究提供借鉴. 最后, 我们指出了基于信息自由度采样的信号重构问题的研究前景, 并给出了我们在此方面初步的探索结果.

## 2 稀疏信号的信息采样重构方法

前文介绍的  $K$ -稀疏向量也称为是  $l_0$  稀疏的. 在实际信号处理中, 向量可能并不严格满足  $l_0$  稀疏的特性, 但是按照降序排列后, 第  $k$  个元素满足  $|x_k| \leq R \cdot k^{-1/p}$ ,  $0 < p \leq 1$ ,  $R > 0$  是常数, 这样的向量是可压缩的<sup>[8]</sup>, 也称为是  $l_p$  稀疏的<sup>[9]</sup>, 如光滑信号的傅里叶系数或小波系数, 自然图像的小波系数, 故称信号 (或图像) 在傅里叶域 (或小波域) 是  $l_p$  稀疏的.

### 2.1 压缩感知方法

压缩感知理论指出, 对  $l_p$  ( $0 \leq p \leq 1$ ) 稀疏信号, “采样”和“压缩”可同时进行<sup>[10~13]</sup>. 这是因为, 根据奈氏采样定理得到的信号存在较大冗余, 利用信号稀疏表示方法<sup>[14~18]</sup>可大大的去除冗余, 提高可压缩性. 这也是许多有损压缩技术有效性的保障, 例如 JPEG, JPEG2000. 压缩感知中对稀疏信号的采样方式是“随机观测”, 即观测矩阵的元素服从某种随机分布模型 (如 Gaussian、Bernoulli 分布). 也可以随机抽取正交矩阵 (如 Fourier、Hadamard 矩阵) 的部分行作为观测矩阵. 由于观测数量少于待恢复信号长度, 信号重构问题是欠定问题, 恢复算法把在变换空间  $\Phi$  中最稀疏的那个向量作为最优解. 为了能够有效计算求解, 压缩感知中常求解如下的凸问题来恢复稀疏信号:

$$(l_1) \mathbf{x}^{(1)} = \operatorname{argmin} \|\mathbf{x}\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (3)$$

采用随机矩阵进行采样且信号足够稀疏,  $(l_1)$  等价于  $(l_0)$ , 即  $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)}$ <sup>[19,20]</sup>. 当采用  $l_1$  最小化方法, 观测矩

阵为 Gaussian 或 Bernoulli 矩阵, 样本数量满足  $m = O(K \log n)$ , 当观测矩阵为部分 Fourier 矩阵, 样本数量满足  $m = O(K(\log n)^4)$ <sup>[21]</sup>. 稀疏信号恢复问题还可以采用贪婪算法 (如匹配追踪方法<sup>[22]</sup>、正交匹配追踪方法<sup>[23]</sup>)、迭代阈值方法<sup>[24]</sup>来进行求解. 除了信号的稀疏性, 也可以利用信号其他的特征来恢复信号. 如对全变差较小的自然图像, 可求解问题  $\min TV(\mathbf{f}) \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{b} = \Psi \mathbf{f}$  来进行图像重构, 其中  $TV(\mathbf{f})$  表示图像的全变差. 文献<sup>[25]</sup>采用了自回归 (AR) 模型来描述图像, 也取得了较好的恢复结果.

### 2.2 压缩感知方法的有效性分析

对照前面提出的信息采样重构问题的框架, 压缩感知研究的是  $l_p$  ( $0 \leq p \leq 1$ ) 稀疏信号类  $F = \{\mathbf{f}: \|\Phi^{-1}\mathbf{f}\|_p \leq R\}$  ( $R > 0$ ), 信息采样算子  $I_n = \mathbf{A} = \Psi\Phi$ , 重构算子  $R_n$  是非线性的优化算法. 根据现有文献的成果, 本文将从几个不同的分析角度来说明如何分析信息采样重构算法的有效性. 不失一般性, 假定信号类为  $F = \{\mathbf{f}: \|\Phi^{-1}\mathbf{f}\|_1 \leq 1\}$ . 鉴于凸优化问题的计算简单、有最优解保障的特点, 恢复算子  $R_n$  设定为  $(l_1)$  问题. 那么矩阵  $\mathbf{A} = \Psi\Phi$  要满足什么条件才能保证可求得最优解  $\mathbf{x}^{(1)}$ , 并且  $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)}$ ?

#### 2.2.1 基于矩阵的分析

##### (1) 结构条件 CS1-CS3

Donoho 指出, 如果矩阵  $\mathbf{A}$  满足 CS1-CS3 条件, 则是近最优的信息采样算子<sup>[11]</sup>. 这里简单的解释一下 CS1-CS3 条件的含义. 对矩阵  $\mathbf{A}$ , 根据坐标集  $I \subset \{1, \dots, n\}$  抽取列向量, 组成矩阵  $\mathbf{A}_I$ ,  $\mathbf{V}_I$  表示  $\mathbf{A}_I$  的列空间. 如果  $|I| \leq \rho m / \log n$  ( $\rho > 0$  为常数), ①CS1 条件:  $\mathbf{A}_I$  的最小奇异值大于 0. ②CS2 条件: 对  $\mathbf{V}_I$  中的每一个向量  $\mathbf{v}$ , 满足  $\|\mathbf{v}\|_1 \geq \eta \sqrt{m} \|\mathbf{v}\|_2$ ,  $\eta > 0$ . ③CS3 条件: 对  $\mathbf{V}_I$  中的每一个向量  $\mathbf{v}$ , 用  $\mathbf{A}_I$  的列线性表示为  $\mathbf{v} = \mathbf{A}_I \mathbf{a}$ , 用  $\mathbf{A}_I$  的列线性表示为  $\mathbf{v} = \mathbf{A}_I \mathbf{b}$ , 则  $\|\mathbf{a}\|_1 \gg \|\mathbf{b}\|_1$ . 当矩阵的维度足够大, 只要选择合适的参数, 满足 CS1-CS3 条件的矩阵是普遍存在的. 一般来说, 只要矩阵中的样本满足某种概率分布, 矩阵就满足 CS1-CS3 条件. 进而存在常数  $\rho > 0$ , 当信号的稀疏度  $K \leq \rho m / \log n$ , 通过求解  $(l_1)$  问题可精确得到最优解  $\mathbf{x}^{(1)}$ , 且  $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)}$ .

##### (2) 受限等距性质 (Restricted isometry properties, RIP)

定义<sup>[20]</sup> 如果存在一个  $\delta_k \in (0, 1)$  使得所有向量  $\mathbf{x}$ ,  $\|\mathbf{x}\|_0 \leq k$  都满足

$$(1 - \delta_k) \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 \leq (1 + \delta_k) \|\mathbf{x}\|_2^2 \quad (4)$$

则矩阵  $\mathbf{A}$  满足  $k$  阶 RIP 性质, 简记为  $(k, \delta_k)$ . 等价条件是要求矩阵  $\mathbf{A}_I^T \mathbf{A}_I$  的特征值在区间  $[1 - \delta_k, 1 + \delta_k]$  内, 本质上 RIP 性质和一致不确定性原则 (UUP)<sup>[9]</sup> 是一致的. 满足  $k$  阶 RIP 性质的矩阵, 随机抽取其中  $k$  列 (或少于

$k$  列), 这些列之间近似正交<sup>[21]</sup>. 矩阵  $A$  的 RIP 性质是求解  $(l_1)$  问题恢复稀疏信号的充分非必要条件, 满足 RIP 性质意味着恢复方法具有稳定性和鲁棒性. 矩阵的 RIP 性质可以通过 JL 引理来进行证明<sup>[26]</sup>, 但是 RIP 常数却很难计算.

Candès 证明了只要矩阵满足  $(2k, \sqrt{2}-1)$ , 求解  $(l_1)$  问题能恢复所有的  $k$ -稀疏信号<sup>[27]</sup>. 其他稀疏信号恢复算法也常使用矩阵的 RIP 性质作为算法有效性的理论保障, 如正交匹配追踪 (OMP)  $(k+1, 1/3\sqrt{k})$ <sup>[23]</sup>, 正则化正交匹配追踪 (ROMP)  $(2k, 0.06/\sqrt{\log k})$ <sup>[28]</sup>, 压缩感知匹配追踪 (CoSaMP)  $(2k, 0.025)$  或  $(4k, 0.1)$ <sup>[29]</sup>, 子空间追踪 (SP)  $(3k, 0.165)$ <sup>[30]</sup>.

### 2.2.2 基于空间的分析

(1)  $k$ -邻近 (neighborly) 性质

**定义**<sup>[31]</sup> 矩阵  $A = [a_1, \dots, a_n]$ ,  $a_i \in R^m$ , 多面体  $P$  是  $2n$  个点  $(\pm a_i)$  在  $R^m$  空间中的凸包. 如果  $2n$  个点中任意的  $k+1$  个点都是  $P$  的一个面的顶点, 则称  $P$  是中心对称的, 并具有  $k$ -邻近性质.

Donoho 利用拓扑学分析了多面体的面的数量经过映射后的变化情况<sup>[32]</sup>, 揭示了压缩感知理论中的观测方程组解的性质. 当观测矩阵  $A$  对应的多面体  $P$  具有  $k$ -邻近性质, 单位  $l_1$  球  $(\{x \in R^n, \|x\|_1 \leq 1\})$  经过  $A$  投影到低维空间后, 维度为  $0, 1, \dots, k$  的面 (维度为 0 的面即顶点, 维度为 1 的面即棱, ...) 的数量均保持不变. 再进一步, 单位  $l_1$  球的面经过  $A$  投影后没有减少, 那么求解  $(l_1)$  问题可以精确的恢复  $l_0$  稀疏信号. 因此, 观测矩阵  $A$  对应的多面体  $P$  具有  $k$ -邻近性质, 意味着求解  $(l_1)$  问题能够恢复任意  $k$ -稀疏的信号, 反之亦然. 即该条件是  $(l_0)$  和  $(l_1)$  问题等价的充分必要条件. Gaussian 分布的点集的凸包具有  $k$ -邻近性质<sup>[33]</sup>, 因此 Gaussian 矩阵常被作为观测矩阵.

(2) 零空间性质

$(l_1)$  问题的解空间为仿射空间  $\{x: Ax = b\} \equiv \{x^{(1)} + v: v \in \text{Null}(A)\}$ , 此空间中  $l_1$  范数最小的向量就是最优解. 因此,  $x^{(1)}$  是  $(l_1)$  问题最优解的充分必要条件为  $\|x^{(1)} + v\|_1 > \|x^{(1)}\|_1, \forall v \in \text{Null}(A) \setminus \{0\}$ . 在此基础上, Yin 和 Zhang 推导出  $x^{(1)}$  是  $(l_1)$  问题唯一解的充分条件是<sup>[34]</sup>, 对  $v \in \text{Null}(A) \setminus \{0\}$

$$\sqrt{\|x^{(1)}\|_0} < \min \left\{ \frac{1}{2} \frac{\|v\|_1}{\|v\|_2} \right\} \quad (5)$$

当信号满足式 (5) 时,  $x^{(1)} = x^{(0)}$ . 文献<sup>[35]</sup>指出, 存在一个  $(n-m)$  维的子空间集合  $S$ , 对所有的子空间  $V_{(n-m)} \subset S$ , 以下条件成立:

$$\frac{\|v\|_1}{\|v\|_2} \geq \frac{C\sqrt{m}}{\sqrt{1+\log(n/m)}}, \forall v \in V_{(n-m)} \setminus \{0\} \quad (6)$$

其中,  $C$  为常数, 与维度无关. Gaussian 矩阵  $A$  的样本张成的  $p$  维子空间以高概率满足式 (6), 故取  $V_p = \text{Null}(A)$ ,  $p = n - m$ , 如果  $\|x^{(1)}\|_0 < \frac{C^2}{4} \frac{m}{1+\log(n/m)}$ ,  $x^{(1)}$  将以高概率是  $(l_1)$  问题的唯一解, 也是  $(l_0)$  的解. 此结论同样适用于 Bernoulli 矩阵, 部分正交矩阵.

零空间的向量性质, 有的文献称之为零空间的球切性质<sup>[36]</sup>, 指的是用适当维度的线性子空间 (观测矩阵的零空间) 去切一个单位球, 得到的切面近似为一个球面. 在这样的切面上, 向量不具有稀疏性质, 这意味着, 对稀疏信号进行投影, 没有把信号投影到其到观测矩阵的零空间中, 在这种情况下才有求解的可能.

### 2.2.3 统计分析方法——相变函数

**定理**<sup>[37]</sup> 观测矩阵元素服从  $N(0, 1)$  分布, 考虑序列  $(n, m, k)$ ,  $\delta = m/n$ ,  $\rho = k/m$ ,  $n \geq n_0$  ( $n_0$  是常数). 如果观测数量满足  $m > k/\rho(\delta, C^n) \cdot (1 - R(\epsilon, m, n))^{-1}$ , 其中  $R(\epsilon, m, n) = 2[m^{-1} \log(4(n+2)^6/\epsilon)]^{1/2}$ , 则求解  $(l_1)$  问题可成功恢复  $k$ -稀疏信号的概率为  $(1 - \epsilon)$ .

该定理使用了相变 (phase transition) 函数  $\rho(\delta, C^n)$  来阐明稀疏度  $k$ 、观测数量  $m$ 、待恢复信号维度  $n$  与成功恢复信号的概率  $(1 - \epsilon)$  之间的关系, 如图 1 所示. 该图给出了求解  $(l_1)$  问题恢复信号 (下方的曲线组) 和正信号 (上方的曲线组) 时, 恢复概率分别为 0.1, 0.5, 0.9 时的相变函数. 其含义是, 给定序列  $(m, n, k)$ , 如果对应的坐标  $(\delta = m/n, \rho = k/m)$  在某一概率曲线下方, 则求解  $(l_1)$  问题能以此概率恢复信号, 在此曲线之上则不能. 相变函数是一个有指导作用的曲线: 针对一定稀疏率信号, 可由曲线位置推断出以某一个概率恢复信号所需要的观测数量. 相变函数是通过大量的实验数据得到的, 很难通过证明来推导.

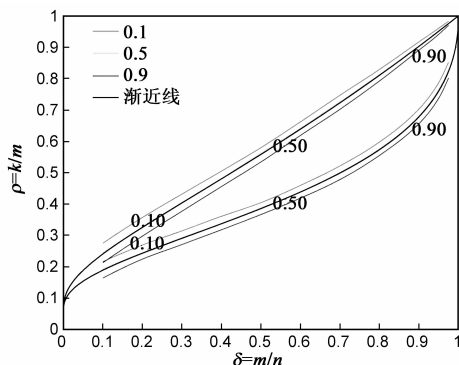


图1 文献<sup>[37]</sup>中的相变函数

### 2.2.4 总结

上述的各种分析方法从不同角度给出了利用求解  $(l_1)$  问题恢复稀疏信号时, 矩阵  $A$  需要满足的条件. 一方面, 上述分析方法是紧密关联的, CS1、RIP 条件都是对矩阵特征值的约束; CS1-CS3 条件与零空间性质基本

上是一致的,都体现了矩阵  $\mathbf{A}$  零空间的球切性质; $k$ -邻近性质和矩阵列的相关性<sup>\*</sup>是紧密联系的,如果观测矩阵的不相干系数  $\mu \leq \sqrt{n}/(2k-1)$ ,那么多面体  $P$  具有  $k$ -邻近性质<sup>[31]</sup>.

另一方面,这些方法自身存在一定的不足.首先,虽然 RIP 条件被现有文献广泛用于理论推导和证明,但是 RIP 条件被证明“不够好”,在文献[38]中,作者证明了存在这样的矩阵:即使它的 RIP 常数  $\delta_{2k}$  无限接近  $1/\sqrt{2}$ ,仍有  $k$ -稀疏的向量不能通过求解  $(l_1)$  问题重构.其次,基于矩阵的分析方法涉及到了特征值的估计,如 CSI、RIP 或 UUP,这给计算量带来了额外负担.而且当矩阵左乘一个非奇异矩阵时  $\mathbf{b} = \mathbf{Ax} \rightarrow \mathbf{Gb} = \mathbf{GAx}$ ,对求解的算法来说,解空间是不变的,但是基于矩阵的分析结果却会发生变换,如 RIP 常数.因此,与基于矩阵的分析方法相比,基于空间的分析方法更加稳定,并且能够将先验信息方便的融合到分析中.最后,若观测数量固定,根据  $k$ -邻近性质推导出的可恢复信号的最大稀疏度要比 RIP 条件给出的值更大.但是  $k$ -邻近性质只适用于无噪声的  $l_0$  稀疏信号的  $l_1$  最小化恢复算法分析, RIP 则可以应用于分析  $l_p (0 \leq p \leq 1)$  最小化算法、贪婪算法,以及  $l_p (0 < p \leq 1)$  稀疏信号、含噪信号的恢复算法,因此暂时看来, RIP 条件的分析方法仍然是无可取代的.

### 3 低秩矩阵的信息采样重构方法

已知维度为  $m \times n$ 、秩为  $r$  的矩阵,其自由度是  $r(m+n-r)$ . 对低秩矩阵,由于  $r \ll \min(m, n)$ ,有  $r(m+n-r) \ll mn$ ,考虑到矩阵的低自由度特点,由部分样本重构矩阵是可能的,该问题称为低秩矩阵填充问题.问题来源于机器学习、控制理论、离散几何等领域,如控制理论中设计系统模型时,通常期望系统模型的复杂度低,体现为系统方程的矩阵的秩较小.尽管低秩矩阵填充问题的提出由来已久,由于矩阵秩是非凸的,在引入核函数最小化之前,该问题的求解都是非常困难的<sup>[39]</sup>.对单位球  $\{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \|\mathbf{X}\|_F \leq 1\}$  内的矩阵,核函数是秩的凸包,是秩的最好(最紧)凸逼近<sup>[7]</sup>.核函数最小化问题可使用快速算法来求解<sup>[40,41]</sup>.根据获取样本方式的不同,常见的低秩矩阵填充问题分为两种:仿射秩最小化(affine rank minimization, ARM)问题和矩阵填充(matrix completion, MC)问题.尽管都可采用核函数最小化方法求解,但由于约束条件不同,现有文献中对这两个问题的分析方法有很大的不同.

#### 3.1 ARM 问题

##### 3.1.1 ARM 问题简介

在仿射秩最小化问题中,矩阵样本的获取是通过

对矩阵进行仿射变换,可表示为:

$$\min \text{rank}(\mathbf{X}) \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{A}(\mathbf{X}) = \mathbf{b} \quad (7)$$

其中  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{A}: \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^p$  是线性映射,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^p$ , 式(7)中的约束可转化成  $\mathbf{A} \text{vec}(\mathbf{X}) = \mathbf{b}$ ,  $\text{vec}(\mathbf{X})$  是把矩阵  $\mathbf{X}$  的列向量首尾相连得到的向量,  $\mathbf{A}$  是维度为  $p \times mn$  的矩阵.类似于压缩感知理论,仿射秩最小化问题中,当  $p \ll mn$ ,通过线性映射得到的观测是对低秩矩阵同时进行了“采样”和“压缩”.通过求解核函数最小化问题

$$\min \|\mathbf{X}\|_* \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{A}(\mathbf{X}) = \mathbf{b} \quad (8)$$

可等价的解决问题(7).仿射秩最小化问题中,给定样本数量,影响矩阵恢复质量的因素有:映射方法和恢复算法. Recht 等人<sup>[6]</sup>证明了如果式(7)中映射对应的矩阵  $\mathbf{A}$  的元素是服从某种随机分布的,如 Gaussian 分布,那么当观测数量满足  $p \geq Cr(m+n)\log(mn)$  ( $C$  是正常数)时,则大部分维度为  $m \times n$ 、秩为  $r$  的矩阵都可以由核函数最小化方法以极高概率成功恢复.观测数量本质上是由矩阵的自由度决定的,在许多的实际问题中,观测数量在  $2r(m+n-r) \sim 4r(m+n-r)$  就能够成功恢复低秩矩阵.

##### 3.1.2 ARM 问题中信息重构有效性分析方法

鉴于仿射秩最小化问题与压缩感知问题的相似性,两者的分析方法也是非常相似的.下面我们从几个不同角度给出核函数最小化方法求解仿射秩最小化问题的可行性分析.

###### (1) 基于矩阵的分析——RIP 分析

Recht 等人通过把压缩感知框架中分析向量映射的 RIP 性质扩展到对矩阵映射的分析,完成了核函数最小化方法求解仿射秩最小化问题的理论证明.

**定义**<sup>[6]</sup>  $\mathbf{A}: \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^p$  是线性映射(不失一般性的假设  $m \leq n$ ),对整数  $r = 1, \dots, m$ ,  $r$ -RIP 常数定义为最小的  $\delta_r$ ,使所有秩小于等于  $r$  的矩阵满足

$$(1 - \delta_r) \|\mathbf{X}\|_F \leq \|\mathbf{A}(\mathbf{X})\|_2 \leq (1 + \delta_r) \|\mathbf{X}\|_F \quad (9)$$

其中,  $\|\cdot\|_F$  为 Frobenius 范数,记为  $(r, \delta_r)$ .满足该条件的矩阵  $\mathbf{X}$ ,是广义的 stiefel 流形——维度  $m \times n$ 、秩为  $r$  ( $r \leq \min(m, n)$ ) 矩阵构成的空间.满足 RIP 性质的线性映射,保证了所有秩小于等于  $r$  的矩阵,映射后都不会落入(或不接近)映射矩阵的零空间<sup>[39]</sup>.

映射的 RIP 性质是核函数最小化方法求解低秩矩阵填充问题的充分条件.当  $p \geq Cr(m+n)\log(mn)$  时,随机矩阵(如 Gaussian 矩阵, Bernoulli 矩阵)以高概率满足 RIP 条件.如果仿射变换满足 RIP 条件  $(5r, 1/10)$ ,核

\* 由矩阵  $\mathbf{A}$  的不相干系数来刻画,定义为:对  $i = 1, \dots, n$ ,  $\mu = \sqrt{n} \max_{i \neq j} |\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle|$ ,  $\mathbf{a}_i$  为矩阵  $\mathbf{A}$  列向量,  $\|\mathbf{a}_i\|_2 = 1$ .

函数最小化问题的解就是仿射秩最小化问题的解<sup>[6]</sup>. 当观测中存在噪声时, RIP 条件需要满足 $(3r, 1/4\sqrt{3})$ <sup>[42]</sup>, 该参数被提升至 $(4r, \sqrt{2}-1)$ <sup>[39]</sup>. 对用于求解仿射秩最小化问题的其他算法, 理论分析很多也是基于仿射变换的 RIP 性质, 如矩阵逼近的原子分解方法 (ADMIRA)  $(4r, 0.04)$ <sup>[6]</sup>, 不动点连续迭代方法 (FPCA)  $(3r, 1/\sqrt{30})$ <sup>[43]</sup>, 奇异值投影方法 (SVP)  $(2r, 1/3)$ <sup>[44]</sup>.

## (2) 基于空间的分析——球切性质

定义<sup>[45]</sup> 映射  $A: R^{m \times n} \rightarrow R^p$ ,  $m \leq n$ , 如果  $\forall Z \in \text{Null}(A) \setminus \{0\}$ , 满足

$$\|Z\|_* / \|Z\|_F \geq \sqrt{\Delta} \quad (10)$$

则称  $\text{Null}(A)$  满足参数为  $\Delta$  的球切性质. 本质上描述的是在  $\text{Null}(A)$  中不包含秩特别小的矩阵的投影, 更进一步地说, 由于投影到零空间中的矩阵是无法区分的, 而低秩矩阵不会被投影到零空间中, 这样才有重构的可能. 如果  $\text{Null}(A)$  满足  $\Delta$  球切性质, 且  $\text{rank}(X_0) < \Delta/2$ ,  $X_0 \neq 0$ , 则  $X_0$  是秩最小化问题的唯一解; 进一步, 如果  $\text{rank}(X_0) < \Delta/6$ ,  $X_0$  是核函数最小化问题的唯一解. 也就是说, 若  $\text{Null}(A)$  满足  $\Delta$  球切性质, 当矩阵的秩比较小时, 核函数最小化问题和秩最小化问题是等价的.

## (3) 统计分析方法——相变函数

Recht 等人通过对实验数据进行统计分析, 观察到使用核函数最小化方法求解秩最小化问题时 (映射矩阵是 Gaussian 矩阵), 参数空间 (横坐标是欠采样率  $p/mn$ , 纵坐标是  $r(m+n-r)/p$ ) 的“相变”函数特性<sup>[6]</sup>, 这里的相变函数和压缩感知中的相变函数概念完全一致. 对仿射秩最小化问题, 相变函数表现出较为陡峭的变化趋势, 同时表现出与问题的维度不相关的特点. 在此基础上, Recht 等人<sup>[46]</sup>又从理论上推导了核函数最小化方法恢复低秩矩阵的充分必要条件, 根据该条件, 可以严格计算出核函数最小化成功恢复低秩矩阵的“相变”的位置. 文献[46]中的推导出的理论界限和文献[6]中的经验值是基本吻合的. 相变函数的试验结果和理论结果在实际的应用中可以很好的指导低秩矩阵的恢复.

## 3.2 MC 问题

### 3.2.1 MC 问题简介

矩阵填充问题的形式如下:

$$\min \text{rank}(X) \quad \text{s.t.} \quad P_\Omega(X) = P_\Omega(M) \quad (11)$$

其中  $\Omega$  是已知的元素集合, 并且假定  $\Omega$  是均匀随机的,  $P_\Omega: R^{n \times n} \rightarrow R^{n \times n}$  是观测算子:

$$[P_\Omega(X)] = \begin{cases} X_{ij}, & \text{if } (i, j) \in \Omega \\ 0, & \text{if } (i, j) \notin \Omega \end{cases} \quad (12)$$

矩阵填充的典型问题包含著名的 Netflix 问题: 每个用户作为矩阵的一行, 每部电影作为一列, 每个用户通常只

对部分电影做出评分, 然后根据已有的不完整信息推断出矩阵中缺失的数据. 该矩阵是低秩的, 因为通常影响一个用户的选择的因素只有很少的几个. 类似于仿射秩最小化问题, 矩阵填充问题同样可以使用核函数最小化来求解:

$$\min \|X\|_* \quad \text{s.t.} \quad P_\Omega(X) = P_\Omega(M) \quad (13)$$

### 3.2.2 MC 问题中信息恢复有效性分析方法

尽管矩阵填充问题和仿射秩最小化问题的目标相同, 但是由于前者中观测过程是“信息抽取”, 后者中观测过程则是“信息整合”, 因此两个问题的分析方法大有不同. 一般来说, 矩阵填充问题中, 在观测算子的零空间中, 总是存在秩 1 矩阵, 如  $M = e_i e_j^H$ ,  $e_i$  是标准规范基, 即矩阵中只有一个非零元素, 除非观测到了  $M$  中的非零元素, 否则  $M$  必定属于观测算子的零空间, 要恢复矩阵  $M$  是不可能的. 因此, 不同于 ARM 问题的分析方法, MC 问题中恢复算法分析主要考量待恢复矩阵的奇异值、奇异向量的性质. 如对矩阵的行空间、列空间的相干性进行约束, 核心思想是要求矩阵的奇异向量具有扩散的特点. 由于算法中要频繁计算奇异值分解, 精确的奇异值分解的计算量需求较大, 计算量的负担较大. 不过, 可采用近似的奇异值分解算法来逼近<sup>[40, 43]</sup>. MC 问题的求解算法包括基于范数的方法, 如奇异值阈值<sup>[47]</sup>, 不动点连续迭代方法<sup>[43]</sup>, 加速最近梯度法<sup>[48]</sup>, 凸优化方法<sup>[49, 50]</sup>, 和非基于范数的方法, 如奇异值投影方法<sup>[44]</sup>, SET (Subspace Evolution and Transfer)<sup>[51]</sup>, OptSpace 算法<sup>[52]</sup>, 原子分解方法 ADMIRA<sup>[6]</sup>. 这里介绍典型的两类算法, 一类是基于核函数最小化的凸优化方法; 另一类是非基于范数最小化的 OptSpace 算法.

#### (1) 核函数最小化

Candès 等人在文献[49]中引入了矩阵  $M$  的不相干性质. 对矩阵  $M = U \Sigma V^H$ , 记  $P_U = U U^H$ ,  $P_V = V V^H$  分别是  $U, V$  上的正交投影,

$$\max_{1 \leq i \leq n} \|P_U e_i\|_2, \max_{1 \leq i \leq n} \|P_V e_i\|_2 \leq \sqrt{\frac{r}{n}} \mu_0; \quad (14)$$

$$\|U V^H\|_{1, \infty} \leq \sqrt{\frac{r}{n}} \mu_1$$

如果矩阵  $M$  对应的  $\mu_0, \mu_1$  都比较小 ( $O(1)$  或  $O(\log n)$ ), 则  $M$  是不相干矩阵. 满足第一个条件的矩阵, 其行空间和列空间不会落入观测算子的零空间中. 第二个条件约束了左、右奇异向量之间的相关性. 对不相干矩阵, 当观测数量满足  $|\Omega| \geq C m^{5/4} \log n$  时, 核函数最小化方法可以高概率的恢复矩阵, 如果  $r \leq n^{1/5}$ , 观测数量需要满足  $|\Omega| \geq C m^{6/5} \log n$ . 另外, Candès 等人又引入了强不相干性质参数为  $\mu_s$ <sup>[50]</sup>, 即要求任意的  $1 \leq a, a', b, b' \leq n$  满足

$$\left| \langle \mathbf{e}_a, P_l \mathbf{e}_{a'} \rangle - \frac{r}{n} 1_{a=a'} \right|, \left| \langle \mathbf{e}_b, P_l \mathbf{e}_{b'} \rangle - \frac{r}{n} 1_{b=b'} \right| \leq \mu_s \frac{\sqrt{r}}{n} \quad (15)$$

同时要求  $\mu_s \geq \mu_1$ . 对大多数满足随机正交模型\*的低秩矩阵, 都满足强不相干性质(参数  $\mu_s = O(\sqrt{\log n})$ ), 当观测数量满足  $|\Omega| \geq C\mu_s^2 nr (\log n)^6$ , 则核函数最小化方法可以高概率的精确恢复秩为  $r$  的矩阵.

## (2) OptSpace 算法

OptSpace 算法主要包括三个步骤投影(Projection), 修剪(Trimming), 平滑(Cleaning). 该算法成功恢复低秩矩阵  $\mathbf{M}$  依赖于以下参数: 矩阵的条件数  $\kappa = \sigma_1/\sigma_r$  ( $\sigma_i$  为第  $i$  个非零奇异值), 不相干参数  $\mu_0$  (式(14)) 和另一个参数  $\mu_2$ . 其中  $\mu_2$  的定义为满足下式的最小取值

$$\left\| \sum_{i=1}^r \frac{\sigma_i}{\sigma_r} \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^H \right\|_{1,\infty} \leq \frac{\sqrt{r}}{n} \mu_2 \quad (16)$$

若  $\kappa = 1$ , 则  $\mu_2 = \mu_1$ . 当观测数量满足  $|\Omega| \geq Cn\kappa^2 \max(\mu_r \log n, \mu^2 r^2 \kappa^2, \mu_2^2 r^2 \kappa^4)$ , OptSpace 算法能够高概率的恢复矩阵  $\mathbf{M}^{[52]}$ . 当条件数  $\kappa$  较小时, 观测数量只需要满足  $|\Omega| \geq Cnr \max(\log n, r)$ .

可以看出, OptSpace 算法主要适用于矩阵的条件数  $\kappa$  比较小的情况, 即矩阵的非零奇异值大小相当的情况, 如  $\kappa = 1$  时, OptSpace 算法要求的观测数量要少于核函数最小化所需要的观测数量. 而核函数最小化方法中, 非零奇异值的大小并不影响恢复的结果.

## 4 基于信息自由度的信号重构方法的研究前景分析与探索

本文把稀疏信号和低秩矩阵的不完全采样、高分辨重构方法归纳在一个优化问题框架中. 在此框架中, 对象的信息自由度是采样数量的本质依据, 采样方法的不同影响采样的效率, 目标函数的确立决定了求解的难度和解的精确程度. 概括的说, 该框架中问题的研究均围绕以下几个方面展开.

### (1) 适用信号类型

能够被不完全采样、高分辨重构的信号有着共同的特征——信息自由度小, 寻找这样的信号类需要研究如何有效的表示信号. 设计不同的变换空间或者不同的信号模型, 使用来表示信号的向量或者参数的自由度尽可能的小. 压缩感知研究中, 不仅利用各种不同特点的信号变换(从正交变换到冗余字典), 而且不同的信号参数模型的表示方法也取得了一定的研究进展(TV 模型, AR 模型等). 信号的稀疏表示仍然是基于信息自由度的信号重构方法研究的一个重点问题.

### (2) 如何进行有效的信息采样?

由于不同的观测方法会对恢复算法的有效性、所

需的观测数量均产生影响, 因此基于信息自由度采样的信号重构方法中的又一个研究重点是研究有效的信息采样方法, 其目标是既能保障理论上的最优观测, 又能保障物理实现上的简化设计. 另一方面, 虽然现有的文献中提出了各种分析观测矩阵有效性的方法, 但是没有有一个方法同时具备客观准确、容易验证、鲁棒性佳的特点, 因此如何简单的分析评价观测矩阵的有效性, 这一问题仍然需要进一步的研究.

### (3) 如何高精度的重构目标?

信号优化重构方法中目标函数的建立, 一方面要考虑目标特征与目标函数的吻合度, 另一方面要考虑求解的难度, 因此现有很多方法都是折衷选择凸函数作为目标函数. 例如, 压缩感知中把  $l_0$  最小化问题松弛为  $l_1$  最小化问题. 问题是  $l_1$  最小化问题依赖于信号的幅度, 而  $l_0$  最小化问题则不然, 这就导致了  $l_1$  最小化问题对含噪信号的恢复效果不理想. 类似的问题同样存在于低秩矩阵填充问题中把秩最小化问题松弛成核函数最小化问题. 因此, 如何建立目标函数, 使其能够更准确的描述目标的特征, 同时也能具有更佳的抗噪性能, 这是压缩感知和低秩矩阵恢复共同需要研究的问题. 另一方面, 现有的压缩感知中, 对可重构的稀疏信号的稀疏度上界的判断, 理论值通常都比经验值要小很多, 这使得理论推导对于实际应用的指导作用大打折扣, 因此如何逼近“真正的”理论上界是一个非常有意义的工作. 类似问题存在于对含噪信号进行重构时, 重构误差上界的推导证明中.

### (4) 实际应用的研究

稀疏信号的压缩感知方法已经应用到通信、信号获取、医学图像、压缩成像等领域. 压缩感知应用于模拟信号的获取时, 涉及到一个重要问题, 即如何实现有效的随机观测, 现有的随机采样结构有 AIC<sup>[1]</sup>、Xampling<sup>[53]</sup>等. 但是这些结构都需要额外的调制、滤波或者积分电路, 与传统的采样系统是不兼容的. 在未来的研究中, 如何使用简便的方法获取信号观测, 是扩大压缩感知应用范围的一个有效手段.

低秩矩阵中的元素不同的来源对应着不同的应用领域, 除了传统的系统识别、机器学习, 低秩矩阵填充问题已经在系统识别、视频去噪, 计算解剖学、数据分析等领域, 其中矩阵的列元素是具有相似特征的图像块, 或者视频序列中的背景等. 现有文献中, 由于该问题本身还处于起步阶段, 以后会发掘出更广泛的应用领域.

\* 一个秩为  $r$  的矩阵  $\mathbf{M} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^H$ , 如果  $\mathbf{U}$  和  $\mathbf{V}$  都是从  $n \times r$  正交矩阵集合中均匀抽取的, 则矩阵  $\mathbf{M}$  服从随机正交模型.



从近年的研究成果来看,针对稀疏信号的压缩感知理论的研究热度要高于低秩矩阵填充问题,这主要是由于压缩感知理论的广泛的应用背景.由于这两个问题的相似性,压缩感知领域的成果会给低秩矩阵填充问题的研究带来很多的启发,例如在低秩矩阵填充问题的研究中,文献[6]扩展了 CoSaMP 算法<sup>[29]</sup>求解( $l_0$ )的思想,使用了基于矩阵变量的原子分解方法来求解秩最小化问题;文献[6]推广压缩感知理论中的观测矩阵的 RIP 分析方法,使用映射的 RIP 性质来分析仿射秩最小化问题的求解的理论保障.随着对信息这一抽象概念认识的逐步加深,基于信息自由度的信号重构方法的研究可以得到长足发展.

针对低自由度信号的不完全采样高分辨重构方法的研究,我们也做了一些有益的探索,研究了能否用非常简单的获取方法来得到少量的样本,然后用计算的方法对信号进行高分辨重构.通过我们的实验发现这样的想法是可能的.对图像来说,我们不采用向随机向量投影的方式获取观测样本,而利用矩阵填充问题中的抽取方式,直接获得图像的部分样本.对图像的恢复,我们借助于对图像的先验知识,如图像的 AR 模型[54]来进行建模.对 Lena 图像做测试,结果表明,虽然我们只获取 30% 的样本,恢复图像的峰值信噪比(PSNR)可达到 31.82dB,结果如图 2 所示.可见,我们的方法是可行的.



(a) 原图像

(b) 30%样本恢复图像的结果, PSNR=31.82dB

图2 直接抽取部分样本、AR模型恢复图像

## 参考文献

- [1] Laska J N, Kirolos S, et al. Theory and implementation of an analog-to-information converter using random demodulation [A]. IEEE International Symposium on Circuits and Systems [C]. New Orleans, LA, USA: IEEE, 2007. 1959 – 1962.
- [2] Vetterli M, Marziliano P, et al. Sampling signals with finite rate of innovation [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2002, 50(6): 1417 – 1428.
- [3] Hormati A, Vetterli M. Annihilating filter based decoding in the compressed sensing framework [A]. Wavelets XII [C]. San

Diego, CA: SPIE, 2007.

- [4] Blu T, Dragotti P, et al. Sparse sampling of signal innovations [J]. IEEE Signal Process Mag, 2008, 25(2): 31 – 40.
- [5] Goyal V K, Fletcher A K, et al. Compressive sampling and lossy compression [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, 25(2): 48 – 56.
- [6] Recht B, Fazel M, et al. Guaranteed minimum-rank solutions of linear matrix equations via nuclear norm minimization [J]. SIAM Review, 2010, 52(3): 471 – 501.
- [7] Fazel M. Matrix rank minimization with applications [D]. USA: Stanford University, 2002.
- [8] Muthukrishnan S. Some algorithmic problems and results in compressed sensing [A]. Proceedings of 44th Annual Allerton Conference on Communication, Control and Computing [C]. Allerton, Monticello, Illinois: Curran Associates, Inc., 2006.
- [9] Candès E, Tao T. Near-optimal signal recovery from random projections: universal encoding strategies? [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(12): 5406 – 5425.
- [10] Candès E, Romberg J, et al. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(2): 489 – 509.
- [11] Donoho D. Compressed sensing [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4): 1289 – 1306.
- [12] 石光明, 刘丹华, 等. 压缩感知理论及其研究进展 [J]. 电子学报, 2009, 37(5): 146 – 152.  
Shi Guang-ming, Liu Dan-hua, Gao Da-hua, Liu Zhe, Lin Jie, Wang Liang-jun. Advances in theory and application of compressed sensing [J]. Acta Electronica Sinica, 2009, 37(5): 146 – 152. (in Chinese)
- [13] 戴琼海, 付长军, 季向阳. 压缩感知研究 [J]. 计算机学报, 2011, 34(3): 425 – 434.  
Dai Qiong-Hai, Fu Chang-Jun, Ji Xiang-Yang. Research on compressed sensing [J]. Journal of Computers, 2011, 34(3): 425 – 434. (in Chinese)
- [14] Elad M, Figueiredo M A T, et al. On the role of sparse and redundant representations in image processing [J]. Proceedings of the IEEE, 2010, 98(6): 972 – 982.
- [15] Rubinstein R, A Bruckstein M, et al. Dictionaries for sparse representation modeling [J]. Proceedings of the IEEE, 2010, 98(6): 1045 – 1057.
- [16] Shi G, Liang L, et al. Design of directional filter banks with arbitrary number of subbands [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2009, 57(12): 4936 – 4941.
- [17] 焦李成, 谭山. 图像的多尺度几何分析: 回顾和展望 [J]. 电子学报, 2003, 31(12A): 1975 – 1981.  
Jiao Li-cheng, Tan Shan. Development and prospect of image multiscale geometric analysis [J]. Acta Electronica Sinica, 2003, 31(12A): 1975 – 1981. (in Chinese)



- [18] 李映, 张艳宁, 许星. 基于信号稀疏表示的形态成分分析: 进展和展望[J]. 电子学报, 2009, 37(1): 146 – 152.  
Li Ying, Zhang Yan-ning, et al. . Advances and perspective on morphological component analysis based on sparse representation[J]. Acta Electronica Sinica, 2009, 37(1): 146 – 152. (in Chinese)
- [19] Donoho D. For most large underdetermined systems of linear equations the minimal  $\ell_1$ -norm solution is also the sparsest solution[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2006, 59(6): 797 – 829.
- [20] Candès E, Romberg J, et al. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2006, 59(8): 1207 – 1223.
- [21] Candès E. Compressive sampling[A]. Proceedings of the International Congress of Mathematicians[C]. Madrid, Spain: EMS Publishing House, 2006. 1433 – 1452.
- [22] Mallat S G, Zhang Z. Matching pursuits with time-frequency dictionaries[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1993, 41(12): 3397 – 3415.
- [23] Davenport M A, Wakin M B. Analysis of orthogonal matching pursuit using the restricted isometry property[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2010, 56(9): 4395 – 4401.
- [24] Fornasier M, Rauhut H. Iterative thresholding algorithms[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2008, 25(2): 187 – 208.
- [25] Wu X, Zhang X. Model-guided adaptive recovery of compressive sensing[J]. DCC, 2009. 123 – 132.
- [26] Baraniuk R, Davenport M, et al. A simple proof of the restricted isometry property for random matrices[J]. Constructive Approximation, 2008, 28(3): 253 – 263.
- [27] Candès E. The restricted isometry property and its implications for compressed sensing[J]. Comptes Rendus Mathématique, 2008, 346(9 – 10): 589 – 592.
- [28] Needell D, Vershynin R. Uniform uncertainty principle and signal recovery via regularized orthogonal matching pursuit[J]. Foundations of Computational Mathematics, 2007, 9(3): 317 – 334.
- [29] Needell D, Tropp J A. CoSaMP: iterative signal recovery from incomplete and inaccurate measurements[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2008, 26: 301 – 321.
- [30] Dai W, Milenkovic O. Subspace pursuit for compressive sensing signal reconstruction[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2009, 55(5): 2230 – 2249.
- [31] Donoho D. Neighborly polytopes and sparse solution of underdetermined linear equations[EB/OL]. Technical Report, Department of Statistics, Stanford University, 2004.
- [32] Donoho D, Tanner J. Counting faces of randomly-projected polytopes when the projection radically lowers dimension[J]. Journal of the AMS, 2009, 22(1): 1 – 53.
- [33] Donoho D, Tanner J. Neighborliness of randomly-projected simplices in high dimensions[J]. Proceedings of National Academy of Science, 2005, 102(27): 9452 – 9457.
- [34] Yin W, Zhang Y. Extracting salient features from less data via  $\ell_1$ -minimization[J]. SIAG/Optimization Views and News, 2008, 19(1): 11 – 19.
- [35] Garnaev A, Gluskin E. The widths of a euclidean ball (russian)[J]. Dokl. A. N. USSR, 1984, 277: 1048 – 1052.
- [36] Vavasis S A. Derivation of compressive sensing theorems for the spherical section property[EB/OL]. University of Waterloo, CO 769 lecture notes, 2009.
- [37] Donoho D, Tanner J. Precise undersampling theorems[J]. Proceedings of the IEEE, 2010, 98(6): 913 – 924.
- [38] Davies M, Gribonval R. Restricted isometry property and  $\ell_p$  sparse recovery failure[A]. Signal Processing with Adaptive Sparse Structured Representations[C]. Saint-Malo, France: Kluwer Academic Publishers, 2009.
- [39] Candès E, Plan Y. Accurate low-rank matrix recovery from a small number of linear measurements[A]. Proceedings of the 47th annual Allerton conference on Communication, control, and computing[C]. Allerton House, UIUC, Illinois, USA: IEEE, 2009. 1223 – 1230.
- [40] Ma S, Goldfarb D, et al. Fixed Point and Bregman Iterative Methods for Matrix Rank Minimization[R]. Technical Report, Department of IEOR, Columbia University, 2008.
- [41] Wen Z, Yin W, et al. Solving a Low-Rank Factorization Model for Matrix Completion by a Nonlinear Successive Over-Relaxation Algorithm[R]. Rice University CAAM Technical Report TR10-07, 2010.
- [42] Lee K, Bresler Y. Guaranteed minimum rank approximation from linear observations by nuclear norm minimization with an ellipsoidal constraint[J]. Computing Research Repository (CoRR), 2009, abs/0903.4742.
- [43] Goldfarb D, Ma S. Convergence of Fixed Point Continuation Algorithms for Matrix Rank Minimization[R]. Technical Report, Department of IEOR, Columbia University, 2009.
- [44] Meka R, Jain P, et al. Guaranteed rank minimization via singular value projection[EB/OL]. Technical Report, University of Texas at Austin, 2009.
- [45] Dvijotham K, Fazel M. A nullspace analysis of the nuclear norm heuristic for rank minimization[A]. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)[C]. Dallas, Texas, USA: IEEE, 2010. 3586 – 3589.
- [46] Recht B, Xu W, et al. Null space conditions and thresholds for rank minimization[J]. To appear in Mathematical Programming Revised, 2010.
- [47] Cai F, Candès E, et al. A singular value thresholding algorithm for matrix completion[J]. SIAM Journal on Optimization, 2010, 20(4): 1956 – 1982.

- [48] Toh K, Yun S. An accelerated proximal gradient algorithm for nuclear norm regularized least squares problems [J]. Pacific Journal of Optimization, 2010, 6(3): 615 – 640.
- [49] Candès E, B Recht. Exact matrix completion via convex optimization [J]. Foundations of Computational Mathematics, 2009, 9(6): 717 – 772.
- [50] Candès E, Tao T. The power of convex relaxation: near-optimal matrix completion [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2009, 56(5): 2053 – 2080.
- [51] Dai W, Milenkovic O. SET-An algorithm for consistent matrix completion, 2009 [EB/OL]. Available: arXiv:0909.2705.
- [52] Raghunandan H K, Sewoong Oh, et al. Matrix completion from a few entries [A]. Proceedings of the 2009 IEEE international conference on Symposium on Information Theory [C]. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2009. 324 – 328.
- [53] Mishali M, Eldar Y C, et al. Xampling: Analog to Digital at Sub-Nyquist Rates, to appear in IET Journal of Circuits, Devices and Systems, 2010 [EB/OL]. Available: arXiv 0912.2495.
- [54] Wu Xiaolin, Dong Weisheng, et al. Model-assisted adaptive recovery of compressed sensing with imaging applications [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2012, 21(2): 451 – 458.

## 作者简介



**林 杰** 女, 1979 年生于辽宁大连. 西安电子科技大学电子工程学院讲师, 博士. 研究方向为压缩感知理论与应用、信号稀疏表示, 高速高分辨率信号采样.

E-mail: jlin@mail.xidian.edu.cn



**石光明** 男, 1965 年生于江西南昌. 西安电子科技大学教授, 博士. 研究方向为信息压缩感知获取与多维多速率小波变换; 图像的获取、质量提升、编码传输、特征提取、融合和优化恢复; 基于 DSP、FPGA、ASIC 和嵌入式等技术的信号图像处理平台系统.



**董伟生** 男, 1981 年生于浙江兰溪. 西安电子科技大学讲师, 博士. 研究方向包括图像处理中的逆问题, 信号稀疏表示与图像压缩.