

# 基于离散傅里叶变换和块时间递归 并行格型结构的离散 Gabor 分析窗求解

周 健<sup>1,2</sup>, 王华彬<sup>1</sup>, 陶 亮<sup>1</sup>, 赵 力<sup>2</sup>

(1. 安徽大学计算智能与信号处理教育部重点实验室, 安徽合肥 230031;

2. 东南大学水声信号处理教育部重点实验室, 江苏南京 210096)

**摘 要:** 提出了一种快速求解离散 Gabor 变换分析窗的方法. 首先选择一个合适的基函数, 同给定的综合窗函数构造一个可逆的块循环矩阵, 然后根据块循环矩阵特点, 利用快速离散傅里叶变换求解块循环矩阵的逆, 最后采用基于块时间递归的并行格型结构来求解分析窗. 本文证明了此算法获得的窗函数与给定的综合窗满足双正交关系. 实验结果表明, 本文算法能快速求解分析窗, 相比基于最小范数求解方法, 本文提出的算法明显降低了分析窗的计算复杂度.

**关键词:** Gabor 分析窗; 块循环矩阵; 块时间递归并行格型结构

**中图分类号:** TN911.72

**文献标识码:** A

**文章编号:** 0372-2112 (2012)09-1839-05

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>

**DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2012.09.021

## Dual Window Computation Based on Discrete Fourier Transform and Parallel Lattice Structures of Block Time-Recursive in Discrete Gabor Transform

ZHOU Jian<sup>1,2</sup>, WANG Hua-bin<sup>1</sup>, TAO Liang<sup>1</sup>, ZHAO Li<sup>2</sup>

(1. Key Laboratory of Intelligent Computing & Signal Processing, Ministry of Education, Anhui University, Hefei, Anhui 230031, China;

2. Key Laboratory of Underwater Acoustic Signal Processing of Ministry of Education, Southeast University, Nanjing, Jiangsu 210096, China)

**Abstract:** We present a general approach to compute the analysis window for a given synthesis window in discrete Gabor transform. An auxiliary window is carefully selected and combined with synthesis window to construct a nonsingular block-circulant matrix. We then use fast discrete Fourier transform to compute the inverse of the block-circulant matrix. Since the inverse of the matrix also has block-circulant characteristic, a parallel lattice structures of block time-recursive are thereafter derived to compute the analysis window by exploiting the block structure of the matrices. Compared with the minimum norm solution, the proposed algorithm decreases more computational cost. Experimental results show that the present method is very effective to get a general analysis window.

**Key words:** Gabor analysis window; block circulant matrix; parallel lattice structures of block time-recursive

## 1 引言

离散 Gabor 时频分析<sup>[1]</sup>通过对窗函数进行时移和频移产生一系列 Gabor 基函数  $g_{m,n}(k) = g(k - ma) \cdot \exp(jnbk/L)$ , (其中,  $j = \sqrt{-1}$ ), 并将之用于对信号进行离散 Gabor 展开, 即将信号表示为  $x(k) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} c(m,n) g_{m,n}(k)$ . 而求解展开系数  $c(m,n)$   $= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} x(k) \bar{\gamma}_{m,n}(k)$  的式子被称为离散 Gabor 变换. 作为一类重要的时频分析方法, 离散 Gabor 时频分析广

泛应用于语音信号处理、纹理划分、图像压缩和模式识别等领域<sup>[2~4]</sup>.

在 Gabor 时频分析中,  $\{g_{m,n}(k)\}$  不是正交基, 为了能精确重建出原信号, 需要根据  $g(k)$  来求解其分析窗, 使得  $\{g_{m,n}(k)\}$  和  $\{\gamma_{m,n}(k)\}$  满足双正交关系<sup>[5]</sup>. 在离散 Gabor 变换中, 分析窗在过抽样条件下不唯一<sup>[6]</sup>, Qian 等人给出了求解分析窗的最小  $l_2$  范数方法<sup>[7]</sup>, 它也是目前 Gabor 时频分析中求解分析窗最普遍的一种方法. 然而, 该方法涉及到矩阵逆运算, 尤其是处理长序列时, 计算量相当可观. 文献[8]提出了一种在框架理论下求解

收稿日期: 2011-07-20; 修回日期: 2011-12-27

基金项目: 国家自然科学基金(No. 51075068, No. 61071169, No. 60975017, No. 60872073); 安徽省教育厅优秀青年基金(No. 2010SQRL018)、安徽大学“211 工程”校青年基金(No. 2009QN027B); 安徽省自然科学研究重点项目(No. KJ2010A011); 教育部博士点专项基金(No. 20110092130004)

给定综合窗的一般分析窗的方法,该方法假设  $g_{m,n}(k)$  能形成框架,其对应 Gabor 框架矩阵为  $\mathbf{G}$ ,通过仔细选择另外一个 Gabor 框架矩阵  $\mathbf{P}$ ,使得  $\mathbf{P}\mathbf{G}^H$  的逆存在.由于类框架算子  $\mathbf{S}_{g,p} = \mathbf{P}\mathbf{G}^H$  的对应矩阵具有块循环结构,可以利用离散傅里叶变换对其进行求逆,从而得到一般对偶窗  $\gamma = (\mathbf{P}\mathbf{G}^H)^{-1}\mathbf{p}$ .该算法的特殊之处是将矩阵求逆运算转化为若干个小矩阵求逆,并且小矩阵的求逆运算可以通过傅里叶变换进行,从而大大减少了求逆运算时间.但是,该方法限制在框架理论下,对于非框架情况,并没有做深入探讨.

本文提出了一种快速求解分析窗的更一般的方法.该方法首先采用类似文献[8]的思想,通过快速离散傅里叶变换来求解大矩阵的逆,再根据求得的逆矩阵仍是块循环矩阵这一特性,提出采用基于块时间递归的并行格型结构来快速求解分析窗.本方法有两个特点,一是给出了分析窗的更一般表示方法,该表示方法对于构成块循环矩阵的两个原子信号集不做框架限定,即原子信号集可以不是框架,故块循环矩阵的构造更加灵活;二是在根据块循环矩阵的逆求解分析窗时,采用了基于块时间递归的并行格型结构,算法复杂度为  $O(L + Ma^3 + 2La + 2La\log(La))$ ,尤其在整数抽样条件下,计算复杂度为  $O(L + ab + 2La + 2ab\log(ab))$  ( $a, b$  为时移和频移参数,  $L$  为信号长度).

## 2 背景知识

为了表述方便,下面给出一些本文要使用的记号和概念.

设  $N, L \in \mathbf{Z}$ , 长度为  $L$  的信号  $\mathbf{x} = (x_k)_{k=0}^{L-1} \in \mathbf{C}^L$  被拓展成周期为  $L$  的序列,即  $x(k + nL) = x(k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, L-1, n \in \mathbf{Z}$ . 定义两个信号  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{C}^L$  的内积  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{y}^H \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{H}$  是矩阵共轭操作符.

**定义 1** 给定信号  $\mathbf{g} \in \mathbf{C}^L$  以及两个参数  $a, b \in \mathbf{Z}$  满足  $a|L, b|L$  且  $ab \leq L$ , 令  $M = L/a, N = L/b, m = 0, 1, \dots, M-1, n = 0, 1, \dots, N-1$ . 定义

$$\{\mathbf{g}_{m,n} | \mathbf{g}_{m,n}(k) = \mathbf{g}(k - ma) e^{j(2\pi nbk/L)}, k = 0, \dots, L-1\} \quad (1)$$

为信号  $\mathbf{g}$  在给定参数  $a, b$  下生成的信号序列.

**定义 2** 给定  $\mathbf{C}^L$  空间的两个序列  $\{\mathbf{g}_{m,n}\}, \{\mathbf{y}_{m,n}\}$ , 对任意的  $\mathbf{f} \in \mathbf{C}^L$ , 若下式成立

$$\mathbf{f} = \sum_{m,n \in \mathbf{Z}} \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_{m,n} \rangle \mathbf{y}_{m,n} = \sum_{m,n \in \mathbf{Z}} \langle \mathbf{f}, \mathbf{y}_{m,n} \rangle \mathbf{g}_{m,n} \quad (2)$$

则称  $\{\mathbf{y}_{m,n}\}$  是序列  $\{\mathbf{g}_{m,n}\}$  的对偶序列,  $\gamma(k)$  称为函数的分析窗函数, 亦即综合窗  $g(k)$  对应的对偶窗函数.

## 3 分析窗快速求解算法

### 3.1 算法理论推导

设  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \in \mathbf{C}^L$ ,  $\{\mathbf{g}_{1,m,n}\}$  和  $\{\mathbf{g}_{2,m,n}\}$  分别是  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$  在时移和频移参数  $a, b \in \mathbf{Z}$  下生成的函数序列,  $M = L/a, N = L/b$ .  $\mathbf{G}_1(\mathbf{g}_1, a, b)$  和  $\mathbf{G}_2(\mathbf{g}_2, a, b)$  分别是  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$  对应的阶为  $L \times MN$  矩阵, 即

$$\mathbf{G}_1(\mathbf{g}_1, a, b) = [\mathbf{g}_{1,0,0}, \mathbf{g}_{1,0,1}, \dots, \mathbf{g}_{1,0,N-1}, \dots, \mathbf{g}_{1,M-1,0}, \mathbf{g}_{1,M-1,1}, \dots, \mathbf{g}_{1,M-1,N-1}]^T$$

$$\mathbf{G}_2(\mathbf{g}_2, a, b) = [\mathbf{g}_{2,0,0}, \mathbf{g}_{2,0,1}, \dots, \mathbf{g}_{2,0,N-1}, \dots, \mathbf{g}_{2,M-1,0}, \mathbf{g}_{2,M-1,1}, \dots, \mathbf{g}_{2,M-1,N-1}]^T$$

容易推导出矩阵乘积

$\mathbf{G} = \mathbf{G}_2(\mathbf{g}_2, a, b) \mathbf{G}_1^H(\mathbf{g}_1, a, b)$  的第  $k$  行第  $l$  列元素值为

$$\mathbf{G}[k, l] = \begin{cases} N \sum_{m=0}^{M-1} \mathbf{g}_2(k - ma) \overline{\mathbf{g}_1(l - ma)}, & N | k - l | \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (3)$$

根据式(3)可知, 矩阵  $\mathbf{G}$  具有带状块循环矩阵结构, 即将矩阵  $\mathbf{G}$  写成如下形式

$$\mathbf{G} = \text{Cir}(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_{M-1}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_1 & \dots & \mathbf{A}_{M-1} \\ \mathbf{A}_{M-1} & \mathbf{A}_0 & \dots & \mathbf{A}_{M-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \dots & \mathbf{A}_0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中  $\mathbf{A}_i$  是  $a \times a$  阶矩阵.

定义块循环矩阵的离散傅里叶变换<sup>[9]</sup>

$$\text{FFT}(\mathbf{G}) = \text{Cir}(\widehat{\mathbf{A}}_0, \widehat{\mathbf{A}}_1, \dots, \widehat{\mathbf{A}}_{M-1}) \quad (5)$$

其中

$$\widehat{\mathbf{A}}_r = \sum_{i=0}^{M-1} \mathbf{A}_i e^{-j2\pi ri/M}, r = 0, 1, \dots, M-1 \quad (6)$$

**定理 1** 块循环矩阵  $\mathbf{G} = \text{Cir}(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_{M-1})$  可逆当且仅当其傅里叶变换系数矩阵  $\widehat{\mathbf{A}}_i$  可逆. 此时

$$\mathbf{G}^{-1} = \text{Cir}(\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_{M-1}) \quad (7)$$

其中

$$\mathbf{B}_r = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \widehat{\mathbf{A}}_i^{-1} e^{j2\pi ri/M}, r = 0, 1, \dots, M-1 \quad (8)$$

由定理 1 知, 当且仅当  $\widehat{\mathbf{A}}_i$  可逆时, 块循环矩阵的逆存在.

**定理 2** 设  $\{\mathbf{g}_{1,m,n}\}$  和  $\{\mathbf{g}_{2,m,n}\}$  分别是由  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \in \mathbf{C}^L$  在给定参数  $a, b \in \mathbf{Z}$  下产生的函数序列, 如果  $\mathbf{G}_2(\mathbf{g}_2, a, b) \mathbf{G}_1^H(\mathbf{g}_1, a, b)$  可逆, 则综合窗  $\mathbf{g}$  对应的分析窗  $\gamma$  可以通过下式计算

$$\gamma = (\mathbf{G}_2(\mathbf{g}_2, a, b) \mathbf{G}_1^H(\mathbf{g}_1, a, b))^{-1} \mathbf{g}_2 \quad (9)$$

要证明定理 2 成立, 只要证明式(9)能使式(2)成立, 即只要证明

$$f = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle f, g_{1_{m,n}} \rangle \gamma_{m,n} = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle f, \gamma_{m,n} \rangle g_{1_{m,n}} \quad (10)$$

因为  $\gamma = (G_2(g_2, a, b) G_1^H(g_1, a, b))^{-1} g_2$ , 则  $\gamma_{m,n}(k) = (G_2(g_2, a, b) G_1^H(g_1, a, b))^{-1} g_{2_{m,n}}(k)$

所以有

$$G_3(\gamma, a, b) = (G_2(g_2, a, b) G_1^H(g_1, a, b))^{-1} \cdot G_2(g_2, a, b) \quad (11)$$

又由于

$$\begin{aligned} \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle f, g_{1_{m,n}} \rangle \gamma_{m,n} &= G_3(\gamma, a, b) G_1^H(g_1, a, b) f \\ \text{将式(11)代入式(10)有} \\ \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle f, g_{m,n} \rangle \gamma_{m,n} &= G_3(\gamma, a, b) G_1^H(g_1, a, b) f \\ &= G_3(g_2, a, b) G_1^H(g_1, a, b)^{-1} \\ &\quad \times G_2(g_2, a, b) G_1^H(g_1, a, b) f \\ &= f \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{M-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_0 & B_1 & \cdots & B_{M-1} \\ B_{M-1} & B_0 & \cdots & B_{M-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_1 & B_2 & \cdots & B_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{2_0} \\ g_{2_1} \\ \vdots \\ g_{2_{M-1}} \end{bmatrix}$$

同理可证  $\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle f, \gamma_{m,n} \rangle g_{1_{m,n}} = f$ .

根据定理 2 不难发现,  $G$  的逆仍然是带状块循环矩阵, 一旦求出了  $G^{-1}$ , 则可以采用基于块时间递归的并行格型结构实现分析窗基本函数的快速计算.

令  $g_2 = [g_{2_0}, g_{2_1}, \dots, g_{2_{M-1}}]^T$ . 其中

$$g_{2_i} = [g_2(ia+0), g_2(ia+1), \dots, g_2(ia+a-1)]^T, i = 0, \dots, M-1.$$

同理, 将  $\gamma$  也划分成相同的段, 使得  $\gamma = [\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{M-1}]^T$ .

根据式(9)有

$$\begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{M-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_0 & B_1 & \cdots & B_{M-1} \\ B_{M-1} & B_0 & \cdots & B_{M-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_1 & B_2 & \cdots & B_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{2_0} \\ g_{2_1} \\ \vdots \\ g_{2_{M-1}} \end{bmatrix} \quad (13)$$

式(13)又可写成

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= B_0 g_{2_0} + B_1 g_{2_1} + \cdots + B_{M-1} g_{2_{M-1}} \\ \gamma_1 &= B_{M-1} g_{2_0} + B_0 g_{2_1} + \cdots + B_{M-2} g_{2_{M-1}} \\ &\vdots \\ \gamma_{M-1} &= B_1 g_{2_0} + B_2 g_{2_1} + \cdots + B_0 g_{2_{M-1}} \end{aligned} \quad (14)$$

设输入信号  $g_2$  在输入延迟线上每串行输入  $a$  个数据为一块, 对应所需的时间为一个块时间, 输入延迟线的总长度为  $M+1$  块, 如图 1 所示.

于是由式(14), 定义块时间时刻分析窗函数为

$$\gamma_0(t) = B_0 g_2(t) + B_1 g_2(t+1) + \cdots + B_{M-1} g_2(t+M-1)$$

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= B_{M-1} g_2(t) + B_0 g_2(t+1) + \cdots + B_{M-2} g_2(t+M-1) \\ &\vdots \\ \gamma_{M-1}(t) &= B_1 g_2(t) + B_2 g_2(t+1) + \cdots + B_0 g_2(t+M-1) \end{aligned} \quad (15)$$

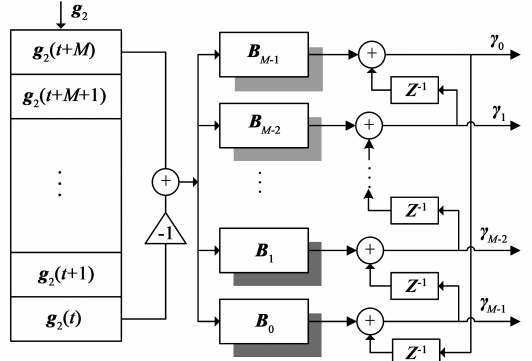


图1 并行格型结构实现分析窗函数求解

而在块时间  $t+1$  时刻的分析窗函数可采用下列块时间递归形式

$$\begin{aligned} \gamma_0(t+1) &= \gamma_1(t) + B_{M-1} [g_2(t+M) - g_2(t)] \\ \gamma_1(t+1) &= \gamma_2(t) + B_{M-2} [g_2(t+M) - g_2(t)] \\ &\vdots \\ \gamma_{M-2}(t+1) &= \gamma_{M-1}(t) + B_1 [g_2(t+M) - g_2(t)] \\ \gamma_{M-1}(t+1) &= \gamma_0(t) + B_0 [g_2(t+M) - g_2(t)] \end{aligned} \quad (16)$$

在递归开始之前, 先将延迟线所有单元清零, 并将所有的  $\gamma_i (i=0, 1, \dots, M-1)$  置零. 不难证明, 若设序列  $g_2$  的第一块数据在块时间  $t=0$  时刻串行进入延迟线, 当  $g_2$  全部串行进入延迟线时刻 ( $t=M-1$ ), 式(16)经过了  $M$  次递归, 此时的输出即为分析窗函数. 而在块时间  $t=M$  之后, 由于串行输入序列  $g_2$  的周期性, 式(16)中  $g_2(t+M) = g_2(t)$ , 递归过程进入稳定阶段.

### 3.2 计算复杂度分析

在算法复杂度方面, 本文提出的分析窗求解方法运用了傅里叶变换和并行格型结构, 算法只需 1 次  $La$  点的傅里叶变换,  $M$  个  $a \times a$  阶矩阵的求逆, 1 次  $La$  点的傅里叶逆变换, 每个并行格型结构只需  $a^2$  次复数乘和  $a^2$  次复数加, 算法复杂度为  $O(L + Ma^3 + 2La + 2La \log(La))$ . 尤其是当  $N \mid a$  时即整数倍过抽样条件下, 能大大加快求解速度, 此时的算法只需 1 次  $ab$  点的傅里叶变换,  $ab$  次求逆,  $ab$  次逆傅里叶变换, 每个并行格型结构只需  $a^2$  次复数乘和  $a^2$  次复数加, 所以算法复杂度为  $O(L + ab + 2La + 2ab \log(ab))$ . 而基于最小范数分析窗求解算法的时间复杂度为  $O((ab)^2 L + abL^2 + L^3)$ , 由此可见, 本文算法复杂度明显降低.

### 4 计算机仿真

实验中, 我们首先计算高斯综合窗在临界抽样和

过抽样条件下对应的分析窗,然后计算双边指数窗在临界条件下和过抽样条件下对应的分析窗.为了进行比较,我们还计算这两种窗所对应的最优分析窗,亦即基于最小范数计算的分析窗.

实验中高斯综合窗函数为  $g_1(k) = (2^{0.5}/32)^{0.5} \cdot e^{-\pi((k-127.5)/32)^2}$ , 长度为 256 点. 在临界抽样条件时, 取  $a = 16, b = 16$ , 在过抽样条件时, 取  $a = 16, b = 8$ , 此时, 过抽样率为 2. 采用本文算法进行分析窗计算, 还需要一个辅助函数  $g_2(k)$ , 为了研究分析窗计算结果是否依赖  $g_2(k)$ , 我们分别用高斯窗和双边指数窗来构造  $g_2(k)$ , 对应的窗函数分别取  $g_2(k) = (2^{0.5}/128)^{0.5} \cdot e^{-\pi((k-127.5)/128)^2}$  和  $g_2(k) = e^{-0.5|k-127.5|}$ , 长度均为 256 点. 由高斯综合窗与辅助窗生成的函数序列构成的  $G = G_2(g_2, a, b)G_1^H(g_1, a, b)$  均可逆, 现证明如下:

在整数抽样下,  $ab \mid L$ , 又因  $N = L/b$ , 所以  $a \mid N$ . 设  $G = G_2(g_2, a, b)G_1^H(g_1, a, b) = \text{Cir}(A_0, A_1, \dots, A_{M-1})$ , 根据式(3)可知,  $A_{i(N/a)}, i = 0, 1, \dots, b-1$  是对角矩阵, 且其主对角元素不为 0. 对式(6)进行展开有

$$\begin{aligned} \hat{A}_r &= \sum_{s=0}^{M-1} A_s e^{-j(2\pi rs/M)} \\ &= A_0 + A_{N/a} e^{-j(2\pi/r)b} + \dots + A_{(b-1)(N/a)} e^{-j(2\pi/r)(b-1)b} \\ &= \sum_{i=0}^{b-1} A_{i(N/a)} e^{-j(2\pi/r)ib} \end{aligned} \quad (17)$$

则  $\hat{A}_r$  的主对角元素为

$$\begin{aligned} (\hat{A}_r)_{kk} &= \left( \sum_{i=0}^{b-1} A_{i(N/a)} e^{-j(2\pi ri/b)} \right)_{kk} \\ &= \sum_{i=0}^{b-1} (A_{i(N/a)})_{kk} e^{-j(2\pi ri/b)} \\ &= \sum_{i=0}^{b-1} G[k, k + i \frac{N}{a}] e^{-j(2\pi ri/b)} \\ &= \sum_{i=0}^{b-1} N \sum_{m=0}^{M-1} \gamma(k - ma) \overline{g(k + iN - ma)} e^{-j(2\pi ri/b)} \\ &= N \sum_{m=0}^{M-1} \gamma(k - ma) \sum_{i=0}^{b-1} \overline{g(k + iN - ma)} e^{-j(2\pi ri/b)} \end{aligned} \quad (18)$$

由式(18)可知,  $(\hat{A}_r)_{kk}$  是  $N$  个时移的  $g(k)$  函数的傅里叶变换的加权和. 权值由  $\gamma(k)$  函数确定. 当  $g(k)$  和  $\gamma(k)$  取双边指数或高斯函数时, 式(18)均不为 0.

实验中另一个综合窗取双边指数窗  $g_2(k) = e^{-0.2|k-127.5|}$ , 长度为 256 点. 在临界抽样条件时, 取  $a = 16, b = 16$ , 在过抽样条件时, 取  $a = 16, b = 8$ , 此时, 过抽样率为 2. 同样, 为了研究分析窗计算结果是否依赖  $g_2(k)$ , 分别用高斯窗和双边指数窗构造  $g_2(k)$ , 对应的窗函数分别取  $g_2(k) = (2^{0.5}/128)^{0.5} e^{-\pi((k-127.5)/128)^2}$  和  $g_2(k) = e^{-0.5|k-127.5|}$ , 窗长同综合窗长.

图 2 和图 3 分别显示了归一化高斯综合窗在临界

抽样和过抽样时对应的分析窗.

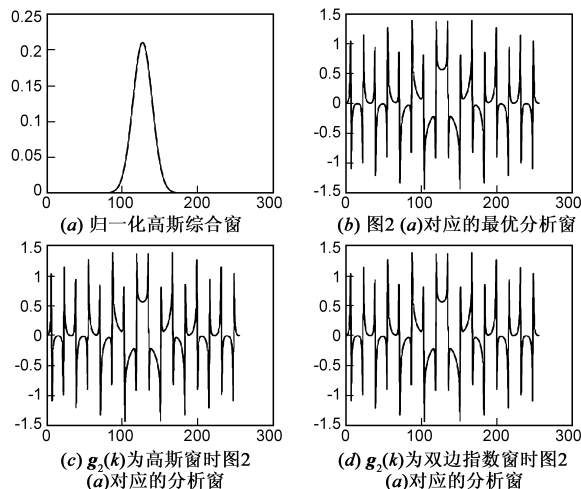


图2 归一化高斯窗及临界抽样时对应的分析窗

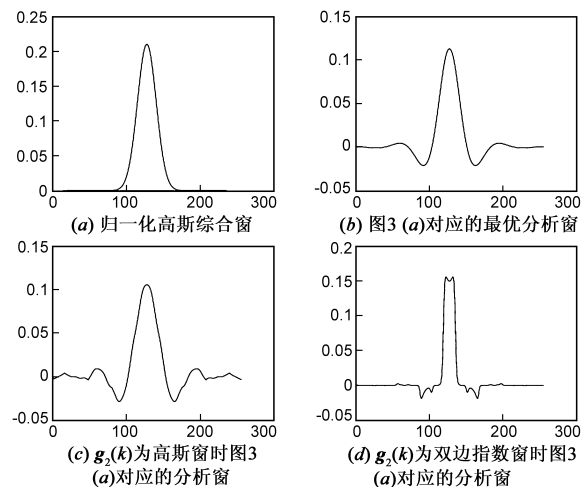


图3 归一化高斯窗及过抽样时对应的分析窗

图 4 和图 5 分别显示了双边指数综合窗在临界抽样和过抽样时其对应的分析窗.

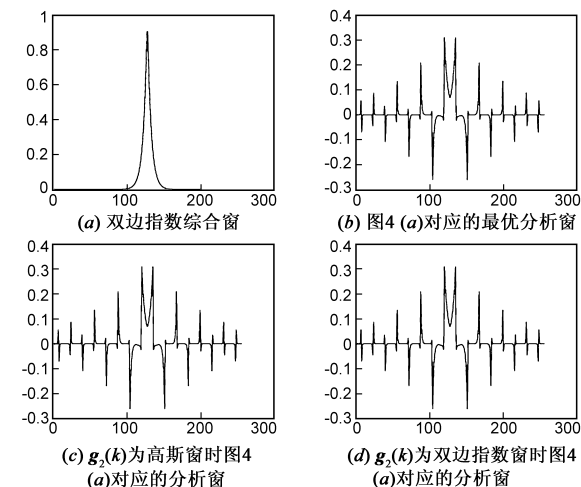


图4 双边指数窗及临界抽样时对应的分析窗

从实验结果可以看出, 在临界抽样条件下, 本文算

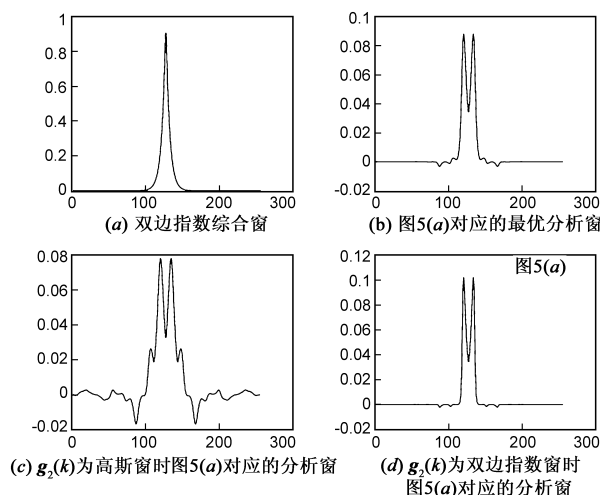


图5 双边指数窗及过抽样时对应的分析窗

法得到的分析窗和最优分析窗相同;而在过抽样条件下,本文算法得到的分析窗与最优分析窗并不相同.这是因为在临界抽样条件下,给定综合窗的分析窗是唯一的;而在过抽样条件下,同综合窗构成双正交关系的分析窗并不唯一,而本文算法则恰恰得到了一个与最优分析窗不同的对偶分析窗.从实验结果还可以看出,在临界抽样条件下,不论辅助函数序列  $g_2(k)$  取双边指数窗还是高斯窗,其得到的分析窗为最优分析窗.而在过抽样条件下,采用不同  $g_2(k)$  作为辅助函数,计算得到的分析窗不一样,但是,这些不同的分析窗都与给定综合窗形成双正交关系,从而进一步证实在过抽样率下给定的综合窗存在不同的对偶分析窗.

## 5 结论

在 Gabor 时频分析中,求解给定综合窗所对应的分析窗是一个重要步骤.基于最小范数解的最优分析窗计算需要求对一个  $ab \times L$  阶的矩阵求逆,当处理长序列时,运算量很大.本文提出了一种求解给定综合窗对应的分析窗的快速算法,该算法首先根据时移和频移参数构造一个辅助的函数序列,同综合窗产生的序列一起构造一个块循环矩阵,利用快速离散傅里叶变换求解其逆,并通过基于块时间递归的并行格型结构求解分析窗.实验结果表明,该算法能以较小的时间复杂度或获得综合窗对应的一般性分析窗.

## 参考文献

- [1] QIAN S, CHEN D. Discrete Gabor transform[J]. Signal Processing, IEEE Transactions on, 1993, 41(7): 2429 – 2438.
- [2] 王学文, 丁晓青, 等. 基于 Gabor 变换的高鲁棒汉字识别新方法[J]. 电子学报, 2002, 30(9): 1317 – 1322.

Wang X W, Ding X Q, et al. Gabor filters based feature extraction for robust chinese character recognition [J]. Acta Electronica Sinica, 2002, 30(9): 1317 – 1322. (in Chinese)

- [3] YAN C. Face image gender recognition based on Gabor transform and SVM [A]. In Advanced Research on Electronic Commerce, Web Application, and Communication, Communications in Computer and Information Science [C]. Berlin Heidelberg: Springer, 2011. 420.
- [4] ZHANG Y, ZHANG H. Doppler ultrasound spectral enhancement using the Gabor transform-based spectral subtraction [J]. Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, IEEE Transactions on, 2005, 52(10): 1861 – 1868.
- [5] WEXLER J, RAZ S. Discrete Gabor expansions [J]. Signal processing, 1990, 21(3): 207 – 220.
- [6] LI S, OGAWA H. Pseudoframes for subspaces with applications [J]. Journal of Fourier Analysis and Applications, 2004, 10(4): 409 – 431.
- [7] QIAN S, CHEN K, LI S. Optimal biorthogonal sequence for finite discrete-time Gabor expansion [J]. Signal Process, 1992, 27(2): 177 – 185.
- [8] WERTHER T, ELDAR Y, SUBBANNA N. Dual Gabor frames: theory and computational aspects [J]. Signal Processing, IEEE Transactions on, 2005, 53(11): 4147 – 4158.
- [9] VESCOVO R. Inversion of block-circulant matrices and circular array approach [J]. IEEE Trans Antennas Propag, 1997, 45(10): 1565 – 1567.

## 作者简介



周 健 男, 1981 年出生, 安徽太湖县人, 2004 年和 2007 年分别在西南交通大学信息科学与技术学院获得工学学士和工学硕士学位, 2007 进入安徽大学计算机科学与技术学院工作, 目前为东南大学水声信号处理教育部重点实验室博士生, 研究方向为信号与信息处理.  
E-mail: ahjzhou@gmail.com

王华彬 男, 1983 年出生, 安徽阜阳人, 博士. 安徽大学计算机科学与技术学院讲师, 研究方向为模式识别与信号处理.

陶 亮 男, 1963 年出生, 安徽合肥人, 教授, 博士, 博士生导师, 主要从事模式识别与信息处理.

赵 力 男, 1958 年出生, 江苏南京人, 教授, 博士, 博士生导师, 主要从事语音信号处理、自然语言处理、声频和视频信号处理、情感信息处理.