

一种自适应全局最小平均 p -范数算法

冯大政, 常冬霞, 袁 莉

(西安电子科技大学雷达信号处理重点实验室, 陕西西安 710071)

摘 要: 本文给出了适应于 α 稳定噪声环境中自适应滤波和系统辨识的全局最小平均 p -范数算法, 其是总体最小二乘方法在脉冲噪声中的推广. 本文还定义了全局 l_p 模误差和推导了点到直线的 l_p 距离, 并在此基础上导出了全局最小平均 p -范数算法. 对所给算法进行了仿真实验研究, 结果显示其性能优于著名的 LMP 算法.

关键词: 自适应滤波; 系统辨识; α 稳定噪声; l_p 距离; TLMP 算法

中图分类号: TN957 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2001) 12A-1848-04

An Adaptive Total Least Mean p -Norm Algorithm Applied in α -Stable Noise Environments

FENG Da zheng, CHANG Dong-xia, YUAN Li

(Key Lab of Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China)

Abstract: This paper proposes a total least mean l_p -norm algorithm for adaptive filtering and system identification in α -stable noise environments, which is an extension of the total least mean squares algorithm. In the paper, both least l_p -norm error and the l_p -norm distance are defined. Computer simulations are presented to compare the relative performance of TLMP and LMP algorithms.

Key words: adaptive filtering; system identification; α stable noise; l_p -norm distant; TLMP algorithm

1 引言

在信号处理领域中, 人们通常将所研究的信号或噪声假定为高斯的, 由于高斯分布服从中心极限定理且其概率密度函数具有明确的解析式, 因此在处理时可方便的采用线性算法. 然而在现实物理世界中, 所遇到的噪声通常具有较强的冲击特性, 例如: 水下噪声, 低频大气噪声以及多种人类噪声, 当处理此类噪声时如果仍使用适用于高斯假设的系统优化, 则将产生性能的下降, 因此, 我们将采用 α -稳定分布来建模此类重拖尾非高斯脉冲噪声.

自从 α -稳定分布引入信号处理领域以来, 已经出现了多种自适应滤波方法^[1, 2, 5], 所有这些算法都可以归为最小均方 (LMS) 算法. 但是, 由于 α -稳定信号不存在有限的二阶和二阶以上矩^[6], 因此这些算法与传统的 LMS 算法并不完全相同, 这些算法用最小离差准则代替了传统的 LMS 算法中的最小二乘均方误差准则. 所谓的最小离差即使误差的 l_p 范数最小. 在最小 l_p 范数误差准则下, 很多学者作了许多研究工作, Shao 和 Nikias 首先提出了最小平均 l_p 范数 (LMP) 自适应算法^[3], 可以看作 LMS 算法的推广. 后来受正规化 LMS 算法的启发, Arikan 等. 又提出了正规化的最小平均 l_p 范数 (NLMP) 算法^[4], 其收敛速度较最小平均 l_p 范数算法有明显的提高.

但这两种算法具有与传统 LMS 算法相同的缺点, 即当自适应滤波器的输入是高污染时, 算法的收敛速度都很慢. 为了解决这个问题, 之后又提出了递归局部正交化 (RLO) 方法^[7], 对此有了较好的改进, 但它又具有其它的缺点, 例如需要误差和输入的统计特性先验已知. 因此, 我们仍需要寻找更好的方法.

最小 l_p ($1 \leq p \leq 2$) 范数估计已广泛应用于 α -稳定信号处理问题中. 给定一数据矩阵 A 和一数据向量 b , 求解超定方程 $Ax = b$, 通常的最小 l_p 范数估计方法只考虑数据向量 b 的噪声或误差是 α -稳定噪声. 然而, 在现实的信号处理中, 由于样本、模型、仪器等多方面原因都存在误差, 因此, 数据矩阵 A 也不可避免的存在噪声. 因此, 类似于高斯分布的噪声可以使用最小二乘方法的推广—总体最小二乘方法, 本文提出了一种新的总体最小 l_p 范数估计方法, 同时考虑 b 和 A 皆有 α -稳定噪声扰动. 总体最小 l_p 范数估计的收敛速度和性能较最小 l_p 范数估计有明显提高. 由于信号的冲激特性, 在估计过程中仍不可避免的会出现突跳点, 以及所得估计量的性能分析均有待进一步研究解决.

本文着重研究总体最小 l_p 范数在 α -稳定信号处理中的应用, 即研究当系统的输入和输出都存在加性 α -稳定噪声时自适应滤波器和系统辨识的最小 l_p 范数解.

2 总体最小 l_p 范数估计

考虑线性方程组:

$$Ax = b \quad (1)$$

的求解. 其中 A 是 $m \times n$ 维数据矩阵, x 是 $n \times 1$ 维参数向量, b 是 $m \times 1$ 维数据向量. 在参数估计等许多信号处理问题中, 通常研究 $m \geq n$ 的超定方程组.

总体最小 l_p 范数估计的思想可归纳为: 同时考虑 b 和 A 的扰动, 使扰动的 l_p 范数保持最小, 即在总体最小 l_p 范数估计中我们考虑的是矩阵方程:

$$(A + E)x = b + e \quad (2)$$

的求解. 显然, 上式可写为:

$$[D(A|b) + D(E|e)] \begin{bmatrix} x \\ - \end{bmatrix} = 0 \quad (3)$$

或

$$(DB + DT)Z = 0 \quad (4)$$

其中: $B = [A|b]$, $T = [E|e]$, $Z = \begin{bmatrix} x \\ - \end{bmatrix}$, D 为 $m \times m$ 维对角阵, 即: $D = \text{diag}(d_{11}, \dots, d_{mm})$, 因此, 求齐次方程(3)的总体最小 l_p 解等价于下面的优化问题, 即求解向量 x , 使得

$$\min_x \|DT\|_p \quad (5)$$

$$\text{s. t. } (b + e) \in \text{range}(A + E)$$

式中 $\|T\|_p$ 是矩阵 T 的 l_p 范数, 即:

$$\|T\|_p = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |t_{ij}^p| \right)^{1/p} \quad (6)$$

下面将给出总体最小 l_p 范数估计的几何解释及点到平面的 l_p 范数距离.

定义子空间 P_x

$$P_x = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \mid a \in \mathbf{R}^{n \times 1}, b \in \mathbf{R}, b = X^T a \right\} \quad (7)$$

我们先来求 $\begin{bmatrix} a_i \\ b_i \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n+1}$ 到 P_x 内的最近点的 l_p 范数意义上的距离 d_i , 它是所提自适应算法的出发点. d_i 定义为:

$$d_i = \min_{a, b} \left\| D \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right\|_p \quad (8)$$

$$\text{s. t. } b = a^T x$$

令:

$$\begin{bmatrix} a_i \\ b_i \end{bmatrix} = C_i, \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = C, \begin{bmatrix} x \\ -1 \end{bmatrix} = X \quad (9)$$

式(1)可以表示为:

$$C_i^T X = 0, i = 1, \dots, m \quad (10)$$

为了使问题简单, 不妨求距离 $|d_i|^p$, 则式(8)变为:

$$|d_i|^p = \min_c \|D(C_i - C)\|_p^p \quad (11)$$

$$\text{s. t. } C^T X = 0$$

由于 D 为对角阵, 则上式可写为分量形式

$$|d_i|^p = \min_{c_j} \left(\sum_{j=0}^{n+1} |d_{ij}(c_j - \bar{c}_j)|^p \right) \quad (12)$$

$$\text{s. t. } \sum_{j=1}^{n+1} \bar{c}_j x_j = 0$$

式(12)为一条件极值问题, 下面我们使用拉格朗日乘数法求 $|d_i|^p$, 取拉格朗日乘数为:

$$L(c, \lambda) = \sum_{j=1}^{n+1} |d_{ij}(c_j - \bar{c}_j)|^p + \lambda \sum_{j=1}^{n+1} \bar{c}_j x_j \quad (13)$$

令: $L(c, \lambda)$ 所有 \bar{c}_j 的导数为零得:

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{c}_j} = p \cdot |d_{ij}(\bar{c}_j - c_j)|^{p-1} \cdot d_{ij} \cdot \text{sign}[(\bar{c}_j - c_j)] + \lambda \bar{x}_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n+1 \quad (14)$$

即:

$$|d_{ij}(\bar{c}_j - c_j)|^{p-1} \cdot \text{sign}[d_{ij}(\bar{c}_j - c_j)] = \bar{\lambda}_{x_j} / (p \cdot d_{ij}), \quad j = 1, 2, \dots, n+1 \quad (15)$$

对式(15)两边取绝对值整理得:

$$|d_{ij}(\bar{c}_j - c_j)| = |\lambda|^{1/p-1} \cdot |\bar{x}_j|^{1/p-1} / p^{1/p-1} |d_{ij}|^{1/p-1}, \quad j = 1, 2, \dots, n+1 \quad (16)$$

利用符号函数的性质有:

$$\text{sign}[d_{ij}(\bar{c}_j - c_j)] = d_{ij}(\bar{c}_j - c_j) / |d_{ij}(\bar{c}_j - c_j)|, \quad j = 1, 2, \dots, n+1 \quad (17)$$

将式(17)代入式(15)得:

$$|d_{ij}(\bar{c}_j - c_j)|^{p-2} [d_{ij}(\bar{c}_j - c_j)] = -\bar{\lambda}_{x_j} / (p \cdot d_{ij}), \quad j = 1, 2, \dots, n+1 \quad (18)$$

由式(16)和式(18)得:

$$\begin{aligned} d_{ij}(\bar{c}_j - c_j) &= \bar{\lambda}_{x_j} / [p \cdot d_{ij} |d_{ij}(\bar{c}_j - c_j)|^{p-2}] \\ &= -p^{1/p-1} \bar{\lambda}_{x_j} |d_{ij}|^{p-2/p-1} d_{ij}^{-1} |\lambda|^{(1/p-1)-1} |\bar{x}_j|^{(1/p-1)-1} \end{aligned} \quad (19)$$

因而有:

$$\bar{c}_j = c_j - p^{(1/p-1)} \bar{\lambda}_{x_j} |d_{ij}|^{(p/p-1)} |\bar{x}_j|^{(1/p-1)-1} |\lambda|^{(1/p-1)-1} \quad (20)$$

又由 $\sum_{j=1}^{n+1} \bar{c}_j x_j = 0$, 将式(20)代入其中取绝对值, 得:

$$|\lambda|^{1/(p-1)} = p^{1/(p-1)} \left| \sum_{j=1}^{n+1} c_j \bar{x}_j \right| \left| \sum_{j=1}^{n+1} |d_{ij}|^{-p/(p-1)} |\bar{x}_j|^{p/(p-1)} \right|^{-1} \quad (21)$$

将式(21)代入式(15), 即得式(12)的解为:

$$\begin{aligned} |d_i|^p &= \min_{c_j} \sum_{j=1}^{n+1} |\bar{c}_j - c_j|^p \\ &= \left| \sum_{j=1}^{n+1} c_j \bar{x}_j \right|^p / \left(\sum_{j=1}^{n+1} |d_{ij}|^{-p/(p-1)} |\bar{x}_j|^{p/(p-1)} \right)^{p-1} \end{aligned} \quad (22)$$

式(23)用向量表示的等价形式为:

$$|d_i|^p = |C_i^T X| / |DX|_{p-1}^p \quad (23)$$

其中 $\bar{D} = D^{-1}$, 通常有如下形式

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$$

其中 I 是 $m \times m$ 单位矩阵, β 为一与输入输出噪声相关常数. 求得了 $|d_i|^p$, 下面我们就可以用子空间 P_x 表征总体最小 l_p 范数问题. 换言之, 总体最小 l_p 范数问题等价于求到 m 个二元组的 l_p 范数意义上最近子空间 P_x (P_x 由 x 决定), 使得点 $\begin{bmatrix} \hat{a}_i \\ \hat{b}_i \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n+1}$ 到 P_x 内的 l_p 范数距离的 p 次幂的和为最小, 此即为最小 l_p 范数问题的几何解释.

$$x_{\text{TLMP}} = \arg \min_x \sum_{i=1}^m |d_i|^p = \arg \min_x \sum_{i=1}^m |C_i^T X| / \|DX\|_{p/(p-1)}^p \quad (24)$$

3 FIR 自适应滤波的总体最小范数估计

给定一个具有有限脉冲响应的未知系统, 假设输入和输出皆有噪声, 则 FIR 自适应滤波依据系统的输入和输出估计系统的脉冲响应. 这种情况下脉冲响应的估计结构如图 1 所示

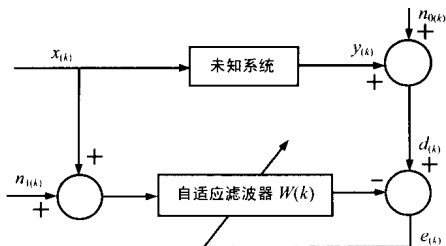


图 1 考虑输入向量存在噪声 $n_1(t)$ 的冲激响应估计结构图

假设未知系统的脉冲响应是 $N \times 1$ 向量:

$$h = [h_0, h_1, \dots, h_{N-1}]^T \quad (25)$$

h 可以是时变的, 但这里假设 h 是常量, 所谓期望信号由下式给出:

$$d(k) = X(k)^T h + n_{0(k)} \quad (26)$$

其中观测噪声 $n_{0(k)}$ 是参数为 $(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha_0, 0, 1)$ 的 α -稳定噪声, 且与输入噪声向量独立, 输入向量为:

$$X(k) = [x(k), x(k-1), \dots, x(k-N+1)] \quad (27)$$

由于未知系统的输入必须和期望信号一起采样和量化, 因此会产生宽带量化噪声污染自适应滤波器的输入, 而且外界干扰也会使输入产生噪声. 因此, 这里采用的信号模型更具一般性.

考虑下面的 FIR 系统辨识问题, 设有 N 个含有噪声的独立变量

$$r(k) = [x(k) + n_{1(k)}, x(k-1) + n_{1(k-1)}, \dots, x(k-N+1) + n_{1(k-N+1)}]^T \quad (28)$$

其中 $n_{1(k)}$ 是离差为 γ_1 的 SaS 稳定噪声, 且有一个含有噪声的非独立变量 $d(k)$. 因此, k 时刻的 $(N+1)$ 维增广观测数据矢量为:

$$\bar{r}(k) = [r(k)^T, d(k)]^T \quad (29)$$

$$h = [h_0, h_1, \dots, h_{N-1}]^T \quad (30)$$

是待寻找的递归参数, 定义 $N+1$ 维扩展阶权向量

$$W = [W^T w_N]^T \quad (31)$$

其中: $W = [w_0, w_1, \dots, w_{N-1}]^T$

FIR 系统辨识问题可表示为:

$$W^T \bar{r}(k) = 0, k = 1, 2, \dots, L \quad (32)$$

当 L 足够大时, 求解式(32)的总体最小 l_p 范数解即为求解如下随机优化问题

$$W = \arg \min_W \left\{ |W^T \bar{r}(k)|^p / \|W\|_{p/(p-1)}^p \right\} \quad (33)$$

$$\begin{bmatrix} W_{\text{TLNP}} \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{W}{w_N} \quad (34)$$

此处的加权矩阵 $D = I$, 即 $\beta = \alpha_0/\alpha_1 = 1$. 由此可得 FIR 模型

的最小 l_p 范数解 W_{TLMP} .

在高斯噪声情况下, 可取 $p = 2$. 此时总体最小 l_p 范数问题即为总体最小二乘解. 类似于总体最小二乘方法, 我们可以将总体最小 l_p 范数方法应用于 FIR 自适应滤波器中, 因此我们下面就来寻找优化问题式(33)的自适应算法. 问题式(33)等价于下面的约束极值问题

$$W = \arg \min_W \left\{ |W^T \bar{r}(k)|^p \right\} \quad (35)$$

$$\text{s.t.} \quad \|W\|_{p/(p-1)} = \delta$$

其中 δ 为任意常数.

为了给出 LMS 类的自适应算法, 取期望估计为仅依赖于当前数据的无记忆估计 $E[\cdot] = [\cdot]$, 则问题式(35)变为:

$$W = \arg \min_W |W^T \bar{r}(k)|^p \quad (36)$$

$$\text{s.t.} \quad \|W\|_{p/(p-1)} = \delta \quad (37)$$

利用随机梯度法求解式(36), 可得下面的自适应方程

$$W_{(k+1)} = W_{(k)} - \mu \cdot p |e(k)|^{p-2} \cdot e(k) \cdot \bar{r}(k) \quad (38)$$

由约束条件式(37)知, 每次迭代过程中权向量保持 $p/(p-1)$ 范数不变, 所以:

$$W_{(k)} = W_{(k)} / \|W_{(k)}\|_{p/(p-1)} \quad (39)$$

这样, 我们就可以得到一种基于总体最小 l_p 范数估计的 LMS 型自适应算法, 称之为总体最小平均 l_p 范数 (TLMP) 算法. 具体算法如下:

算法: (TLMP 自适应算法)

初始化: $W_{(0)} = [O, -1]^T$, 其中 O 为 $1 \times N$ 维行向量,

$e_{(0)} = W_{(0)}^T \bar{r}_{(0)}$, For $k = 1$ to L do

$$e(k) = W_{(k)}^T \bar{r}(k)$$

$$W_{(k+1)} = W_{(k)} - \mu \cdot p \cdot |e(k)|^{p-2} \cdot e(k) \cdot \bar{r}(k)$$

$$W_{(k)} = W_{(k)} / \|W_{(k)}\|_{p/(p-1)}$$

$$W_{\text{TLMP}} = -[\bar{w}_0, \dots, \bar{w}_{N-1}]^T / \bar{w}_N$$

其中 $\bar{w}_i, i = 0, \dots, N-1$ 为 W 的元素.

4 仿真结果

为比较 TLMP 和 LMP 自适应算法的性能, 考虑脉冲响应为

$$h = [-0.3, -0.9, 0.8, -0.7, 0.6]^T \quad (40)$$

的未知系统. 系统由高斯白噪声激励. 输入噪声和输出噪声分别是特征指数为 $\alpha_0 = 1.4$ 和 $\alpha_1 = 1.4$ 且离差 $\gamma_0 = \gamma_1 = 1$ 的 SaS 稳定分布噪声.

TLMP 算法和 LMP 算法中均取 $p = 1.2$. 图 2 图 3 和图 4 分别给出了不同信噪比时的学习曲线, 即估计的均方误差与迭代次数的关系图(所示曲线均为 20 次实验结果的平均).

5 结论

本文在最小 l_p 范数估计方法和总体最小二乘方法的基础上提出了一种新的估计方法的思想, 即总体最小 l_p 范数估计方法. 研究了此估计方法的几何意义并将其应用于 FIR 线性系统的自适应辨识问题, 给出了基于最小 l_p 范数估计的 TLMP 算法, 并通过仿真说明了 TLMP 算法的优越性. 本文仅

对 TLMP 算法作了初步研究, 对估计量的性能仍需要进一步 研究.

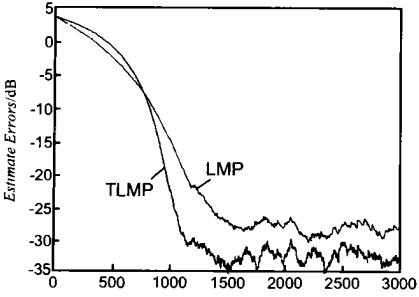


图2 TLMP 和 LMP 算法的性能比较
($SNR = 5\text{dB}$)

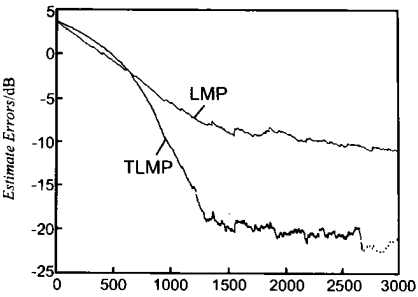


图3 TLMP 和 LMP 算法的性能比较
($SNR = 0\text{dB}$)

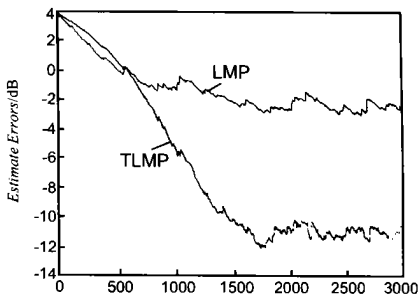


图4 TLMP 和 LMP 算法的性能比较
($SNR = -3\text{dB}$)

参考文献:

[1] O Arikan, M Belge, E Cetin, E Erzin. Adaptive filtering approaches for non Gaussian stable processes [A]. in Proc. ICASSP 95 [C], 1995, 2: 1400- 1403.

[2] G Aydin, O Tanrikulu, E Cetin. Robust least mean mixed norm adaptive filtering for α -stable random processes [A]. in Proc. IEEE ISCAS' 97 [C], 1997, 4: 2296- 2299.

[3] C L Nikias, M Shao. Signal Processing with Alpha- Stable Distribution and Applications [M]. New York: Wiley, 1995.

[4] O Arikan, A E Cetin, E Erzin. Adaptive filtering for non Gaussian Stable processes [J]. IEEE Signal Processing Letters, November 1994, 1 (11): 163- 165.

[5] J S Bodenschatz, C L Nikias. Recursive local orthogonality filtering [J]. IEEE Trans. Signal Processing, Jan. 1993, 45: 2293- 2300.

[6] M Shao, C L Nikias. Signal processing with fractional lower order moments stable processes and their application [A]. Proc. IEEE., July 1993, 81(7).

作者简介:



冯大政 男. 1959 年 12 月出生. 博士, 现为西安电子科技大学教授. 主要研究方向有: 信号处理, 智能信号处理和雷达成像.



常冬霞 女. 1977 年 12 月出生. 西安电子科技大学硕士研究生. 研究方向为自适应信号处理.

袁 莉 女. 1977 年 8 月出生. 西安电子科技大学博士研究生.