基于MV代数语义的格值逻辑的程度化方法

左卫兵
(华北水利水电大学数学与信息科学学院,河南郑州 450043)

摘 要: 基于MV代数(Many-Valued algebra)语义,通过在MV代数赋值格和全体命题集上分别建立概率测度,利用积分方法提出了一种格值逻辑上命题的概率真度.由此可诱导出命题集上的伪距离,进而在格值逻辑上建立了概率逻辑度量空间并展开程度化推理.本文将计量逻辑学中近似推理方法推广到格值逻辑上,为格值逻辑的程度化提供了一种可行的方法.

关键词: MV代数; 格值逻辑; 概率真度; 概率逻辑度量空间; 近似推理
中图分类号: O141.1; O189.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2013) 10-2035-07
电子学报 URL: http://www.ejournal.org.cn **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2013.10.026

Graded Method of Lattice-Valued Logic Based on MV-Algebra Semantics

ZUO Wei-bing
(*Department of Mathematics and Information Science, North China Vniversity of Water Resources and Electric Power, Zhengzhou, Henan*450046, *China*)

Abstract: Based on the notion of MV-algebra semantics, probability measure is set up in MV-algebra evaluation lattice and set of all propositions, and a probability truth degree of propositions in lattice-valued logic is proposed with integral. Thus pseudo-metric in set of all propositions is induced, probability logic metric space is established in lattice-valued logic, and graded reasoning is developed. In summary, approximate reasoning method in quantitative logic is expanded to lattice-valued logic, and it is feasible in graded in lattice-valued logic.

Key words: MV-algebra; lattice-valued logic; probability truth degree; probability logic metric space; approximate reasoning

1 引言

如何将数值计算的思想融入到数理逻辑中来,使数理逻辑的符号化与计算数学的数值计算、近似求解联系起来,使形式化的数理逻辑具有灵活性并扩大其应用范围,这是长期以来许多学者探讨的问题.早在上世纪50年代,Rosser与Turquette就提出了用“指派真值”来反映逻辑公式和逻辑推理的真确度的方法[1].70年代末Pavelka在他的系列文章[2]中对几乎所有的概念进行了程度化研究.90年代以来逻辑概念程度化的研究有了进一步发展,取得了许多成果[3~10],其中文献[4]基于均匀概率的思想首先提出了命题逻辑系统中公式的真度概念和逻辑度量空间理论,逐步形成了计量逻辑学[10,11],为逻辑系统的程度化推理提供了新方法,并引发了大量后续研究[12-15].

我们知道,经典逻辑、多值逻辑和模糊逻辑系统的赋值域均是线性格即链,链中任何元素均可比较大小(在偏序意义下),这样的逻辑系统自然有其优越性,但也表现出与现实中赋值存在不可比较性相悖的缺点.事实上,以格为赋值集的逻辑系统早已有之[11],文献[16,17]研究了基于格蕴涵代数的格值逻辑上的推理理论.如何在一般的格值逻辑系统中进行逻辑概念的程度化研究,目前文献涉及较少,其中文献[18~20]研究了以有限Boole代数为赋值格的格值逻辑的程度化方法,文献[21]通过积分方法在一般Boole语义上实现了程度化描述.受文献[22]的启发并作为上述工作的继续,通过在MV代数[23]赋值格和全体公式集上分别建立概率测度,利用积分方法提出了一种基于MV代数语义的格值逻辑上公式的概率真度,进而在格值逻辑上建立了概率逻辑度量空间,将计量逻辑学中近似推理方法推广到格值逻辑上,为格值逻辑的程度化提供了一种可行的方法.

收稿日期:2012-09-20;修回日期:2012-12-21;责任编辑:覃怀银
基金项目:河南省自然科学基金(No.112300410040);河南省教育厅自然科学基金(No.2011A110012,No.13A110719);河南省高等学校青年骨干教师资助计划(No.2011GGJS-097)

2 MV 代数语义中公式的概率真度

定义 1[23] MV 代数是一个(2,1,0)型代数$(X,\oplus,',0)$满足条件:

(1)$(X,\oplus,0)$是以 0 为单位的交换半群,

(2)$x\oplus 0'=0'$,

(3)$x''=x$,

(4)$(x'\oplus y)'\oplus y=(y'\oplus x)'\oplus x$.

设$(X,\oplus,',0)$是 MV 代数,记$0'=1$,规定$x\leqslant y$当且仅当$x'\oplus y=1$,则$(X,\leqslant)$是一个分配格,记$x\vee y=(x'\oplus y)'\oplus y$, $x\wedge y=(x'\vee y')'$, $x\otimes y=(x'\oplus y')'$, $x\rightarrow y=x'\oplus y$,则$(\otimes,\rightarrow)$构成伴随对.

以下恒设 M 是 MV 代数,$[0,1]_{\mathrm{MV}}$是标准 MV 代数,用 Θ 表示从 M 到$[0,1]_{\mathrm{MV}}$的全体同态之集.显然,$\Theta\neq\phi$,且$\forall f\in\Theta$满足$f(x\oplus y)=f(x)\oplus f(y)=(f(x)+f(y))\wedge 1$, $f(x')=1-f(x)$.

设$(\Theta,\mathscr{A},\theta)$是均匀概率测度空间,这里(是 Θ 上的σ-代数,θ 是Θ 上的均匀概率测度. $\forall x\in M$,定义函数 $x(f)=f(x)$, $f\in\Theta$,则函数 x 是$(\Theta,\mathscr{A},\theta)$上的可测函数,从而函数 x 是Θ 上的θ-可积函数[24].

定义 2 定义 $\phi:M\rightarrow[0,1]$如下:$\phi(x)=\int_{\Theta}x(f)\mathrm{d}\theta$, $x\in M$.则称 $\phi(x)$为 x 的特征数.

例 1 (1)考虑菱形格 M_2,即 $M_2=\{0,a,b,1\}$,其中$a'=b$, $b'=a$, $0'=1$, $1'=0$, $a\vee b=1$, $a\wedge b=0$,则 M_2 是 Boole 代数,从而 M_2 是 MV 代数.易证 $\Theta=\{f_1,f_2\}$,其中$f_1(a)=f_2(b)=1$, $f_1(b)=f_2(a)=0$, $f_i(0)=0$, $f_i(1)=1$, $i=1,2$.由 θ 是 Θ 上的均匀概率测度知,$\theta(f_1)=\theta(f_2)=\frac{1}{2}$,计算得 $\phi(0)=0$, $\phi(1)=1$, $\phi(a)=\phi(b)=\frac{1}{2}$.

(2)设 M 是任一 Boole 代数,由文献[22]知 $\Theta=\{f\mid f:M\rightarrow\{0,1\}$是 Boole 同态$\}$,从而对于 Boole 代数 M 中的元素x,本文定义的 x 的特征数与文[21]中 Boole 语义下定义的 x 的特征数是相等的.

(3)设 M 是标准 MV 代数,由于 $\Theta=\{f\}$,其中 $f(x)=x$, $x\in[0,1]$[22],从而$\forall x\in[0,1]$有 $\phi(x)=f(x)=x$.说明特征数的概念是数的概念在 MV 代数上的推广.

命题 1 (1)$0\leqslant\phi(x)\leqslant 1$, $x\in M$,

(2)$\phi(1_M)=1$, $\phi(0_M)=0$,这里 1_M 和 0_M 分别表示 M 的最大元和最小元,

(3)$\phi(x')=1-\phi(x)$,

(4)若 $x\leqslant y$,则 $\phi(x)\leqslant\phi(y)$, $x,y\in M$,

(5)$\phi(x\vee y)=\phi(x)+\phi(y)-\phi(x\wedge y)$,

(6)$\phi(x\rightarrow y)=\phi(x\wedge y)-\phi(x)+1$,

(7)$\phi(x\oplus y)=\phi(x)+\phi(y)-\phi(x\otimes y)$,

(8)$\phi(x)+\phi(x\rightarrow y)=\phi(y)+\phi(y\rightarrow x)$.

证明 仅证(6),其余证明参见文[22]中命题 3 和命题 4 的证明及本命题之(6)类似可得.

(6)设$[0,1]_{\mathrm{MV}}$是标准 MV 代数,a、$b\in[0,1]$,则不难验证 $a\rightarrow b=(1-a+b)\wedge 1=a\wedge b-a+1$.所以$\forall x,y\in M$, $\forall f\in\Theta$,有 $x\rightarrow y(f)=f(x\rightarrow y)=f(x)\rightarrow f(y)=f(x)\wedge f(y)-f(x)+1=x\wedge y(f)-x(f)+1$.从而

$$\begin{aligned}&\phi(x\rightarrow y)\\&=\int_{\Theta}x\rightarrow y(f)\mathrm{d}\theta\\&=\int_{\Theta}(x\wedge y-x+1)(f)\mathrm{d}\theta\\&=\int_{\Theta}x\wedge y(f)\mathrm{d}\theta-\int_{\Theta}x(f)\mathrm{d}\theta+\int_{\Theta}1\mathrm{d}\theta\\&=\phi(x\wedge y)-\phi(x)+1.\end{aligned}$$

设 $S=\{q_1,q_2,\cdots\}$为原子公式集,$F(S)$是由 S 生成的$(\neg,\rightarrow)$型自由代数,称 $F(S)$中的元为命题(或公式).

定义 3 (1)设 M 是 MV 代数,则称$(\neg,\rightarrow)$型同态$\upsilon:F(S)\rightarrow M$ 为$F(S)$的 M-赋值,即 $\upsilon(\neg A)=\neg\upsilon(A)$, $\upsilon(A\rightarrow B)=\upsilon(A)\rightarrow\upsilon(B)$, $A,B\in F(S)$. $F(S)$的 M-赋值的全体之集记为Ω.

(2)设 $A\in F(S)$,若$\forall\upsilon\in\Omega$恒有$\upsilon(A)=1_M$,则称 A 为M-重言式;若$\forall\upsilon\in\Omega$恒有$\upsilon(A)=0_M$,则称 A 为 M-矛盾式.

由 $F(S)$是由 S 生成的自由代数知υ由它在S 上的限制所完全决定.

定义 4 $\forall A\in F(S)$,定义广义函数 $\bar{A}:\Omega\rightarrow M$ 如下$\bar{A}(\upsilon)=\upsilon(A)$, $\upsilon\in\Omega$.

设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$是概率测度空间,这里 $\mathscr{F}$ 满足:$\forall A\in F(S)$, $\phi(\bar{A})$是可测函数,即$(\bar{A}\circ\phi)^{-1}(B_{[0,1]})\subset\mathscr{F}$.其中$\phi(\cdot)$是特征数函数,$B_{[0,1]}$是单位区间$[0,1]$上的 Borel 集合系.则$\forall A\in F(S)$,函数 $\phi(\bar{A})$是 μ-可积的.

定义 5 $\forall A\in F(S)$,定义 $\tau:F(S)\rightarrow[0,1]$如下 $\tau(A)=\int_{\Omega}\varphi(\bar{A}(\upsilon))\mathrm{d}\mu$,称 $\tau(A)$为命题 A 的概率真度,又简称为 μ-真度.

注 当赋值格 M 是 Boole 代数时此定义即为文[18~21]中命题的概率真度的定义;当赋值格 M 是标准 MV 代数时,由例 1 的(3)知 $\tau(A)=\int_{\Omega}\phi(\bar{A}(\upsilon))\mathrm{d}\mu=\int_{\Omega}\bar{A}(\upsilon)\mathrm{d}\mu$,即为多值逻辑系统中命题的概率真度[25].

定理 1 设 $A,B\in F(S)$,则

(1)$0\leqslant\tau(A)\leqslant 1$, $\tau(\neg A)=1-\tau(A)$;

(2)A 是M-重言式当且仅当$\tau(A)=1$,A 是 M-矛盾式当且仅当$\tau(A)=0$;

(3)若$\vdash A\rightarrow B$,则 $\tau(A)\leqslant\tau(B)$;若 $A\approx B$,则 $\tau(A)$

$=\tau(B)$.

证明　由定义 5 易证.

定理 2　设 $A,B\in F(S)$,则

(1)$\tau(A\vee B)=\tau(A)+\tau(B)-\tau(A\wedge B)$,

(2)$\tau(A\to B)=\tau(A\wedge B)-\tau(A)+1$,

(3)$\tau(A\oplus B)+\tau(A\otimes B)=\tau(A)+\tau(B)$,

(4)$\tau(A)+\tau(A\to B)=\tau(B)+\tau(B\to A)$.

证明　仅证(1).(2)、(3)和(4)的证明类似可得.

(1)由命题 1 的(5),有 $\forall\upsilon\in\Omega,\phi(\overline{A\vee B}(\upsilon))=\phi(\bar{A}(\upsilon))+\phi(\bar{B}(\upsilon))-\phi(\overline{A\wedge B}(\upsilon))$,从而 $\tau(A\vee B)=\int_\Omega\phi(\overline{A\vee B}(\upsilon))\mathrm{d}\mu=\int_\Omega(\phi(\bar{A}(\upsilon))+\phi(\bar{B}(\upsilon))-\phi(\overline{A\wedge B}(\upsilon)))\mathrm{d}\mu=\tau(A)+\tau(B)-\tau(A\wedge B)$.

由定理 1 和定理 2 可得如下关于概率真度的两个推论:

推论 1　设 $A,B,C\in F(S)$,则

(1)$\tau(A\vee B)\geqslant\max\{\tau(A),\tau(B)\},\tau(A\wedge B)\leqslant\min\{\tau(A),\tau(B)\},\tau(A\to B)\geqslant\tau(B)$;

(2)$\tau(A\oplus B)=\tau(A)+\tau(\neg A\wedge B)=\tau(B)+\tau(\neg B\wedge A)\geqslant\max\{\tau(A),\tau(B)\}$,
$\tau(A\otimes B)=\tau(A)-\tau(\neg B\wedge A)=\tau(B)-\tau(\neg A\wedge B)\leqslant\min\{\tau(A),\tau(B)\}$;

(3)$\tau(A\oplus(B\vee C))=\tau((A\oplus B)\vee(A\oplus C)),\tau(A\oplus(B\wedge C))=\tau((A\oplus B)\wedge(A\oplus C))$,
$\tau(A\otimes(B\vee C))=\tau((A\otimes B)\vee(A\otimes C)),\tau(A\otimes(B\wedge C))=\tau((A\otimes B)\wedge(A\otimes C))$.

推论 2　设 $A,B,C\in F(S)$,则

(1)$\tau(A\to B\vee C)+\tau(A\to B\wedge C)=\tau(A\to B)+\tau(A\to C)$;

(2)$\tau(A\vee B\to C)+\tau(A\wedge B\to C)=\tau(A\to C)+\tau(B\to C)$;

(3)$\tau(A\vee B\to A\wedge B)=\tau(A\to B)+\tau(B\to A)-1$.

在 MV 代数语义中有相应于多值逻辑中程度化的 MP 规则、HS 规则和交推理规则.

定理 3　设 $A,B,C\in F(S),\alpha,\beta\in[0,1]$,则

(1)若 $\tau(A)\geqslant\alpha,\tau(A\to B)\geqslant\beta$,则 $\tau(B)\geqslant\alpha+\beta-1$,即 $\tau(B)\geqslant\tau(A)\otimes\tau(A\to B),\tau(A\to B)\leqslant\tau(A)\to\tau(B)$.

(2)若 $\tau(A\to B)\geqslant\alpha,\tau(B\to C)\geqslant\beta$,则 $\tau(A\to C)\geqslant\alpha+\beta-1$,即 $\tau(A\to C)\geqslant\tau(A\to B)\otimes\tau(B\to C)$.

(3)若 $\tau(A\to B)\geqslant\alpha,\tau(A\to C)\geqslant\beta$,则 $\tau(A\to B\wedge C)\geqslant\alpha+\beta-1$.

证明　(1)由定理 2 的(2)及推论 1 的(1)得 $\tau(A)+\tau(A\to B)-1=\tau(A\wedge B)\leqslant\tau(B)$,即 $\tau(B)\geqslant\alpha+\beta-1$.

(2)在 MV 代数中下式成立[23],$\forall a,b,c\in M,(a\to b)\to((b\to c)\to(a\to c))=1_M$.则 $\forall\upsilon\in\Omega$ 有下式成立:$\overline{(A\to B)\to((B\to C)\to(A\to C))}(\upsilon)=1_M$.从而 $\tau((A\to B)\to((B\to C)\to(A\to C)))=1$.所以由本定理的(1)得 $\tau(A\to C)\geqslant\tau(B\to C)+\tau((B\to C)\to(A\to C))-1\geqslant\tau(B\to C)+[\tau(A\to B)+\tau((A\to B)\to((B\to C)\to(A\to C)))-1]-1=\tau(B\to C)+\tau(A\to B)-1\geqslant\alpha+\beta-1$.

(3)由定理 2 的(2)及推论 1 的(1)得 $\tau(A\to B\wedge C)=\tau(A\wedge B\wedge C)-\tau(A)+1=\tau(A\wedge B)+\tau(A\wedge C)-\tau(A\wedge(B\vee C))-\tau(A)+1\geqslant\tau(A\wedge B)+\tau(A\wedge C)-2\tau(A)+1\geqslant\tau(A\to B)+\tau(A\to C)-1\geqslant\alpha+\beta-1$.

推论 3　(1)若 $\tau(A)=\tau(A\to B)=1$,则 $\tau(B)=1$;

(2)若 $\tau(A\to B)=\tau(B\to C)=1$,则 $\tau(A\to C)=1$;

(3)若 $\tau(A\to B)=\tau(A\to C)=1$,则 $\tau(A\to B\wedge C)=1$.

3　MV 代数语义上公式间的概率相似度

基于上述 MV 代数语义中概率真度的概念和性质,下面引入公式间的概率相似度.

定义 6　设 $A,B\in F(S)$,定义 $\xi_1:F(S)\times F(S)\to[0,1]$为 $\xi_1(A,B)=\tau((A\to B)\wedge(B\to A))$,称 $\xi_1(A,B)$为公式 A 与 B 之间的第一种概率相似度,简称 ξ_1-相似度.

定理 4　$\xi_1(A,B)=\tau(A\to B)+\tau(B\to A)-1=1-\tau(A\vee B)+\tau(A\wedge B),A,B\in F(S)$.

证明　$\xi_1(A,B)=\tau((A\to B)\wedge(B\to A))=\tau(A\to B)+\tau(B\to A)-\tau((A\to B)\vee(B\to A))$,因为$(A\to B)\vee(B\to A)$为 M-重言式,所以 $\xi_1(A,B)=\tau(A\to B)+\tau(B\to A)-1$.

由定理 2(2)得 $\xi_1(A,B)=\tau(A\to B)+\tau(B\to A)-1=\tau(A\wedge B)-\tau(A)+1+\tau(A\wedge B)-\tau(B)+1-1=2\tau(A\wedge B)-\tau(A)-\tau(B)+1=1-\tau(A\vee B)+\tau(A\wedge B)$.

定理 5　设 $A,B,C\in F(S)$,则

(1)$\xi_1(A,A)=1,\xi_1(A,B)=\xi_1(B,A),\xi_1(A,B)=1$ 当且仅当 $A\approx B$;

(2)$\xi_1(\neg A,\neg B)=\xi_1(A\vee B,A\wedge B)=\xi_1(A\to B,B\to A)=\xi_1(A,B)$;

(3)$\xi_1(A,C)\geqslant\xi_1(A,B)\otimes\xi_1(B,C)$.

证明　(1)、(2)易证,略去.

(3)由定理 4 及定理 3 的(2),得 $\xi_1(A,C)=\tau(A\to C)+\tau(C\to A)-1\geqslant[\tau(A\to B)+\tau(B\to C)-1]+[\tau(C\to B)+\tau(B\to A)-1]-1=[\tau(A\to B)+\tau(B\to A)-1]+[\tau(B\to C)+\tau(C\to B)-1]-1=\xi_1(A,B)+\xi_1(B,C)-1$,得证.

推论 4　设 $A,B\in F(S)$,则

(1)$\xi_1(A\vee B,A)=\tau(B\to A),\xi_1(A\wedge B,A)=\tau(A\to B)$;

(2)$\xi_1(A\to B,A)=\tau(B\vee A)$,$\xi_1(A\to B,A)\geqslant\tau(B\wedge A)$;

(3)$\xi_1(A\to B,A\wedge B)=\tau(A)$,$\xi_1(A\to B,A\vee B)\geqslant\tau(B)$.

推论 5 设 $A,B,C\in F(S)$,则

(1)$\xi_1(A\vee C,B\vee C)\geqslant\xi_1(A,B)$,$\xi_1(A\wedge C,B\wedge C)\geqslant\xi_1(A,B)$;

(2)$\xi_1(A\to C,B\to C)\geqslant\xi_1(A,B)$,$\xi_1(C\to A,C\to B)\geqslant\xi_1(A,B)$;

(3)$\xi_1(A\oplus C,B\oplus C)\geqslant\xi_1(A,B)$,$\xi_1(A\otimes C,B\otimes C)\geqslant\xi_1(A,B)$.

推论 6 设 $A,B,C\in F(S)$,则

(1)$\xi_1(A,B\wedge C)\geqslant\xi_1(A,B)+\xi_1(A,C)-1$;

(2)$\xi_1(A,B\vee C)\geqslant\xi_1(A,B)+\xi_1(A,C)-1$;

(3)$\xi_1(A\vee C,B\vee D)\geqslant\xi_1(A,B)+\xi_1(C,D)-1$;

(4)$\xi_1(A\to C,B\to D)\geqslant\xi_1(A,B)+\xi_1(C,D)-1$;

(5)$\xi_1(A\oplus C,B\oplus D)\geqslant\xi_1(A,B)+\xi_1(C,D)-1$;

(6)$\xi_1(A\otimes C,B\otimes D)\geqslant\xi_1(A,B)+\xi_1(C,D)-1$.

事实上,我们还可以定义如下两个形式简单的概率相似度.

定义 7 设 $A,B\in F(S)$,定义 $\xi_2(A,B)=\tau(A\to B)\wedge\tau(B\to A)$,$\xi_3(A,B)=(\tau(A)\to\tau(B))\wedge(\tau(B)\to\tau(A))$,称 $\xi_i(A,B)$为公式 A 与 B 之间的第 i 种概率相似度,简称 ξ_i-相似度,$i=2,3$.

定理 6 设 $A,B,C\in F(S)$,$i=2,3$,则

(1)$\xi_i(A,A)=1$,$\xi_i(A,B)=\xi_i(B,A)$,$\xi_i(A,B)=\xi_i(\neg A,\neg B)$;

(2)$\xi_2(A,B)=1$ 当且仅当 $A\approx B$;若 $A\approx B$ 则 $\xi_3(A,B)=1$,但反之不成立;

(3)$\xi_i(A,C)\geqslant\xi_i(A,B)\otimes\xi_i(B,C)$.

证明 (1)、(2)由定义 7 易证.

(3)对于 ξ_2,由定理 3 的(2)知,$\tau(A\to C)\geqslant\tau(A\to B)\otimes\tau(B\to C)$及 $\tau(C\to A)\geqslant\tau(C\to B)\otimes\tau(B\to A)=\tau(B\to A)\otimes\tau(C\to B)$,再由 MV 代数的基本性质得

$$\begin{aligned}\xi_2(A,C)&=\tau(A\to C)\wedge\tau(C\to A)\\&\geqslant(\tau(A\to B)\otimes\tau(B\to C))\wedge\tau((B\to A)\otimes\tau(C\to B))\\&=(\tau(A\to B)\wedge\tau(B\to A))\otimes(\tau(B\to C)\wedge\tau(C\to B))\\&=\xi_2(A,B)\otimes\xi_2(B,C).\end{aligned}$$

对于 ξ_3,由 MV 代数的基本性质知,$\tau(A)\to\tau(C)\geqslant(\tau(A)\to\tau(B))\otimes(\tau(B)\to\tau(C))$及 $\tau(C)\to\tau(A)\geqslant(\tau(C)\to\tau(B))\otimes(\tau(B)\to\tau(A))=(\tau(B)\to\tau(A))\otimes(\tau(C)\to\tau(B))$,所以

$$\begin{aligned}\xi_3(A,C)&=(\tau(A)\to\tau(B))\wedge(\tau(B)\to\tau(A))\\&\geqslant((\tau(A)\to\tau(B))\otimes(\tau(B)\to\tau(C)))\wedge((\tau(B)\to\tau(A))\otimes(\tau(C)\to\tau(B)))\\&=((\tau(A)\to\tau(B))\wedge(\tau(B)\to\tau(A)))\otimes((\tau(B)\to\tau(C))\wedge(\tau(C)\to\tau(B)))\\&=\xi_3(A,B)\otimes\xi_3(B,C).\end{aligned}$$

以上三种概率相似度有如下关系.

定理 7 设 $A,B\in F(S)$,则 $\xi_1(A,B)\leqslant\xi_2(A,B)\leqslant\xi_3(A,B)$.

证明 由定理 4 知,$\xi_1(A,B)=\tau(A\to B)+\tau(B\to A)-1\leqslant\tau(A\to B)$,又 $\xi_1(A,B)\leqslant\tau(B\to A)$,从而 $\xi_1(A,B)\leqslant\tau(A\to B)\wedge\tau(B\to A)=\xi_2(A,B)$.

由定理 3 的(1)知,$\tau(A\to B)\leqslant\tau(A)\to\tau(B)$,同样 $\tau(B\to A)\leqslant\tau(B)\to\tau(A)$. 所以,$\xi_2(A,B)=\tau(A\to B)\wedge\tau(B\to A)\leqslant(\tau(A)\to\tau(B))\wedge(\tau(B)\to\tau(A))=\xi_3(A,B)$.

更进一步有:

定理 8 设 $A,B\in F(S)$,则 $\xi_2(A,B)=\frac{1}{2}(\xi_1(A,B)+\xi_3(A,B))$.

证明 由定理 4 及定理 2 的(2),利用 $\alpha\wedge\beta=\frac{1}{2}((\alpha+\beta)-|\alpha-\beta|)$,$\alpha,\beta\in[0,1]$,有

$$\begin{aligned}2\xi_2(A,B)&=2\tau(A\to B)\wedge\tau(B\to A)\\&=(\tau(A\to B)+\tau(B\to A))-|\tau(A\to B)-\tau(B\to A)|\\&=(\tau(A\to B)+\tau(B\to A)-1)+1-|(\tau(A\wedge B)-\tau(A)+1)-(\tau(A\wedge B)-\tau(B)+1)|\\&=\xi_1(A,B)+1-|\tau(A)-\tau(B)|=\xi_1(A,B)+\xi_3(A,B).\end{aligned}$$

最后一步用到 $\xi_3(A,B)=(\tau(A)\to\tau(B))\wedge(\tau(B)\to\tau(A))=(1-\tau(A)+\tau(B))\wedge(1-\tau(B)+\tau(A))=1-|\tau(A)-\tau(B)|$.

4 MV 代数语义上的概率逻辑度量空间

基于 MV 代数语义上的概率相似度可自然地在 $F(S)$上引入逻辑伪度量.

定义 8 定义 $\rho_i:F(S)\times F(S)\to[0,1]$如下 $\rho_i(A,B)=1-\xi_i(A,B)$,$A,B\in F(S)$,$i=1,2,3$. 则由定理 5 和定理 6 知 ρ_i 是 $F(S)$上的伪度量,称$(F(S),\rho_i)$是 MV 代数语义上的第 i 种概率逻辑度量空间,简称 ρ_i-度量空间.

由前面的知识容易得到下面的定理.

定理 9 设 $A,B,C\in F(S)$,$i=1,2,3$,则

(1)$\rho_i(A,A)=0$,$0\leqslant\rho_i(A,B)\leqslant1$,$\rho_i(A,B)=\rho_i(B,A)$;

(2)$\rho_i(A,B)=\rho_i(\neg A,\neg B)$,$\rho_i(A,C)\leqslant\rho_i(A,B)$

$+\rho_i(B,C)$;

(3) $\rho_1(A,B)=\tau(A\vee B)-\tau(A\wedge B)=2-\tau(A\to B)-\tau(B\to A)$;

(4) $\rho_3(A,B)=\tau(A)\vee\tau(B)-\tau(A)\wedge\tau(B)=|\tau(A)-\tau(B)|$;

(5) $\rho_3(A,B)\leqslant\rho_2(A,B)\leqslant\rho_1(A,B)$, $\rho_2(A,B)=\frac{1}{2}(\rho_1(A,B)+\rho_3(A,B))$.

下面我们讨论逻辑运算 $\neg,\vee,\wedge,\to,\oplus,\otimes$ 等在随机逻辑度量空间 $(F(S),\rho_i)$ 上的一致连续性.

定理 10 随机逻辑度量空间 $(F(S),\rho_1)$ 上运算 $\neg,\vee,\wedge,\to,\oplus,\otimes$ 关于 ρ_1 都是一致连续的.

证明 设 $A,B,C,D\in F(S)$,由定义 8、定理 9 和推论 6 得: $\rho_1(\neg A,\neg B)=\rho_1(A,B)$, $\rho_1(A\vee C,B\vee D)\leqslant\rho_1(A,B)+\rho_1(C,D)$, $\rho_1(A\wedge C,B\wedge D)\leqslant\rho_1(A,B)+\rho_1(C,D)$, $\rho_1(A\to C,B\to D)\leqslant\rho_1(A,B)+\rho_1(C,D)$, $\rho_1(A\oplus C,B\oplus D)\leqslant\rho_1(A,B)+\rho_1(C,D)$, $\rho_1(A\otimes C,B\otimes D)\leqslant\rho_1(A,B)+\rho_1(C,D)$.

所以,若 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_1(A_n,A)=\lim\limits_{n\to\infty}\rho_1(B_n,B)=0$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_1(\neg A_n,\neg A)=\lim\limits_{n\to\infty}\rho_1(A_n\vee B_n,A\vee B)=\lim\limits_{n\to\infty}\rho_1(A_n\wedge B_n,A\wedge B)=\lim\limits_{n\to\infty}\rho_1(A_n\to B_n,A\to B)=\lim\limits_{n\to\infty}\rho_1(A_n\oplus B_n,A\oplus B)=\lim\limits_{n\to\infty}\rho_1(A_n\otimes B_n,A\otimes B)=0$.即运算 $\neg,\vee,\wedge,\to,\oplus,\otimes$ 关于 ρ_1 都是一致连续的.

定理 11 在 $F(S)$ 上 ρ_1 与 ρ_2 是等价的伪度量.

证明 因为 $\forall A,B\in F(S)$, $\rho_2(A,B)\leqslant\rho_1(A,B)$,为证 ρ_1 与 ρ_2 是等价的伪度量,只需证当 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_2(A_n,B_n)=0$ 时有 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_1(A_n,B_n)=0$.事实上,由定理 9(5)知 $\rho_3(A_n,B_n)\leqslant\rho_2(A_n,B_n)$,则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_3(A_n,B_n)=0$;又 $\rho_1(A_n,B_n)=2\rho_2(A_n,B_n)-\rho_3(A_n,B_n)$,从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_1(A_n,B_n)=0$.即在 $F(S)$ 上 ρ_1 与 ρ_2 是等价的伪度量.

推论 7 伪度量空间 $(F(S),\rho_2)$ 上运算 $\neg,\vee,\wedge,\to,\oplus,\otimes$ 关于 ρ_2 都是一致连续的.

定理 12 伪度量空间 $(F(S),\rho_3)$ 上运算 $\neg$ 是一致连续的,但 $\vee,\wedge,\to,\oplus,\otimes$ 关于 ρ_3 不连续.

证明 易证运算 $\neg$ 关于 ρ_3 是一致连续的.

举例说明 $\vee,\wedge,\to,\oplus,\otimes$ 关于 ρ_3 不连续.设 $M=[0,1]_{MV}$, μ 是均匀概率测度,令 $A=q_1,B=q_2,C=D=q_3$,可见 $\rho_3(A,C)=\rho_3(B,D)=0$,但 $\rho_3(A\vee B,C\vee D)=\rho_3(q_1\vee q_2,q_3)>0$, $\rho_3(A\wedge B,C\wedge D)=\rho_3(q_1\wedge q_2,q_3)>0$, $\rho_3(A\to B,C\to D)=\rho_3(q_1\to q_2,1_M)>0$,即 $\vee,\wedge,\to$ 关于 ρ_3 不连续;又令 $A=q_1,B=q_2,C=q_3,D=\neg q_3$ 有 $\rho_3(A,C)=\rho_3(B,D)=0$,但 $\rho_3(A\oplus B,C\oplus D)=\rho_3(q_1\oplus q_2,1_M)>0$, $\rho_3(A\otimes B,C\otimes D)=\rho_3(q_1\otimes q_2,0_M)>0$,从而 $\oplus,\otimes$ 关于 ρ_3 不连续.

下面初步研究 MV 代数语义中理论的发散度及近似推理理论.

定义 9 设 Γ 是 $F(S)$ 中的理论,即 $\Gamma\subset F(S)$,令 $\mathrm{div}_i(\Gamma)=\sup\{\rho_i(A,B)\mid A,B\in D(\Gamma)\}$,称 $\mathrm{div}_i(\Gamma)$ 为理论 Γ 的第 i 种概率发散度,简称 i-发散度, $i=1,2,3$.

定理 13 设 $\Gamma\subset F(S)$,则 $\mathrm{div}_1(\Gamma)=\mathrm{div}_2(\Gamma)=\mathrm{div}_3(\Gamma)=1-\inf\{\tau(B)\mid B\in D(\Gamma)\}$.

证明 设 $T=\{A\mid\tau(A)=1\}$ 为全体 M-重言式之集,对于 $\Gamma\subset F(S)$,若 $A\in T$ 则 $A\in D(\Gamma)$,从而 $\mathrm{div}_i(\Gamma)=\sup\{\rho_i(A,B)\mid A,B\in D(\Gamma)\}=\sup\{\rho_i(A,B)\mid A\in T,B\in D(\Gamma)\}$.所以,由定理 9 得

$$\begin{aligned}\mathrm{div}_1(\Gamma)&=\sup\{\rho_1(A,B)\mid A\in T,B\in D(\Gamma)\}=\sup\{\tau(A\vee B)-\tau(A\wedge B)\mid A\in T,B\in D(\Gamma)\}\\&=\sup\{1-\tau(B)\mid B\in D(\Gamma)\}=1-\inf\{\tau(B)\mid B\in D(\Gamma)\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{div}_3(\Gamma)&=\sup\{\rho_3(A,B)\mid A\in T,B\in D(\Gamma)\}=\sup\{|\tau(A)-\tau(B)|\mid A\in T,B\in D(\Gamma)\}\\&=\sup\{1-\tau(B)\mid B\in D(\Gamma)\}=1-\inf\{\tau(B)\mid B\in D(\Gamma)\}.\end{aligned}$$

即 $\mathrm{div}_1(\Gamma)=\mathrm{div}_3(\Gamma)=1-\inf\{\tau(B)\mid B\in D(\Gamma)\}$,再由定理 9(5)利用两边夹定理可得结论成立.

可见在三个 $(F(S),\rho_i)$ 上有相同的理论发散度,统一表示为 $\mathrm{div}(\Gamma)$.若 $\mathrm{div}(\Gamma)=1$,称 Γ 是全发散的.

定义 10 设 Γ 是 $F(S)$ 中的理论, $B\in F(S)$, $\varepsilon>0$.

(1)若 $\rho(B,D(\Gamma))=\inf\{\rho_1(A,B)\mid A\in D(\Gamma)\}<\varepsilon$,则称 B 为 Γ 的 I-型误差小于 ε 的结论,简记为 $B\in D_\varepsilon^1(\Gamma)$.

(2)若 $1-\sup\{\tau(A\to B)\mid A\in D(\Gamma)\}<\varepsilon$,则称 B 为 Γ 的 II-型误差小于 ε 的结论,简记为 $B\in D_\varepsilon^2(\Gamma)$.

(3)若 $\inf\{H(D(\Gamma),D(\Sigma))\mid\Sigma\subset F(S),\Sigma\vdash B\}<\varepsilon$,则称 B 为 Γ 的 III-型误差小于 ε 的结论,简记为 $B\in D_\varepsilon^3(\Gamma)$.这里 H 是 $P(F(S))-\{\phi\}$ 上的 Hausdroff 距离.

定理 14 设 Γ 是 $F(S)$ 中的理论, $A\in F(S)$, $\varepsilon>0$,则

(1) $A\in D_\varepsilon^1(\Gamma)$ 当且仅当 $A\in D_\varepsilon^2(\Gamma)$; (2)若 $A\in D_\varepsilon^3(\Gamma)$,则 $A\in D_\varepsilon^1(\Gamma)$, $A\in D_\varepsilon^2(\Gamma)$.

证明 (1)(必要性) 设 $A\in D_\varepsilon^1(\Gamma)$,由定义 10 的(1)知存在 $C\in D(\Gamma)$ 使得 $\rho_1(A,C)<\varepsilon$,又由 $\rho_1(A,C)=2-\tau(A\to C)-\tau(C\to A)\geqslant 1-\tau(C\to A)$,所以 $1-\sup\{\tau(B\to A)\mid B\in D(\Gamma)\}\leqslant 1-\tau(C\to A)<\varepsilon$.因此 $A\in D_\varepsilon^2(\Gamma)$.

(充分性) 设 $A\in D_\varepsilon^2(\Gamma)$,则存在 $C\in D(\Gamma)$ 使得 $1-\tau(C\to A)<\varepsilon$,由 $C\to(C\vee A)$ 为 M-重言式及 MP 规则可知 $C\vee A\in D(\Gamma)$.又 $\rho_1(A,C\vee A)=1-\tau(C\to A)$,所以 $\rho(A,D(\Gamma))\leqslant\rho_1(A,C\vee A)=1-\tau(C\to A)<\varepsilon$,得证.

(2)若 $A\in D_{\varepsilon}^{3}(\Gamma)$,则存在 $\Sigma_0\subset F(S)$使得 $\Sigma_0\vdash A$ 且 $H(D(\Gamma),D(\Sigma_0))<\varepsilon$,这时 $A\in D(\Sigma_0)$,所以 $\rho(A,D(\Gamma)\leqslant H(D(\Gamma),D(\Sigma_0))<\varepsilon$,即 $A\in D_{\varepsilon}^{1}(\Gamma)$.由(1)知后者也成立.

5 结束语

本文基于 M-赋值理论利用测度论和积分方法提出了 MV 代数赋值格命题逻辑中公式的概率真度,研究了 MV 代数语义上的计量逻辑学的有关性质,建立了基于 MV 代数语义的格值逻辑的近似推论模式.可以看到本文的方法具有一般性,对诸如以 R_0 代数、BL 代数等逻辑代数为赋值格的命题逻辑系统的程度化可类似研究,有关工作将另文讨论.

参考文献

[1] Rosser J B,Turquette A R.Many-valued Logics[M].Amsterdam:North-Holland,1952.

[2] Pavelka J.On fuzzy logic(Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ)[J].Zeitschr f Math logik u Grundlagen d Math,1979,25:45-52,119-134,447-464.

[3] Ying M S.A logic for approximate reasoning[J].Journal of Symbolic Logic,1994,59(3):830-837.

[4] Wang G J,Fu L,et al.Theory of truth degrees of propositions in two valued logic[J].Sci China Ser A-Math,2002,45(9):1106-1116.

[5] Wang G J,Leung Y.Integrated semantics and logic metric spaces[J].Fuzzy Set and Systems,2003,136(1):71-91.

[6] Li B J,Wang G J.Theory of truth degrees of formulas in Lukasiewicz n-valued propositional logic and a limit theorem[J].Sci China Ser F-Inf Sci,2005,48(6):727-736.

[7] Zhou H J,Wang G J,Zhou W.Consistency degrees of theories and methods of graded reasoning in n-valued R_0-logic (NM-logic)[J].International Journal of Approximate Reasoning,2006,43(2):117-132.

[8] Li J,Wang G J.Theory of truth degress of propositions in the logic system L_n^*[J].Sci China Ser F-Inf Sci,2006,49(4):471-483.

[9] Wang G J,Hui X J.Randomization of classical inference patterns and its application[J].Sci China Ser F-Inf Sci,2007,50(6):867-877.

[10] Wang G J,Zhou H J.Quantitative logic[J].Information Sciences,2009,179(3):226-247.

[11] Wang G J,Zhou H J.Introduction to Mathematical Logic and Resolution Principle[M].Beijing:Science Press,Oxford:Alpha Science International Limited,2009.

[12] 张东晓,李立峰.二值命题逻辑公式的语构程度化方法[J].电子学报,2008,36(2):325-330.
Zhang D X,Li L F.Syntactic graded method of two-valued propositional logic formulas[J].Acta Electronica Sinica,2008,36(2):325-330.(in Chinese)

[13] 罗敏霞,姚宁.L^* 系统中公式的语构程度化方法[J].电子学报,2011,39(2):424-428.
Luo M X,Yao N.Syntactic graded method of formulas in the system L^*[J].Acta Electronica Sinica,2011,39(2):424-428.(in Chinese)

[14] Zhou H J,Wang G J.Borel probabilistic and quantitative logic[J].Sci China Inf Sci,2011,54(9):1843-1854.

[15] 王国俊.一类一阶逻辑公式中的公理化真度理论及其应用[J].中国科学:信息科学,2012,42(5):648-662.

[16] 徐扬.格蕴涵代数[J].西南交通大学学报,1993,28(1):20-26.

[17] Xu Y,Qin K Y,Liu J.L-valued propositional logic L_{vpl}[J].Information Scicence,1999,114(1):205-235.

[18] 傅丽,宋建社.经典命题逻辑的 Boole 语义理论[J].模糊系统与数学,2007,21(2):46-52.
Fu L,Song J S.Theory of Boolean semantics of classical propositional logic[J].Fuzzy Systems and Mathematics,2007,21(2):46-52.(in Chinese)

[19] 段景瑶,王国俊.关于 Boole 语义的真度不变性定理[J].模糊系统与数学,2008,22(2):36-40.
Duan J Y,Wang G J.Invariable properties of truth degrees on Boolean semantics[J].Fuzzy Systems and Mathematics,2008,22(2):36-40.(in Chinese)

[20] 左卫兵,叶晓枫.有限 Boole 语义的随机化[J].兰州理工大学学报,2012,38(1):143-148.

[21] 左卫兵.Boole 语义的程度化方法[J].电子学报,2012,40(3):441-447.
Zuo W B.Graded method of Boolean semantics[J].Acta Electronica Sinica,2012,40(3):441-447.(in Chinese)

[22] 王国俊,周红军.MV 代数的度量化研究及其在 Lukasiewicz 命题逻辑中的应用[J].数学学报,2009,52(3):501-514.

[23] Chang C C.Algebraic analysis of many valued logics[J].Transactions of the American Mathematical Society,1958,88(2):467-490.

[24] Halmos P R.Measure Theory[M].New York:Springe-Verlag,1974.

[25] 左卫兵.多值逻辑系统中公式的 μ-真度理论[J].系统科学与数学,2011,31(7):879-892.

作者简介

左卫兵 男,1976 年 3 月出生于河南省内黄县.现为华北水利水电学院数学与信息科学学院副教授、硕士生导师.研究方向为不确定性推理.
E-mail:zuoweibing@ncwu.edu.cn