

最优结构元约束层叠滤波器分析与设计

孙圣和, 王 伟, 赵春晖

(哈尔滨工业大学自动化测试与控制系, 哈尔滨 150001)

摘 要: 在对信号阈值分解基础上, 利用结构化方法结合最优估计理论, 对最优结构元约束层叠滤波器进行建模和分析, 证明了最优结构元约束层叠滤波器实质是一类由多个极大/极小滤波单元组成的多级秩排序滤波器, 并给出基于层叠处理操作和多级秩排序操作的滤波器实现结构. 最后, 结合图像处理应用实例, 与其它传统多级秩排序滤波器进行了比较, 证明了本文滤波器的有效性.

关键词: 秩排序滤波器; 层叠滤波器; 结构元约束; 阈值分解

中图分类号: TN713 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2000) 02-0007-04

Analysis and Design of Optimal Stack Filter with Structural Elements Constrains

SUN Sheng-he, WANG Wei, ZHAO Chun-hui

(Dept. of Automatic Measurement and Control, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: Based on threshold decomposition, combined structural method and optimal estimate theory, optimal stack filter model with structural elements constrains is established and analyzed. It's proved that optimal stack filter with structural elements constrains is a class of multi level rank order filter only including Max and Min operations. And two kinds of algorithm structures based on stack processing operation and multi level rank order operation are proposed. At last, the kind of optimal filter's performance is compared with other traditional multi level rank order filters in image processing experiments, and its effectiveness is proven.

Key words: rank order filter; stack filter; structural elements constraints; threshold decomposition

1 引言

无论是通过电子系统采集信号还是在信道中传输信号, 信号都会发生一定形式的改变, 例如, 通过电子系统观测图像时, 可能会引入白高斯噪声, 或者由于使用了相关图像系统而引入了谱噪声. 有时, 也可能是有意改变原始信号, 例如, 为了在通信信道中传输信号, 要对信号进行压缩编码或调制. 无论信号因何种原因发生改变, 信号处理的首要任务都是要尽量恢复原始信号. 包括中值滤波、分离中值滤波、极大极小/中值滤波在内的许多秩排序滤波器在信号恢复方面都取得了广泛应用. 如在图像恢复过程中, 这些滤波器在滤除噪声的同时, 都可一定程度地保持或重建边缘等图像细节. 但为了尽可能减少原始信号和估计信号之间的误差, 多年来, 人们一直在致力于最优非线性滤波器的研究^[1].

层叠滤波器是一类新型非线性数字滤波器, 概括了排序统计滤波器和形态结构滤波器在内的所有非线性滤波器. 层叠滤波器的研究对非线性滤波器理论具有重要意义^[2]. 非线性滤波器的研究可分为两种方法: 结构化方法和估计方法. 前者通过定义结构元约束滤波窗来实现; 后者利用信号估计理论来实现. 目前, 利用结构化方法对层叠滤波器的研究已取得

一定进展^[3~5], 本文在此基础上, 通过将结构化方法和估计理论相结合, 对结构元约束下最优层叠滤波器进行了深入研究. 研究结果表明: 最优结构元约束层叠滤波器实质是一类由多个极大/极小滤波单元组成的多级秩排序滤波器. 从而, 为最优结构元约束非线性滤波器的设计提供了依据和途径.

2 层叠滤波器及最优化模型

设多值信号 $X(n)$ 为输入信号, $0 \leq X(n) \leq M$, 层叠滤波

过程可概括为
$$S_f(X(n)) = \sum_{m=1}^{M-1} [T^m(X(n))] \quad (1)$$

$T^m(\bullet)$ 代表阈值分解操作, 定义为

$$x^m(n) = T^m(X(n)) = \begin{cases} 1, & X(n) \geq m \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (2)$$

$1 \leq m \leq M-1$, f 为正布尔函数, 满足层叠性

$$f(X) \geq f(Y), \quad \text{if } X \geq Y \quad (3)$$

定义 1 输出结构元约束集 $\Delta 1$ 和 0 输出结构元约束集

$$\Delta 0 \text{ 为 } \Delta 1 = \left\{ \alpha_i(x): \alpha_i(x) = \prod_j x_j; f[\alpha_1(x)] = 1 \text{ if } \alpha_i(x) = 1 \right\} \quad (4)$$

$$\Delta 0 = \left\{ \beta_i(x): \beta_i(x) = \prod_j x_j; f[\beta_1(x)] = 0 \text{ if } \beta_i(x) = 1 \right\} \quad (5)$$

本文符号 Σ , Π 在二值域中分别代表 OR 和 AND 操作.

如图 1 所示, D_n , N_n 分别为原始信号和噪声信号, 观测信号为 $X(n)$, $S(\cdot)$ 代表层叠滤波, 设滤波窗 W 大小为 $N(N = 2K + 1)$, $Y(n)$ 为层叠滤波器输出信号, 建立最优结构元约束层叠滤波器模型如下

$$\text{Minimize } C(S_f) = E\left\{ \left| D(n) - S_f(X(n)) \right|^2 \right\} \quad (6)$$

$$\text{Constraints: } f(x_1) \geq f(x_2) \quad \text{if } x_1 \geq x_2 \quad (7)$$

$$\exists \alpha_i(x) \in \Delta 1, \beta_i(x) \in \Delta 0$$

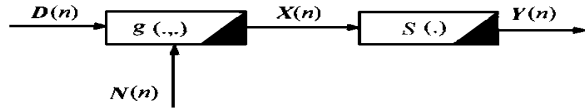


图 1 层叠滤波器最优模型

3 最优结构元约束层叠滤波器

设输入信号 $X(n)$ 独立同分布, 分布函数为 Φ_x , 概率密度函数为 ϕ_x , ϕ_x 对称, 层叠滤波器输出分布为 Φ_y , 由文献[5]得

$$\Phi_y = \Phi_{med} + \sum_{i=0}^K A_i (1 - \Phi_x)^{N-i} \Phi_x - \sum_{i=0}^K B_i (1 - \Phi_x)^i \Phi_x^{N-i} \quad (8)$$

$$A_i = |\{x | f^d(x) = 1, w_n(x) = i\}| \quad (9)$$

$$B_i = |\{x | f(x) = 1, w_n(x) = i\}| \quad (10)$$

中值滤波输出分布 $\Phi_{med} = \sum_{i=0}^K C_i^N (1 - \Phi_x)^i \Phi_x^{N-i}$, $w_H(x)$ 代表 x 的汉明加权, f^d 为 f 的对偶函数。

由式(8), 得滤波器输出 r 阶矩 α^r 为

$$\alpha^r = \alpha_{med}^r + \sum_{i=0}^K (A_i + B_i) M(N, \Phi_x, r, i) \quad (11)$$

推导过程参见附录, 其中

$$M(N, \Phi_x, r, i) = \int_{-\infty}^{\infty} (i - N\Phi_x(y)) (\Phi_x(y))^{i-1} \cdot (1 - \Phi_x(y))^{N-i-1} |y|^r \phi_x(y) dy \quad (12)$$

设输入信号由常信号加白噪声构成, 不失一般性, 令 $D(n) = 0$, 因 $M(N, \Phi_x, r, i) \geq 0$, $\alpha_{med}^r \geq 0$, 式(6)等价于使 $\sum_{i=0}^K (A_i + B_i)$ 最小, 根据 A_i, B_i 定义得^[5]

$$f(x) = \left[f_{med}(x) + \sum_{i=1}^p \alpha_i(x) \right] \prod_{i=1}^q \beta_i(x) \quad (13)$$

式中 $\alpha_i(x) \in \Delta 1$; $\beta_i(x) \in \Delta 0$; $p = |\Delta 1|$, $q = |\Delta 0|$.

进一步, 考查秩为 r 的秩排序滤波器

$$Y(n) = f_r(X(n) : X(n) \in W) \\ = \{X_r(n) : X_1(n) \leq \dots \leq X_r(n) \leq \dots \leq X_N(n)\} \quad (14)$$

设 $x(n)$ 为 $X(n)$ 的阈值分解信号, 则对应层叠滤波正布尔函数为

$$f_r(x(n)) = \{x_r(n) : x_1(n) \leq \dots \leq x_r(n) \leq \dots \leq x_N(n)\}$$

又 $x(n)$ 为二值信号, 因此

$$f_r(x(n)) = \begin{cases} 1, & \sum_{x(n) \in W} x(n) \geq r \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (15)$$

$$\text{即 } f_r(x(n)) = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_r \leq N} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r} \quad (16)$$

为使分析简化, 定义秩结构元集 Δr

$$\Delta r = \left\{ s_i(x) : s_i(x) = \prod_{j=1}^r x_{ij}; f_r[s_i(x)] = 1 \text{ if } s_i(x) = 1 \right\} \quad (17)$$

因秩为 r 的秩排序滤波器, $|\Delta r| = C_N^r$, 因此

$$f_r(x(n)) = \sum_{i=1}^{C_N^r} s_i(x) \quad (18)$$

当 $r = K + 1$ 时, 得中值滤波正布尔函数

$$f_{med}(x) = \sum_{i=1}^{C_{2K+1}^{K+1}} s_i(x) \quad (19)$$

代入式(13), 得到最优结构元约束层叠滤波器正布尔函数为

$$f(x) = \left[\sum_{i=1}^{C_{2K+1}^{K+1}} s_i(x) + \sum_{i=1}^p \alpha_i(x) \right] \prod_{i=1}^q \beta_i(x) \quad (20)$$

进一步, 由层叠滤波器定义式(1)得

$$S_f(X) = \sum_{m=1}^{M-1} \left[\left(\sum_{i=1}^{C_{2K+1}^{K+1}} s_i(x^m) + \sum_{i=1}^p \alpha_i(x^m) \right) \prod_{i=1}^q \beta_i(x^m) \right] \quad (21)$$

考虑到 f 为正布尔函数, 满足层叠性约束式(7), 得到式(21)的另一种等价表示为

$$S_f(X) = \text{Max} \left\{ m : \left(\sum_{i=1}^{C_{2K+1}^{K+1}} s_i(x^m) + \sum_{i=1}^p \alpha_i(x^m) \right) \prod_{i=1}^q \beta_i(x^m) = 1 \right\} \quad (22)$$

式(22)的优点在于滤波器具体实现时, 利用一个传输门即可省去式(21)中的 $M-1$ 个加法器。图 2 给出了基于层叠处理操作的最优结构元约束滤波器实现结构。

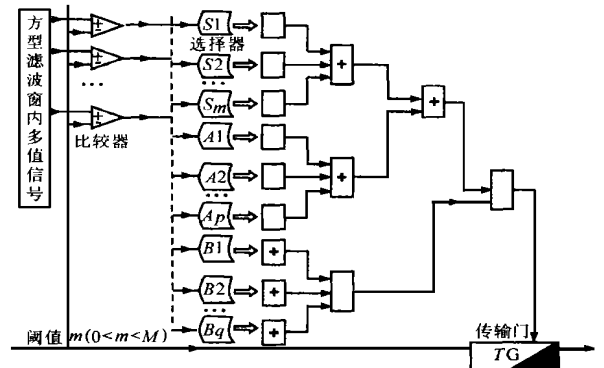


图 2 基于层叠处理操作的最优结构元约束滤波器

图 2 所示滤波器结构也称为阈值分解结构, 其优点是适合于并行处理, 尤其适用于 VLSI 硬件实现, 有关层叠滤波器的 VLSI 硬件实现可参见文献[6]。

若 $\alpha_i(x)$, $\beta_i(x)$, $s_i(x)$ 三种结构元中的元素组成的滤波窗分别用 A_i, B_i, S_i 表示, 称为结构元滤波窗。根据阈值分解定义和式(22), 用极大极小操作代替二值域中的 OR、AND 操作, 即可得到实域中最优结构元约束层叠滤波器表示式

$$S_f(X) = \text{MIN} \left\{ \text{MAX} \left\{ \text{MAX} \left\{ \text{MAX} \left\{ S_i \right\} \right\}, \text{MAX} \left\{ \text{MIN} \left\{ A_i \right\} \right\} \right\}, \text{MIN} \left\{ \text{MAX} \left\{ B_i \right\} \right\} \right\} \quad (23)$$

由此可见, 最优结构元约束层叠滤波器实质是一类由多

个极大/极小滤波单元组成的多级秩排序滤波器。

该结论不仅揭示了最优结构元约束层叠滤波器和秩排序滤波器的关系,而且为实域中最优多级秩排序滤波器的设计提供了答案,将最优多级秩排序滤波器的设计归结为最简单、最基本的极大极小运算单元组合,一旦选定结构元滤波窗,最优多级秩排序滤波器即可通过式(23)实现。

另外, A_i, B_i 也可使用同一类滤波窗,根据式(23),图3给出最优多级秩排序滤波器的实现结构。

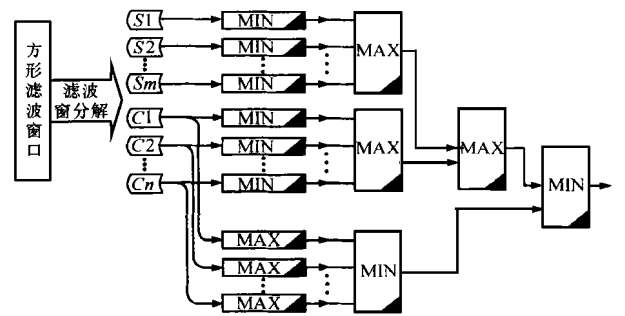


图3 基于秩排序操作的最优结构元约束滤波器

4 图像处理仿真实验

采用 256×256×8bi 的标准测试图“桥溪图”作为原始图

表 1 不同脉冲噪声强度下滤波器性能比较

		$p = 0.05$		$p = 0.125$		$p = 0.20$	
3×3 滤波窗	滤波类型	MSE	MAE	MSE	MAE	MSE	MAE
	中值滤波	316.8716	10.8931	353.8995	11.4769	1348.4183	19.1173
	极大极小/中值滤波	305.2548	10.4035	315.9914	11.3369	1270.2547	19.3514
	分离多级中值滤波	310.4563	10.0251	347.3054	11.2418	1210.1145	19.6679
5×5 滤波窗	本文滤波	<u>236.8097</u>	<u>8.7536</u>	<u>300.8630</u>	<u>9.5692</u>	1527.6704	21.1434
	中值滤波	476.4162	14.4065	497.5168	14.6886	659.5226	16.5438
	极大极小/中值滤波	400.2569	13.0447	412.0218	13.4522	667.2568	16.2235
	分离多级中值滤波	413.0865	11.5606	436.4825	12.1704	634.1112	16.1803
		276.4648	10.4574	393.3527	10.9468	<u>549.5780</u>	<u>15.1057</u>

表 2 不同高斯噪声强度下滤波器性能比较

		$u = 0, \sigma = 20$		$u = 0, \sigma = 30$		$u = 0, \sigma = 40$	
3×3 滤波窗	滤波类型	MSE	MAE	MSE	MAE	MSE	MAE
	中值滤波	460.9302	14.8312	662.9855	18.0552	977.0869	22.1685
	极大极小/中值滤波	454.2254	14.6771	655.0224	18.3661	1004.2154	22.0561
	分离多级中值滤波	449.1001	14.4165	711.4544	17.8915	1214.6501	22.4774
5×5 滤波窗	本文滤波	<u>415.9437</u>	<u>13.0734</u>	603.8871	17.0577	1090.4104	22.8489
	中值滤波	534.5461	16.4333	631.6392	18.2970	798.7756	20.9527
	极大极小/中值滤波	510.2447	16.3304	622.0205	18.5547	776.5447	21.7467
	分离多级中值滤波	506.2120	16.1079	630.2570	18.0616	785.0215	20.8670
		449.0287	14.4554	<u>571.5111</u>	<u>16.7142</u>	<u>768.9059</u>	<u>20.6975</u>

由表1、表2可见,无论对于脉冲噪声或是高斯噪声,本文滤波器总是可以保证MSE或MAE最小(如表中下划线部分所示),且滤波器性能明显优于其它类型滤波器。但值得注意的是,当滤波窗选取不当时,本文滤波器的滤波效果优势不明显,甚至低于其它滤波器。原因在于,对于最优结构元约束滤波器而言,随着噪声的增强,强噪声条件下很容易产生满足

像,从弱到强依次加入高斯白噪声和脉冲噪声,分别应用本文滤波器、中值滤波器、极大极小/中值滤波器和分离多级中值滤波器对噪声图像进行处理。

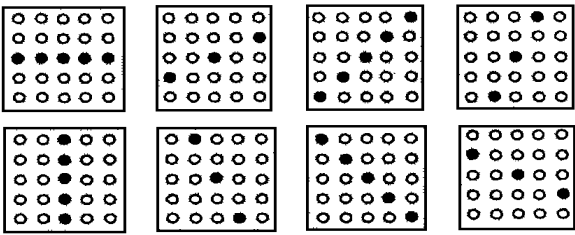


图 4 5×5 结构元滤波窗

实验使用 5×5 和 3×3 两种结构元滤波窗,如图4和图5所示。表1、表2列出了滤波器的性能指标。图6、图7是根据表1、表2绘出的滤波器性能坐标曲线,图中1、2、3、4分别代表中值滤波、极大极小中值滤波、分离中值滤波和最优结构元约束层叠滤波。

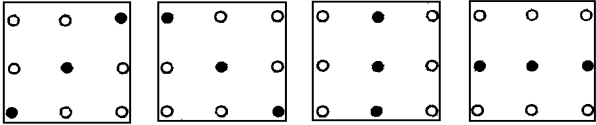


图 5 3×3 结构元滤波窗

小尺寸结构元约束的假边缘或伪线条,若不及时调整结构元滤波窗,而仍采用小尺寸结构元滤波窗去处理强噪声,噪声会很容易被保留下来。因此,对于某固定大小滤波窗而言,随着噪声的增强,最优结构元约束滤波器性能下降得比其它类型滤波器明显,从图6、图7即可看到这一点。

为克服这一缺点,一种方法是需要了解更加完善的图像

降质系统模型,从而确定合适的结构元滤波窗;另一种方法是

采用自适应算法来设计最优滤波器。

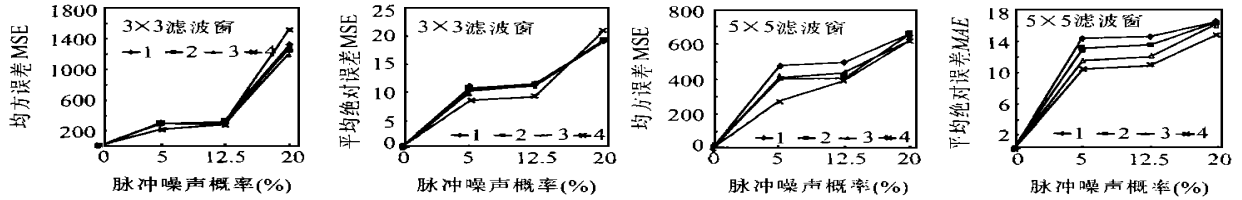


图6 不同脉冲噪声条件下滤波器性能比较

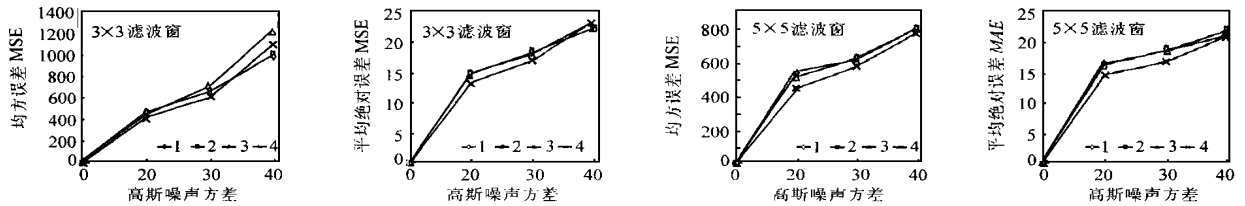


图7 不同高斯噪声条件下滤波器性能比较

5 总结

本文证明了最优结构元约束层叠滤波器实质是一类由极大、极小滤波单元组成的多级秩排序滤波器,为最优结构元约束层叠滤波器的设计提供了理论依据。理论和实验都表明,与其它多级秩排序滤波器相比,最优结构元约束层叠滤波器具有更好的滤波效果,尤其适用于图像处理等领域。

这类滤波器的弱点是对噪声变化较敏感,因此,如何选择适合不同噪声背景下的结构元滤波窗,将成为工作的重点。

附录 证明

因 $\Phi_Y = \Phi_{med} + \sum_{i=0}^K A_i (1 - \Phi_X)^{N-i} \Phi_X^i - \sum_{i=0}^K B_i (1 - \Phi_X)^i \Phi_X^{N-i}$ 为层叠滤波器输出分布,根据矩定义可得

$$\alpha^r = \alpha_{med}^r + \sum_{i=0}^K A_i M_1(N, \Phi_X, r, i) + B_i M_2(N, \Phi_X, r, i) \quad (A1)$$

α_{med}^r 代表中值滤波输出 r 阶矩,并且

$$M_1(N, \Phi_X, r, i) = \int_{-\infty}^{\infty} V_1(\Phi_X(y), i) |y|^r \Phi_X(y) dy \quad (A2)$$

$$M_2(N, \Phi_X, r, i) = - \int_{-\infty}^{\infty} V_2(\Phi_X(y), i) |y|^r \Phi_X(y) dy \quad (A3)$$

式中 $V_1(\Phi_X, i) = (i - N\Phi_X) \Phi_X^{i-1} (1 - \Phi_X)^{N-i-1}$ (A4)

$$V_2(\Phi_X, i) = (i - N(1 - \Phi_X)) \Phi_X^{N-i-1} (1 - \Phi_X)^{i-1} \quad (A5)$$

其中, $i = 1, \dots, K$, 并且 $r \geq 0$ 。

因概率密度函数 Φ_X 为对称函数,即 $\Phi_X(y) = \Phi_X(-y)$,因此

$$\Phi_X(y) = 1 - \Phi_X(-y) \quad (A6)$$

将式(A6)代入(A5)可得

$$V_2(\Phi_X(y), i) = V_1(\Phi_X(-y), i) \quad (A7)$$

式(A7)代入(A3),可得

$$M_1(N, \Phi_X, r, i) = M_2(N, \Phi_X, r, i) \quad (A7)$$

所以有

$$\alpha^r = \alpha_{med}^r + \sum_{i=0}^K (A_i + B_i) M(N, \Phi_X, r, i) \quad (A9)$$

其中 $M(N, \Phi_X, r, i) = \int_{-\infty}^{\infty} (i - N\Phi_X(y)) (\Phi_X(y))^{i-1} \cdot (1 - \Phi_X(y))^{N-i-1} |y|^r \Phi_X(y) dy$ 证毕。

参考文献

- [1] 陈贺新. 非线性滤波器与数字图像处理. 国防工业出版社, 1997
- [2] P. D. Wendt, E. J. Coyle, Gallagher. Stack filters. IEEE. Aug. 1986, ASSP 34(4): 898~911
- [3] Moncef Gabbouj. IEEE, June. 1990, ASSP 38(6): 955~968
- [4] P. Kuosmanen, J. Astola. Signal Processing, 1995, 41: 309~338
- [5] Lin Yin. IEEE, April. 1995, SP 43(4): 831~840
- [6] D. Akopian, O. Vainio, S. Agaian, and J. Astola. IEEE Trans. Signal Processing, June 1995, SP 43(6): 1541~1546



孙圣和 1937年生,哈尔滨工业大学自动化测试与控制系教授、博士生导师。国务院学科评议组成员。已发表学术论文100余篇,出版专著3部,并多次获国家级和省部级科技成果奖。研究方向为:计算机测试与控制,信号处理与系统辨识。



王伟 1970年生,哈尔滨工业大学自动测试与控制系博士生。研究方向为:计算机图像处理与模式识别,非线性滤波,已发表论文11篇。