

从离散到连续 ——分数阶信号处理的理论、方法与应用

陈 ■, 彭钰林, 王舒文, 殷福亮

(大连理工大学信息与通信工程学院, 辽宁大连 116024)

摘 要: 近年来, 分数阶信号处理受到广泛关注, 已成为研究热点. 本文对分数阶信号处理理论、方法与应用进行了综述, 分别简述了分数阶傅里叶变换、分数阶微积分、分数阶系统、分数阶统计量、分形的理论方法以及它们在信号处理领域中的应用.

关键词: 分数阶傅里叶变换; 分数阶微积分; 分数阶系统; 分数阶统计量; 分形

中图分类号: TN911.72 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2012) 11-2282-08

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.3969/j.issn.0372-2112.2012.11.022

From Discrete to Continuous ——Fractional Signal Processing Theories, Methods and Applications

CHEN Zhe, PENG Yu-lin, WANG Shu-wen, YIN Fu-liang

(School of Information and Communication Engineering, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, China)

Abstract: In recent years, fractional signal processing has become a research hotspot with a widespread attention. In this paper, the fractional signal processing theories, methods and applications are reviewed, including the fractional Fourier transform, fractional calculus, fractional order system, fractional lower order statistics, and fractal.

Key words: fractional fourier transform; fractional calculus; fractional order system; fractional lower order statistics; fractal

1 引言

随着数字信号处理理论与方法的快速发展和广泛应用, 人们已习惯于用离散化、整数化的思想将模拟信号数字化, 并用各种整数阶处理方法进行分析和处理. 但实际的信号往往是复杂的, 例如, 通信中的脉冲噪声没有二阶以上阶次的统计量, 图像与语音信号常表现出分形特征, 某些系统具有分数阶微积分性质等. 对这些特殊的信号与系统, 常规信号处理方法性能不佳, 而具有分数阶参数和维数的信号处理方法则可以求解这些问题^[1]. 此外, 随着人们对信号处理性能要求的不断提高, 现代数字信号处理的研究热点已转向非线性、非因果、非高斯、非平稳、非整数维信号以及非白噪声的处理问题, 这从近年来发表的相关学术论文数量上就可以看到这一点. 实际上, 越来越多的学者尝试对整数化、离散化的信号与系统进行“连续化”研究, 将传统整数参数、整数阶信号处理方法扩展到分数阶, 以期提取更多的信息, 逼近信号的真实特性, 改善信号处理的效果.

所谓“分数阶信号处理”, 是指阶数、维数、参数为分数的信号与系统的分析与处理方法. 目前, 分数阶信号处理^[1]相关内容主要包括五方面: 分数阶傅里叶变换、分数阶微积分、分数阶系统、分数低阶统计量以及分形. 本文对分数阶信号处理的理论、方法与应用进行了综述.

2 分数阶傅里叶变换 (Fractional Fourier Transform, FRFT)

传统 Fourier 变换在描述非平稳信号时有很大的局限性, 因而人们期望找到类似的数学工具来分析非平稳信号. 1980 年 Namias^[2]从特征函数和特征值的角度首先提出 FRFT; 1987 年 McBride 等^[3]给出 FRFT 严格的数学定义; 1993 年 Mendlovic 等^[4,5]把 FRFT 用在光学信息处理中; Lohmann 等^[6]将 FRFT 的物理意义解释为时频平面的旋转, 至此, FRFT 开始成为一种时频分析工具; 1996 年 Ozaktas 等^[7]将 FRFT 分解为信号卷积过程, 使其计算复杂度降低至 FFT 量级, 促进 FRFT 工程应用.

设信号为 $x(t)$, 连续 FRFT 普遍使用的积分定义

$$X_\alpha(u) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) K_\alpha(t, u) dt \quad (1)$$

式中

$$K_\alpha(t, u) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1-j\cot\alpha}{2\pi}} e^{j\pi\frac{t^2}{2}\cot\alpha} e^{j\pi(\frac{1}{2}\cot\alpha - ut\csc\alpha)}, & \alpha \neq p\pi \\ \delta(t-u), & \alpha = 2p\pi \\ \delta(t+u), & \alpha = (2p \pm 1)\pi \end{cases}$$

写成算子形式为

$$X_\alpha(u) = F_\alpha x(t) \quad (2)$$

其中 $\alpha \in (-\pi, \pi)$, p 为整数. 与连续 FRFT 类似, 数字信号 $x(n)$ 的离散 FRFT (DFRFT) 定义为

$$X_\alpha(k) = F_\alpha x(n) \quad (3)$$

FRFT 除传统的线性、时移(频移)等性质外, 还有如下特殊性质^[7]: (a) F_α 满足交换律; (b) $(F_\alpha)^{-1} = F_{-\alpha}$; (c) 酉性, $(F_\alpha)^{-1} = (F_\alpha)^H$; (d) $F_\alpha[\psi_n] = e^{-j\pi n^2/2} \psi_n$, 这表明 FRFT 特征函数为 Hermite-Gauss 函数 ψ_n ; (e) 若 $x(t)$ 的 Wigner 分布为 $WD_x(t, w)$, 则有 $WD_x(ucos\theta - v\sin\theta, ucos\theta + v\sin\theta) = WD_{x_\alpha}(u, v)$ ^[5].

根据不同核矩阵, DFRFT 的数值实现主要有三种算法: (1) 线性组合类算法^[9], 利用标准 DFT 核矩阵的指数项的线性组合计算 DFRFT, 其缺点是计算结果与连续变换相差较大; (2) 离散采样类算法^[7,10], 通过对核函数离散采样值进行卷积来计算 DFRFT, 利用 FFT 减小运算量, 但其核函数不是带限函数, 采样存在频带混叠; (3) 特征分解类算法^[11], 利用矩阵的特征值和特征向量来计算, 该类算法的计算量适中, 能满足一般的精度要求. FRFT 具有在时频平面上无交叉项干扰^[12]的优点, 它在信号处理领域中的应用主要有:

(1) 信号滤波: Ozaktas 等^[13]在 FRFT 域中实现了卷积运算、多路复用和分数阶域的滤波. 其后, 一些学者^[14,15]将传统 Fourier 变换域的滤波技术推广到 FRFT 域中.

(2) 数字水印: 2001 年 Djurovic 等^[16]首次将 FRFT 应用于数字水印, 这种水印灵活性更好. 其后的一些改进算法^[17,18]进一步增强了 FRFT 域数字水印的鲁棒性.

(3) 雷达、声呐: 这些系统中常用的 chirp 信号在 FRFT 域中具有良好的时频聚焦性. Akey 等^[19]利用 FRFT 实现了 chirp 信号的检测算法. 其后出现多种基于 FRFT 的 chirp 信号检测算法^[20,21].

(4) 通信系统: 将 OFDM 系统中 Fourier 变换替换为 FRFT, 可获得更好的效果, 尤其在抗载波频率误差方面. 2001 年 Martone^[22]首先用 DFRFT 替代多载波系统中的 DFT. 文献^[23]用 FRFT 实现了 MIMO 系统中的 MSE

接收机, 提高了对 chirp 信号的接收灵敏度.

(5) 图像压缩: 2001 年 Yetik 等^[24]尝试将 FRFT 应用于图像压缩中; 其后, Vijaya 等^[25]结合 FRFT 和分层树技术进行压缩编码, 压缩率高于传统压缩方法; 2011 年石大明等^[26]、Singh 等^[27]提出了基于 FRFT 的图像压缩方法, 进一步推进了 FRFT 在图像压缩上的应用.

(6) 模式识别: 1996 年 Lohmann 等^[28]首次将 FRFT 用于滤波系统辨识中, 识别效果有明显改善; 其后, Barshan 等^[29]于 2002 年将 FRFT 作为神经网络输入的预处理, 能明显减少分类识别的误差; 2006 年 Jing 等^[30]将 FRFT 成功应用于人脸识别的特征提取阶段; 2009 年张永亮等^[31]利用 FRFT 将语音处理中的 MFCC 推广到分数形式, 提高了说话人识别率.

3 分数阶微积分(Fractional Calculus, FC)

早在 1695 年, Leibniz 就提出了 FC 问题. FC 是描述分维空间的基础工具, 能用于复杂系统的描述^[1]. 在 FC 定义中, 最早得到公认、最常用的是 Riemann-Liouville 定义^[32,33], 即

$$\begin{aligned} D_t^v [t_0, s(t)] &= \frac{d^n}{dt^n} (I_t^{n-v} [t_0, s(t)]) \\ &= \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{1}{\Gamma(n-v)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{n-v-1} s(\tau) d\tau \right), \\ v &\in R^+ \end{aligned} \quad (4)$$

其中, $s(t)$ 为函数, t_0 为微积分下限, D 为微分算子, I 为积分算子, v 为分数阶数, n 为大于 v 的最小正整数,

$\Gamma(\cdot)$ 为 γ 函数, $\Gamma(v) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{(v-1)} dt$, $v \in R$. 该 FC 定义不便于计算机实现, 于是有了由整数阶微分的差分近似递推并求极限得到的 Grunwald-Letnikov 定义^[34], 即

$$D_t^v [t_0, s(t)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^v} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{t-t_0}{h} \rfloor} (-1)^k C_k^v s(t-kh), v \in R \quad (5)$$

式中, $\lfloor \cdot \rfloor$ 是向下取整运算, C_k^v 为组合数, 其定义为 $C_k^v = \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(v-k+1)}$. 由于积分和微分可交换, 1967 年 Caputo 给出了先微分 n 次, 再积分 $n-v$ 次的 FC 定义^[35,36]

$$\begin{aligned} D_t^v [t_0, s(t)] &= I_t^{n-v} [t_0, \frac{d^n}{dt^n} (s(t))] \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-v)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{n-v-1} \frac{d^n}{d\tau^n} (s(\tau)) d\tau, \\ v &\in R^+ \end{aligned} \quad (6)$$

由式(6)可看出, (a) FC 算子具有线性叠加性、半群性, 满足交换律; (b) 信号的 FC 对时间和阶数皆为解析的;

(c)当 v 为非负整数时, FC 退化为传统的整数阶微积分; (d)信号的分数阶微积分可以看作将信号经过一线性时不变滤波器, 该滤波器传递函数为 $\hat{d}_v(\omega) = |\omega|^v \cdot \exp(j \frac{v\pi}{2} \text{sgn}(\omega))$; (e)从通信调制的角度, FC 的物理意义可解释为: 幅度随 v 阶幂指数变化, 相位是数字频率 ω 的广义 Hilbert 变换。

FC 在语音/图像处理、模式识别、通信信道建模、生物医学信号处理、时间序列分析、电化学信号处理、经济数据分析等方面都有成功的应用^[37,38]。例如, 李远禄等^[39]在滤波器设计中引进 FC, 使其逼近效果更好; Margin 等^[40]发现 FC 阶次取值的小数位有效位数的无规律性可用于数字水印中; 蒲亦非等^[41]基于 FC 提取图像的边缘信息。FC 应用在系统辨识和建模时需要求解 FC 方程。目前分数阶常微积分方程求解的可行方法有: (1) Laplace 变换法^[42], 其利用了 Caputo 定义式的 Laplace 变换形式, 可不受状态变量影响; (2) 状态空间法^[42,43], 该算法表达简单, 但当状态变量较多时计算量大。而分数阶偏微分方程求解更为复杂, 涉及到边界条件、初值条件等^[44]问题。目前, FC 代表性的快速算法有基于 Grunwald-Letnikov 定义的数值算法、幂级数数值算法、傅里叶级数数值算法、基于子波变换的数值算法等^[36,37]。FC 具有很多好的特性, 例如: 能在加强高频信息的同时保留低频信息; 抗噪性能强; 与整数阶微积分相比, 相位不是恒定的 $\pm \frac{\pi}{2}$, 能提取更多的相位信息, 因此其在信号处理中对分析“非 $\times \times$ ”信号的应用将会更加广泛。

4 分数阶系统 (Fractional Order System, FOS)

FOS 是由非整数阶微积分方程描述的动态系统。时域 FC 方程经 Laplace 变换可得到分数阶传递函数。作为特例, 同元次分数阶系统(即各分数阶次为在 $(0,1)$ 之间某个数 α 的整数倍)传递函数可定义为

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\sum_{k=0}^m b_k s^{k\alpha}}{\sum_{k=0}^n a_k s^{k\alpha}} \quad (7)$$

分数阶系统的研究目前主要集中在:

(1) FOS 的物理实现: 目前主要研究 $1/2$ 阶模拟分抗电路(任意阶 FC 模拟分抗电路可用 $1/2$ 阶的组合实现)。Sorimachi 等^[45]提出了经典的 $1/2$ 阶树型模拟分抗电路, 如图 1 所示, 其中 Z_a 、 Z_b 可为普通的无源电阻、电容或电感; 周激流等^[36]提出了改进的两回路串联的 $1/2$ 阶模拟分抗电路、H 型 $1/2$ 阶模拟分抗电路以及网格式 $1/2$ 阶模拟分抗电路; Bohannan 研制的‘factor’分数

阶元件^[46]可直接搭建分数阶系统。

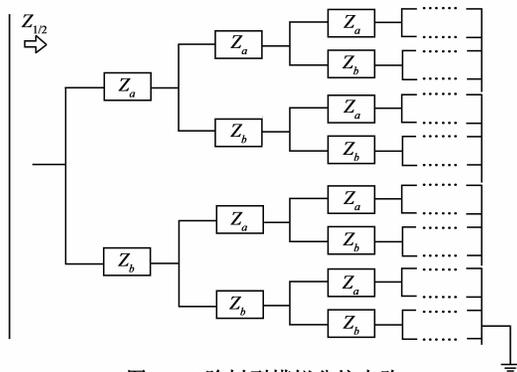


图1 $1/2$ 阶树型模拟分抗电路

(2) FOS 稳定性研究: 式(7)中 $H(s)$ 不是 s 的有理函数, 故 FOS 的稳定性分析相对复杂。王振滨等^[47,48]推导出分数阶线性时不变系统的两个稳定性判据: 分数阶 Nyquist 判据和分数阶对数频率判据, 避免了求取闭环特征根; 李元凯等^[49]提出的扩展频域法能直观判断任意阶次系统的稳定性。

(3) 分数阶随机信号产生: 分数阶随机信号是具有长相关性、局部相关性、重尾分布的随机信号, 典型如人体生理信号等。蒲亦非^[50]使用模拟分抗电路模仿产生了环杓后肌神经电脉冲信号, 能正确地模仿真实的生物神经冲动。

(4) FOS 辨识: Hartley 等将连续阶分布的概念用于 FOS 的辨识中^[51]。由于 FOS 时域表达式复杂, 相关研究集中在频域辨识方法上。例如, 彭程等^[52]给出了一种基于模拟退火和线性最小二乘的频域辨识算法。

FOS 可视为整数阶系统的推广, 它能更准确地描述现实世界中的物理系统。FOS 可用来模拟产生实际中的随机信号, 有利于对“非 $\times \times$ ”信号的分析处理。

5 分数低阶统计量 (Fractional Lower Order Statistics, FLOS)

数学家 Levy 于 1925 年提出了 α 稳定分布。为准确地描述非高斯脉冲信号, 1993 年 Shao 等^[53]将 α 稳定分布引入到信号处理领域。 α 稳定分布的概率密度函数 (PDF) 没有封闭表达式, 只能通过特征函数 $\phi(t)$ 定义

$$\phi(t) = \exp\{j\mu t - \gamma |t|^\alpha [1 + j\beta \text{sgn}(t)\omega(t, \alpha)]\} \quad (8)$$

其中, $\omega(t, \alpha) = \begin{cases} \tan(\pi\alpha/2), & \alpha \neq 1 \\ (2/\pi)\lg(t), & \alpha = 1 \end{cases}$, $\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t = 0, \alpha \in (0, 2] \\ -1, & t < 0 \end{cases}$ 为特征指数, α 值越小, 其脉冲

特性越显著, 特别地, $\alpha = 2$ 时该分布就是高斯分布; $\beta \in [-1, 1]$ 为对称参数, 用于确定分布的斜度, $\beta = 0$ 对应于对称 α 稳定 ($S_\alpha S$) 分布; $\gamma \in [0, \infty)$ 为分散系数, 可度

量样本相对于均值的分散程度; μ 为位置参数, 用于表示分布的均值或中值.

由于 α 稳定分布不存在二阶与高阶统计量, 只能从其 FLOS 中提取有用信息. α 稳定分布随机变量 X 的 p 阶矩定义为 $E(|X|^p)$, 其中 $0 < p < \alpha < 2$. 两个 α 稳定分布随机过程 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的共变与分数低阶协方差分别定义为

$$R_c(m) = E\{[x_2(n)][x_1(n+m)]^{(p-1)}\}, 1 \leq p < \alpha \quad (9)$$

$$R_d(m) = E\{[x_2(n)]^{(A)}[x_2(n+m)]^{(B)}\}, \\ 0 \leq A \leq \frac{\alpha}{2}, 0 \leq B \leq \frac{\alpha}{2} \quad (10)$$

其中符号 $\langle \cdot \rangle$ 表示运算 $z^{\langle \alpha \rangle} = |z|^\alpha \text{sgn}(z)$, m 表示 $x_1(n)$ 相对于 $x^2(n)$ 的延迟采样点数.

理论与实践表明, 将 FLOS 理论与传统信号处理算法相结合, 应用于水声及雷达、生物医学、通信等信号处理领域, 可取得良好的效果.

(1) 时间延迟估计: 对受到 α 稳定分布噪声干扰的信号, Ma 等^[54]提出了根据两个信号共变或分数低阶协方差的峰值位置估计时间延迟; 在自适应滤波中采用基于分数低阶矩的代价函数. 这两种算法在高斯噪声和 α 稳定分布噪声条件下都具有韧性, 但需两个噪声信号互相独立. 自适应延迟估计的其他方法还有基于分数低阶循环互相关方法^[55]、LETDE 算法^[56]、LMP_HB 算法^[57]等. 诱发电位 (EP) 潜伏期是神经生理疾病诊断的重要手段. EP 潜伏期检测从本质上说是时延估计问题, Kong 等^[58]最先将 LMS、DLMS 算法应用于 EP 信号检测中, 并改进为 LMP、DLMP 以及 SDA 算法. 这些基于 FLOS 的算法不断被改进: 邱天爽等^[59]在自适应迭代过程中引入非线性变换, 对 SDA 算法的误差进行了有效补偿; 文献^[60]提出了 LMPBFNN 算法和 SDARBFNN 算法, 可解决多次重复刺激易使中枢神经系统疲劳问题.

(2) 阵列信号处理: 在波束形成方面, 文献^[61~63]分别将传统的 MSE、最大信噪比和线性最小方差准则的波束形成算法改为基于分数低阶矩求解最优权矢量. 在波达方向 (DOA) 估计方面, 文献^[64, 65]分别构造了阵列信号的共变矩阵和分数低阶矩阵, 提出了 ROC-MUSIC 算法和 FLOM-MUSIC 算法, 两者在 α 稳定分布噪声下的性能都优于 MUSIC 算法. 对于非平稳信号, 何劲^[66]等提出了基于分数低阶矩的空域-模糊域的 DOA 估计算法.

(3) 信道自适应均衡: 针对 α 稳定分布噪声环境, Rupi 等^[67]将基于二阶或四阶统计量的代价函数修改为 FLOS 和极性功率定义的新代价函数, 提出了分数低阶统计量恒模 (FLOS_CMA) 算法. 而 Li 等^[68]将 MU_CMA 算法扩展成分数低阶 FLOS_MU_CMA 算法, 取得了较

好的结果. 总之, 针对脉冲噪声使二阶或高阶统计量处理方法退化的问题^[69], 利用 α 稳定分布和分数低阶统计量对传统算法进行改进, 可使算法的应用更灵活广泛.

6 分形 (Fractal)

自然界中存在的大量结构复杂的对象, 如海岸线、树木等, 很难用规整的图形来表示. 为此, 数学家 Mandelbrot^[70, 71]首先提出了“分形”这一概念. 分形目前还没有严格的数学定义, 通常, 若认为一个形态为分形, 则它具有以下特性^[72]: (a) 具有精细的结构, 有任意小比例的细节; (b) 其整体和局部都不能用传统的几何语言来描述; (c) 具有近似的或统计意义上的自相似形式; (d) 其分形维数大于其拓扑维数; (e) 能以非常简单的方法定义, 可由迭代产生.

维数是几何对象的一个重要特征量, 拓扑维数是整数维数, 分形维数则将维数由整数拓展为分数, 用于度量分形的不规则程度和复杂程度. 分形维数根据应用不同有多种定义, 常用的有 Hausdorff 维数 D_H 、计盒维数 (又称盒维数)、信息维数、关联维数等.

分形在自然界普遍存在, 使得分形理论的应用涵盖了理、工、医、经济、管理等众多学科. 在信号处理领域, 分形理论作为一种处理非线性信号的重要工具, 在生物医学、通信、语音、图像等方面均有应用.

(1) 生物医学信号处理 1986 年 Mayer-Kress 等^[73]对人在安静的清醒状态和麻醉状态下的脑电图 (EEG) 信号的维数做了详细分析; 1988 年 Casaleggio 等^[74]通过计算人在不同姿势下心电图 (ECG) 信号的关联维数分析了 ECG 信号的特性. 之后, 基于分形理论的 ECG 与 EEG 信号处理方法迅速发展, 成为诊断心脏病、癫痫病等疾病以及研究生物生理特性的有效手段之一^[75, 76]. 同时, 分形理论也逐步引入到肌电、眼电等生物电信号的研究中^[77, 78].

(2) 通信信号处理 根据不用调制方式信号的分形特性不同, Lv 等^[79]采用计算信号计盒维数和信息维数的方法, 对未调载波、BFSK、QFSK、BPSK 与 QPSK 五种信号进行了调制方式识别. Hippenstiel 等^[80]使用计盒维数和前馈神经网络对多种调制信号进行了分类. 文献^[81, 82]则通过对 FSK 信号计盒维数的研究, 对 FSK 信号进行了模糊滤波和信号解调.

(3) 语音信号处理 语音信号局部特性满足分形特征^[83]. Maragos 等^[84]首先在 CELP 技术中用分形码本, 有效降低了编码码率. 文献^[85]给出了一种基于迭代函数系统 (IFS) 的低复杂度、低速率语音编码方案. 此外, 根据相邻音素的分形维数, 可对语音进行识别^[86]与分割^[87]; 根据语音与背景噪声的分形特性, 可以实现语音

增强^[88]以及语音激活检测^[89].

(4) **图像处理** 1980 年代末, Bamsley 等^[90]首先提出了分形图象压缩, 并将 IFS 应用到图像压缩编码中. 随后 Jacquin 等^[91]阐述了一种基于分块的分形图象压缩方法, 可在高压缩率与实现复杂性之间进行折衷. 在图像边缘检测领域, Chen 等^[92]利用分形维数信息对医学图像进行边缘检测与增强, 曹汉强等^[93]提出了基于 IFS 的图像边缘检测方法. 虽然分形理论是一门新兴的学科, 但其在解决非线性问题上的应用潜力很大. 随着人们对分形理论的研究与实践, 分形理论将逐步成熟完善, 并在信号处理领域发挥更大的作用.

7 研究展望

连续信号数字化处理是信号处理领域的一次飞跃. 表面上看, 分数阶信号处理似乎是由离散回退到连续, 但分数阶信号处理不是简单地回归到连续阶信号处理, 而是又一次飞跃, 这也符合人们认识客观世界的“螺旋式上升”的规律.

本文介绍的五种分数阶信号分析与处理方法, 可对不同类型的“非 $\times \times$ ”信号或系统进行有效地分析与处理. 此外, 它们之间也存在着密切的联系, 例如: 分数阶微积分是分形的基础, 它能有效地描述分维空间; 分数阶微分方程可视为一个分数阶系统; 若要较好地求解分数阶系统方程, 则需要借用分数阶微积分. 此外, 在频域中研究“非 $\times \times$ ”信号时, 可以利用分数阶傅里叶变换; 分析 α 稳定分布信号时, 分数阶统计量是一个有力工具. 可以想象, 随着分数阶信号处理理论研究的进一步深化, 其应用也将更加广泛.

今后关于分数阶信号处理方法研究, 除了在广度、深度方面进一步完善已有方法之外, 还包括: 如何建立起分数阶信号处理的理论体系, 以及如何参照现有整数阶信号处理方法, 来构建分数阶信号处理方法等. 目前最有可能获得突破的两个方面是:

(1) 现有分数阶信号处理方法采用的阶数主要为正的有理数, 以上介绍的五种分数阶信号处理方法大都是在正有理数概念下进行的, 而实际中, 分数阶不仅仅指正有理数, 也包含阶数为负有理数、无理数, 甚至复数的情况. 在无理数和复数阶数情况下, 这些分数阶分析处理方法是否有新的拓展和应用, 这可能成为以后研究的重点.

(2) 其它整数类(阶)信号处理方法, 是否可以拓展为分数阶处理, 尚需理论上的深入研究与实践上的进一步突破.

参考文献

[1] Ortigueira M D, et al. Fractional signal processing and applica-

- tions[J]. *Signal Processing*, 2003, 83(11): 2285 – 2286.
- [2] Namias V. The fractional order Fourier transform and its application to quantum mechanics [J]. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 1980, 25(3): 241 – 265.
- [3] McBride A C, et al. On Namias' fractional Fourier transform [J]. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 1987, 39(2): 159 – 175.
- [4] Mendlovic D, Ozaktas H M. Fractional Fourier transforms and their optical implementation (I) [J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 1993, 10(10): 1875 – 1881.
- [5] Ozaktas H M, Mendlovic D. Fractional Fourier transforms and their optical implementation (II) [J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 1993, 10(12): 2522 – 2531.
- [6] Lohmann A W, Soffer B H. Relationships between the Radon-Wigner and fractional Fourier transforms[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 1994, 11(6): 1798 – 1801.
- [7] Ozaktas H M, Arikan O, et al. Digital computation of the fractional Fourier transform[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1996, 44(9): 3084 – 3091.
- [8] 陶然, 邓兵, 王越. 分数阶傅里叶变换及其应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2009.
- [9] Santhanam B, McClellan J H. The discrete rotational Fourier transform[J]. *Signal Processing*, 1996, 44(4): 994 – 998.
- [10] 赵兴浩, 邓兵, 陶然. 分数阶傅里叶变换数值计算中的量纲归一化[J]. *北京理工大学学报*, 2005, 25(4): 360 – 364. ZHAO Xing-hao, et al. Dimensional normalization in the digital computation of the fractional fourier transform[J]. *Transactions of Beijing Institute of Technology*, 2005, 25(4): 360 – 364. (in Chinese)
- [11] Vargas-rubio J G, Santhanam B. On the multiangle centered discrete fractional Fourier transform [J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2005, 12(4): 273 – 276.
- [12] Ervin Sejdic, et al. Fractional Fourier transform as a signal processing tool: An overview of recent developments [J]. *Signal Processing*, 2011, 91(6): 1351 – 1369.
- [13] Erden M F, Kutay M A, Ozaktas H M. Applications of the fractional Fourier transform to filtering, estimation and restoration[A]. *IEEE-EURASIP Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing [C]*. Antalya, Turkey, June 1999. 481 – 485.
- [14] Stankovic L, Alieva T, Bastiaans M J. Time-frequency signal analysis based on windowed fractional Fourier transform[J]. *Signal Processing*, 2003, 83(11): 2459 – 2468.
- [15] Durak L, Aldirmaz S. Adaptive fractional Fourier domain filtering[J]. *Signal Processing*, 2010, 90(4): 1188 – 1196.
- [16] Djurović I, Stanković S, Pitas I. Digital watermarking in the fractional Fourier transformation domain[J]. *Journal of Network and Computer Applications*, 2001, 24(2): 167 – 173.
- [17] 王娟锋, 等. 一种基于分数阶 Fourier 域的数字水印[J]. *计算机工程与应用*, 2007, 43(8): 43 – 45. WANG Juan-feng, et al. Digital watermark algorithm based on

- fractional fourier transform [J]. *Computer Engineering and Applications*, 2007, 43(8): 43 – 45. (in Chinese)
- [18] 何泉, 田瑞卿, 王彦敏. 分数傅里叶域图像数字水印方案 [J]. *计算机工程与设计*, 2006, 27(24): 4642 – 4643.
HE Quan, et al. Digital image watermarking in fractional Fourier transformation domain [J]. *Computer Engineering and Design*, 2006, 27(24): 4642 – 4643. (in Chinese)
- [19] Akay O, Boudreaux-bartels G F. Fractional convolution and correlation via operator methods and an application to detection of linear FM signals [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2001, 49(5): 979 – 993.
- [20] 李靖, 等. 基于分数阶傅里叶变换的 chirp 信号时频分析 [J]. *系统工程与电子技术*, 2005, 27(6): 988 – 990.
LI Jing, et al. Chirp signal analysis based on PWD in fractional fourier transform domain [J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2005, 27(6): 988 – 990. (in Chinese)
- [21] 周亚来, 李春升. 一种线性调频信号参数分析的综合方法 [J]. *现代雷达*, 2005, (11): 39 – 42.
ZHOU Ya-lai, et al. A synthesized method of LFM signal analysis [J]. *Modern Radar*, 2005, (11): 39 – 42. (in Chinese)
- [22] Martone M. A multicarrier system based on the fractional Fourier transform for time- frequency-selective channels [J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2001, 49(6): 1011 – 1020.
- [23] Khanna R, et al. Improved fractional Fourier transform based receiver for spatial multiplexed MIMO antenna systems [J]. *Wireless Personal Communications*, 2009, 50(4): 563 – 574.
- [24] Yetik I S, Kutay M, Ozaktas H M. Image representation and compression with the fractional Fourier transform [J]. *Optics Communications*, 2001, 197(4-6): 275 – 278.
- [25] Vijaya C, Bhat J S. Signal compression using discrete fractional Fourier transform and set partitioning in hierarchical tree [J]. *Signal Processing*, 2006, 86(8): 1976 – 1983.
- [26] 郑丽颖, 石大明, 田凯. 基于分数傅立叶变换的图像压缩方法: 中国专利. 200910072925. 6[P]. 2011-01-12.
- [27] Singh K, et al. Image compression by using fractional transforms [A]. *International Conference on Advances in Recent Technologies in Communication and Computing (ARTCom'09)* [C]. Kottayam, India, 2009. 411 – 413.
- [28] Lohmann A W, Zalevsky Z, Mendlovic D. Synthesis of pattern recognition filters for fractional Fourier processing [J]. *Optics Communications*, 1996, 128(4-6): 199 – 204.
- [29] Barshan B, Ayrulu B. Fractional Fourier transform pre-processing for neural networks and its application to object recognition [J]. *Neural Networks*, 2002, 15(1): 131 – 140.
- [30] X Jing, H Wong, D Zhang. Face recognition based on discriminant fractional Fourier feature extraction [J]. *Pattern Recognition Letters*, 2006, 27(13): 1465 – 1471.
- [31] 张永亮, 张先庭, 鲁宇明. 基于 FMFCC 和 HMM 的说话人识别 [J]. *计算机仿真*, 2010, (5): 352 – 354.
ZHANG Yong-liang, et al. Speaker recognition based on FM-
- FCC and HMM [J]. *Computer Simulation*, 2010, (5): 352 – 354. (in Chinese)
- [32] Loverro A. Fractional calculus history, definitions and applications for the engineer [D]. USA: University of Notre Dame, 2004.
- [33] Oldham K B, Spanier J. *The Fractional Calculus* [M]. London: Academic Press, 1974.
- [34] 林孔容. 关于分数阶导数的几种不同的定义的分析与比较 [J]. *闽江学院学报*, 2003, 24(5): 3 – 6.
LIN Kong-rong. Analysis and comparison of different definition about fractional integrals and derivatives [J]. *Journal of Fuzhou Teachers College*, 2003, 24(5): 3 – 6. (in Chinese)
- [35] Nishimoto K. *Fractional Calculus* [M]. Koriyama: Descartes Press, 1987.
- [36] 周激流, 蒲亦非, 廖科. 分数阶微积分原理及其在现代信号分析与处理中的应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2010.
- [37] Saptarshi Das, Indranil Pan. *Fractional Order Signal Processing: Introductory Concepts and Applications* [M]. Berlin: Springer, 2011.
- [38] Krishna B T. Studies on fractional order differentiators and integrators: a survey [J]. *Signal Processing*, 2011, 91(3): 386 – 426.
- [39] 李远禄. 分数阶微积分滤波原理、应用及分数阶系统辨识 [D]. 南京: 南京航空航天大学, 2007.
- [40] Magin R. On the fractional signals and systems [J]. *Signal Processing*, 2010, 91(3): 350 – 371.
- [41] 蒲亦非. 将分数阶微分演算引入数字图像处理 [J]. *四川大学学报(工程科学版)*, 2007, 39(3): 124 – 132.
PU Yi-fei. Application of fractional differential approach to digital image processing [J]. *Journal of Sichuan University (Engineering Science Edition)*, 2007, 39(3): 124 – 132. (in Chinese)
- [42] 王振滨, 曹广益, 朱新坚. 分数阶微积分在系统建模中的应用 [J]. *上海交通大学学报*, 2004, 38(5): 802 – 805.
WANG Zhen-bin, et al. Application of fractional calculus in system modeling [J]. *Journal of Shanghai Jiaotong University*, 2004, 38(5): 802 – 805. (in Chinese)
- [43] 黎梅新. 分数阶微分方程若干应用问题的研究 [D]. 上海: 东华大学博士论文, 2010.
- [44] 王磊. 分数阶微分方程的数值解法及其 MATLAB 实现 [D]. 山东: 山东大学博士论文, 2010.
- [45] Sorimachi K, Nakagawa M. Basic characteristics of a fractance device [J]. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, 1998, 6(12): 1814 – 1818.
- [46] Bohannan G W. Analog fractional order controller in temperature and motor control applications [J]. *Journal of Vibration and Control*, 2008, 14(9-10): 1487 – 1497.
- [47] 王振滨, 曹广益, 朱新坚. 分数阶线性系统的内部和外部稳定性研究 [J]. *控制与决策*, 2004, 19(10): 1171 – 1174.
WANG Zhen-bin, et al. Research on the internal and external

- stability of fractional order linear systems[J]. *Control and Decision*, 2004, 19(10): 1171 – 1174. (in Chinese)
- [48] Podlubny I. Fractional order systems and $PI^{\alpha}D^{\beta}$ -controllers [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, 44(1): 208 – 214.
- [49] 汪纪锋, 李元凯. 分数阶控制系统稳定性分析与控制器设计: 扩展频率域法[J]. *自动化技术与应用*, 2006, 25(5): 7 – 12.
WANG Ji-feng, LI Yuan-kai. Stability analysis and controller design for fractional-order control systems: the extended frequency domain method [J]. *Techniques of Automation and Applications*, 2006, 25(5): 7 – 12. (in Chinese)
- [50] 蒲亦非. 分数阶微积分在现代信号分析与处理中应用的研究[D]. 四川: 四川大学博士论文, 2006.
- [51] Hartley T T, Lorenzo C F. Fractional system identification based on continuous order distributions[J]. *Signal Processing*, 2003, 83(11): 2287 – 2300.
- [52] 彭程, 王永. 分数阶系统的一种频域辨识算法[J]. *东南大学学报(自然科学版)*, 2008, 38(增): 23 – 26.
PENG Cheng, WANG Yong. Frequency domain identification algorithm for fractional order systems[J]. *Journal of Southeast University(Natural Science Edition)*, 2008, 38A: 23 – 26. (in Chinese)
- [53] Shao M, Chrysostomos L N. Signal processing with fractional lower order moments: stable processes and their applications [J]. *Proceedings of the IEEE*, 1993, 81(7): 986 – 1010.
- [54] Ma X, Nikias C L. Joint estimation of time delay and frequency delay in impulsive noise using fractional lower order statistics[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1996, 44(11): 2669 – 2687.
- [55] Zha D, et al. Robust time delay estimation method based on fractional lower order cyclic statistics[A]. *International Conference on Wireless Communications, Networking and Mobile Computing[C]*. Shanghai, China, 2007. 1304 – 1307.
- [56] 郭莹, 邱天爽. 基于分数低阶矩的 LETDE 时延估计算法[J]. *通信学报*, 2006, 27(5): 12 – 17.
GUO Ying, QIU Tian-shuang. New time delay estimation method based on the fractional lower order moment[J]. *Journal on Communications*, 2006, 27(5): 12 – 17. (in Chinese)
- [57] 孙永梅, 邱天爽. 分数低阶 α 稳定分布噪声下 HB 加权自适应时间延迟估计新方法[J]. *信号处理*, 2007, 23(3): 339 – 342.
Sun Yongmei, Qiu Tianshuang. The novel HB weighted adaptive time delay estimation algorithm under fractional lower order α -stable noise conditions[J]. *Signal Processing*, 2007, 23(3): 339 – 342. (in Chinese)
- [58] Kong X, Qiu T. Latency change estimation for evoked potentials: a comparison of algorithms[J]. *Medical and Biological Engineering and Computing*, 2001, 39: 208 – 224.
- [59] 张金凤, 邱天爽. 低阶 α 稳定分布噪声下诱发电位潜伏期变化估计的一种新方法[J]. *信号处理*, 2003, 19(增): 320 – 323.
ZHANG Jin-feng, QIU Tian-shuang. A new method for EP latency changes estimation under lower order α -stable noise conditions [J]. *Signal Processing*, 2003, 19A: 320 – 323. (in Chinese)
- [60] 毕峰, 邱天爽. 非高斯脉冲噪声下基于径向基神经网络的诱发电位韧性自适应估计方法[J]. *中国生物医学工程学报*, 2011, 30(2): 189 – 224.
BI Feng, QIU Tian-Shuang. A RBFNN-based robust adaptive evoked potential estimator under impulsive noise conditions [J]. *Chinese Journal of Biomedical Engineering*, 2011, 30(2): 189 – 224. (in Chinese)
- [61] Tsakalides P, Nikias C L. Robust adaptive beamforming in α stable noise environments[A]. *IEEE International Conference on Acoustic, Speech, and Signal Processing[C]*. Atlanta, USA, 1996. 2484 – 2487.
- [62] Kannan B, Fitzgerald W J. Beamforming in additive α -stable noise using fractional lower order statistics (Flos) [A]. *The 6th IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems[C]*. Pafos, Cyprus, 1999. 1755 – 1758.
- [63] 吕泽均, 肖先赐. 一种新的自适应波束形成技术[J]. *系统工程与电子技术*, 2003, 25(5): 543 – 549.
LU Ze-jun, XIAO Xian-ci. A novel adaptive beamforming technique[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2003, 25(5): 543 – 549. (in Chinese)
- [64] Tsakalides P, Nikias C L. The robust covariation-based MUSIC (ROR-MUSIC) algorithm for bearing estimation in impulsive noise environments[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1996, 44(7): 1623 – 1633.
- [65] Liu T H, Mendel J M. A subspace-based direction algorithm using fractional lower order statistics[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2001, 49(8): 1605 – 1613.
- [66] 何劲, 刘中. 基于分数低阶统计量的空域-模糊域 DOA 估计算法[J]. *电子与信息学报*, 2007, 29(1): 109 – 112.
HE Jin, LIU Zhong. Spatial-ambiguity-domain based DOA estimation algorithm using fractional lower order statistics[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2007, 29(1): 109 – 112. (in Chinese)
- [67] Rupi M, Re E D. Optimum design for adaptive equalizers based on fractional lower-order statistics in non-Gaussian environment [A]. *The Thirty-Third Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers[C]*. Pacific Grove, USA, 1999. 524 – 528.
- [68] Li S, Qiu T, Zha D. Adaptive blind equalization for MIMO systems under α -stable noise environment[J]. *IEEE Communication Letters*, 2009, 13(8): 609 – 611.
- [69] Nikias C L, Shao M. *Signal Processing with Alpha Stable Distribution and Application* [M]. New York: John Wiley and Sons, 1995.
- [70] Mandelbrot B B. *Fractals: Form, Chance, and Dimension* [M]. San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1977.

- [71] Mandelbrot B B. The Fractal Geometry of Nature[M]. New York: W. H. Freeman and Company, 1982.
- [72] Falconer K. Fractal Geometry-Mathematical Foundations and Applications[M]. New York: John Wiley and Sons, 1990.
- [73] Mayer-Kress G, Layne S. Dimensionality of the human electroencephalogram[J]. Annals of the New York Academy of Sciences, 1987, 504: 62 – 87.
- [74] Casaleggio A, Pestelli S, Mela G S. Some results on a fractal-like behaviour of ECG signals[A]. Proceeding of Computers in Cardiology[C]. Washington DC, USA, 1988: 421 – 424.
- [75] Hadjimitriou S K. Revealing action representation processes in audio perception using fractal EEG analysis [J]. IEEE Transactions on Biomedical Engineering, 2011, 58(4): 1120 – 1129.
- [76] Peiris M T R, Jones R D, Davidson P R. Fractal dimension of the EEG for detection of behavioural microsleeps[A]. IEEE 27th Annual Conference on Engineering in Medicine and Biology[C]. Shanghai, China, 2005. 1 – 4.
- [77] Gupta V, Suryanarayanan S, Reddy N P. Fractal dimension of surface EMG during isokinetic contractions [A]. IEEE 17th Annual Conference on Engineering in Medicine and Biology [C]. Montreal, Canada, 1995. 1331 – 1332.
- [78] Fumiharu T, Yoshiharu Y. Decreased fractal component of human heart rate variability during non-REM sleep[J]. American Journal of Physiology: Heart and Circulatory Physiology, 2001, 280(1): H17 – H21.
- [79] Lv T, et al. Study on fractal features of modulation signals [J]. Science in China (Series F), 2011, 44(2): 152 – 158.
- [80] Hippenstiel R, El-kishky H, Radev P. On time-series analysis and signal classification-part I: fractal dimensions [A]. The Thirty-Eighth Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers[C]. Pacific Grove, USA, 2004. 2121 – 2125.
- [81] 马雪洁, 魏学业. 分形滤波及其在铁路信号中的应用 [J]. 交通运输工程学报, 2001, 1(1): 58 – 50.
MA Xue-jie, WEI Xue-ye. Fractal filtering and its application in railway signal[J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering, 2001, 1(1): 58 – 50. (in Chinese)
- [82] Zhao L, Xu X, Ji N. A fast demodulating method for frequency shift signal based on fractal box dimensions theory[A]. International Symposium on Microwave, Antenna, Propagation, and EMC Technologies for Wireless Communications [C]. Hangzhou, China, 2007: 1027 – 1030.
- [83] Maragos P. Fractal aspects of speech signals: dimension and interpolation[A]. IEEE International Conference on Acoustic, Speech, and Signal Processing [C]. Toronto, Ontario, Canada, 1991. 417 – 420.
- [84] Maragos P, Young K L. Fractal excitation signals for CELP speech coders[A]. IEEE International Conference on Acoustic, Speech, and Signal Processing [C]. Albuquerque, NM, USA, 1990. 669 – 672.
- [85] May R J, et al. Perceptual content loss in bit rate constrained IFS encoding of speech[A]. International Conference on Genetic Algorithms in Engineering Systems: Innovations and Applications [C]. Sheffield, UK, 1995. 325 – 330.
- [86] Bohez E L J, Senevirathne T R, Van Winden J A. Fractal dimension and iterated function system (IFS) for speech recognition[J]. Electronics Letters, 1992, 28(15): 1382 – 2384.
- [87] Fantinato P, et al. A fractal-based approach for speech segmentation[A]. Tenth IEEE International Symposium on Multimedia [C]. Berkeley, CA, USA, 2008. 551 – 555.
- [88] 赵晓群, 王彦, 苏彦莽, 等. 基于分形理论的语音增强 [J]. 电声技术, 2005, (12): 33 – 37.
ZHAO Xiao-qun, et al. Speech enhancement based on fractal interpolation [J]. Audio Engineering, 2005, (12): 33 – 37. (in Chinese)
- [89] Yang S, Li Z, Chen Y. A fractal based voice activity detector for internet telephone[A]. IEEE International Conference on Acoustic, Speech, and Signal Processing [C]. Hong Kong, 2003. I/808 – I/811.
- [90] Barnsley M F, Sloan A D. A better way to compress images [J]. Byte Magazine, 1988, 13(1): 215 – 223.
- [91] Jacquin A E. A novel fractal block-coding technique for digital image [A]. IEEE International Conference on Acoustic, Speech, and Signal Processing [C]. Albuquerque, USA, 1990. 2225 – 2228.
- [92] Chen C, Daponte J S, Fox M D. Fractal feature analysis and classification in medical imaging [J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1989, 8(2): 133 – 142.
- [93] 曹汉强, 朱光喜, 朱耀庭. 一种基于 IFS 的图像边缘检测方法 [J]. 信号处理, 1997, 13(4): 330 – 334.
CAO Hanqiang, et al. A novel edge detection method based on IFS [J]. Signal Processing, 1997, 13(4): 330 – 334. (in Chinese)

作者简介



陈 ■ 男, 副教授, 工学博士, 1975 年 11 月生, 黑龙江省泰来人, 2003 年博士毕业于大连理工大学信号与信息处理专业. 主要感兴趣领域有数字信号处理、语音处理、图像处理、宽带无线通信技术.

E-mail: zhechen@dlut.edu.cn



彭钰林 男, 硕士研究生, 1988 年 3 月生, 四川蓬溪人. 现为大连理工大学信号与信息处理专业硕士研究生. 主要感兴趣领域有语音处理、图像处理、生物医学信号处理.