第 3 期 电 子 学 报 Vol.41 No.3
2013 年 3 月 ACTA ELECTRONICA SINICA Mar. 2013

分数阶微积分的一种物理解释和定域长分数阶微积分

张旭秀[1,2],邱天爽[2],盛 虎[1]
(1.大连交通大学电气信息学院,辽宁大连 116028;2.大连理工大学电子信息与电气工程学部,辽宁大连 116024)

摘 要: 本文讨论了现有的三种分数阶微积分基本定义(R-L(Riemann-Liouville)定义、G-L(Grumwald-Letnkov)定义和 Caputo 定义)对阶数的适用范围,以及三者之间的关系;强调指出分数阶导数与整数阶导数之间的区别.通过对分数阶微积分一个统一公式的讨论,以及给出分数阶微积分一个简单的物理解释,加深对分数阶微积分本质的认识;提出定域长分数阶微积分定义,给出它的直接数值算法,预期它可能在实践中得到应用.

关键词: 分数阶微积分 R-L 定义; 分数阶微积分 G-L 定义; 分数阶微积分 Caputo 定义; 分数阶微积分的物理解释; 定域长分数阶微积分

中图分类号: TP14 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2013)03-0508-05

电子学报 URL: http://www.ejournal.org.cn **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2013.03.015

A Physical Interpretation of Fractional Calculus and Fractional Calculus with Constant Extent of Integral

ZHANG Xu-xiu[1,2], QIU Tian-shuang[2], SHENG Hu[1]
(1. *School of Electronics and Information Engineering, Dalian Jiaotong University, Dalian, Liaoning* 116028, *China*;
2. *Faculty of Electronic Information and Electrical Engineering, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning* 116024, *China*)

Abstract: In this paper the order-range applied by fractional calculus R-L definition, G-L definition and Caputo definition along with the connections between above three definitions are discussed. The differences of fractional-order derivatives and integer-order derivatives are pointed out. An uniform formula of fractional-order integrals and derivatives along with a physical interpretation of fractional calculus are given. The definition of fractional calculus with constant extent of integral and its direct numerical value arithmetic are put forward, and its application is anticipated.

Key words: R-L definition of fractional calculus; G-L definition of fractional calculus; caputo definition of fractional calculus; physical interpretation of fractional calculus; fractional calculus with constant extent of integral

1 引言

分数阶微积分概念的提出已经有三百多年历史.在很长时期中,分数阶微积分一直是数学家们的话题.直到上世纪三十年代,分数阶微积分才首次得到应用.此后几十年来,随着科学技术的发展,特别是计算技术的进步,分数阶微积分走进了许多科学技术领域,得到了越来越广泛的应用.相应地,对分数阶微积分理论的研究也重新受到关注[1].

现在被公认的分数阶微积分基本定义有三种,即 R-L(Riemann-Liouville)定义、G-L (Grumwald-Letnikov) 定义以及 Caputo 定义[2~5].

现有文献中,对这三种定义适用的阶数范围以及它们之间的关系[6,7],有多种说法,其中不乏值得商榷之处;对分数阶微积分的物理解释和几何解释都比较抽象.本文对上述问题展开讨论;在此基础上,给出分数阶微积分一种简单的物理解释;最后,提出一种定域长分数阶微积分定义,给出它的直接数值算法,并预期它可能在实践中得到应用.

2 分数阶微积分三种定义及其相互关系

2.1 分数阶积分的 R-L 定义

收稿日期:2011-12-15;修回日期:2012-09-19
基金项目:国家自然科学基金(No.61003175/F020504, No.61201419);中国博士后科学基金(No.20080441121);辽宁省自然科学基金(No.20112015)

分数阶积分的 R-L 定义(以左下标 R 作标志)为

$$ {}_{\mathrm{R}}D_{0,x}^{-\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)\mathrm{d}t,\alpha\in\mathbf{R}^+ \tag{1}$$

因为这里的 α 可以取正实数(包括正整数),所以,确切地说,这是一种实数阶积分.特别是当 $\alpha=0$ 时,有

$$ {}_{\mathrm{R}}D_{0,x}^{0}f(x)=\frac{1}{\Gamma(0)}\int_0^x (x-t)^{-1}f(t)\mathrm{d}t=f(x) \tag{2}$$

2.2　分数阶导数 R-L 定义

分数阶导数的 R-L 定义(以左下标 R 作标志)是对函数分数阶积分取整数阶导数(导数阶数比积分阶数大 α),其表达式为

$$ {}_{\mathrm{R}}D_{0,x}^{\alpha}f(x)=D^n{}_{\mathrm{R}}D_{0,x}^{-(n-\alpha)}f(x),n\in N \tag{3}$$

其中,${}_{\mathrm{R}}D_{0,x}^{-(n-\alpha)}f(x)$是 $f(x)$的 R-L 定义$(n-\alpha)$阶积分.

下面考察式(3)适用的阶数范围:

(1)设 α 等于非整数ν,$n-1<\nu<n$,即 $n-1<\alpha<n,n\in N$.

因为整数阶微分算子的指数可以与其后面算子的指数相加,故此时有

$$ {}_{\mathrm{R}}D_{0,x}^{\alpha}f(x)=D^n{}_{\mathrm{R}}D_{0,x}^{-(n-\nu)}f(x)=D_{0,x}^{\nu}f(x)$$
$$=D_{0,x}^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_0^x (x-t)^{-\alpha-1}f(t)\mathrm{d}t \tag{4}$$

这里,ν 是非整数.由分数阶积分的 R-L 定义可以看出,在传统的分数阶微积分定义中,分数阶一词有时已被泛化成实数的代名词,为了避免混淆,本文把真正的分数称为非整数.式(4)中的 $D_{0,x}^{\alpha}f(x)$表示非整数阶导数,注意,它不带右下标 R,因为它不完全等同于分数阶导数 R-L 定义,而只是后者的一个特例,或者说是后者的一个子集.

(2)设 $\alpha=n-1$,代入式(3)并进行算子指数相加,则有

$$\begin{aligned} {}_{\mathrm{R}}D_{0,x}^{\alpha}f(x)&=D^n[D_{0,x}^{-(n-n+1)}f(x)]\\ &=D^n[D^{-1}f(x)]\\ &=D^{n-1}f(x)=f^{(n-1)}(x)\end{aligned} \tag{5}$$

设 $\alpha=n$,代入式(3)并进行算子指数相加,则有

$$\begin{aligned} {}_{\mathrm{R}}D_{0,x}^{\alpha}f(x)&=D^n[D_{0,x}^{-(n-n)}f(x)]\\ &=D^n[D^0f(x)]=D^nf(x)=f^{(n)}(x)\end{aligned} \tag{6}$$

综合上述,可得分数阶导数 R-L 定义适用的阶数范围是:

$$n-1<\alpha<n;$$

或者　$n-1\leqslant\alpha\leqslant n$,若 $f^{(n)}(x)$存在.

2.3　分数阶积分 G-L 定义

分数阶积分的 G-L 定义(以左下标 G 作标志)为

$$ {}_{\mathrm{G}}D_{0,x}^{-\alpha}f(x)=\lim_{h\to0^+}h^{\alpha}\sum_{k=0}^{\lfloor x/h\rfloor}\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha)}f(x-kh)$$
$$=\lim_{h\to0^+}h^{\alpha}\sum_{k=0}^{\lfloor x/h\rfloor}\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k-1)}{\Gamma(k+1)}f(x\text{-}kh)$$
$$=\lim_{h\to0^+}h^{\alpha}\sum_{k=0}^{\lfloor x/h\rfloor}\begin{bmatrix}\alpha\\k\end{bmatrix}f(x-kh),$$
$$n-1<\alpha<n,n\in\mathbf{N} \tag{7}$$

式中 0,$\lfloor x/h\rfloor$是 x/h 的最小整数商.

2.4　分数阶导数 G-L 定义

分数阶导数的 G-L 定义式为(以左下标 G 作标志)为

$$ {}_{\mathrm{G}}D_{0,x}^{\alpha}f(x)$$
$$=\lim_{h\to0^+}h^{-\alpha}\sum_{k=0}^{\lfloor x/h\rfloor}(-1)^k\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k+1)}\times f(x-kh)$$
$$=\lim_{h\to0^+}h^{-\alpha}\sum_{k=0}^{\lfloor x/h\rfloor}(-1)^k\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}\times f(x-kh)$$
$$=\lim_{h\to0^+}h^{-\alpha}\sum_{k=0}^{\lfloor x/h\rfloor}(-1)^k\binom{\alpha}{k}f(x-kh)$$
$$=\lim_{h\to0^+}h^{-\alpha}\sum_{k=0}^{\lfloor x/h\rfloor}\begin{bmatrix}-\alpha\\k\end{bmatrix}f(x-kh) \tag{8}$$

式(8)适用的阶数范围是 $n-1<\alpha<n,n\in\mathbf{N}$ 或者 $n-1\leqslant\alpha\leqslant n$,若 $f^{(n)}(x)$存在.

应当指出,式(8)取极限条件是 $h\to0^+$,而不是 $h\to0$(包括 $h\to0^+$ 和 $h\to0^-$).对于整数阶导数,取极限条件必须是 $h\to0$,其中,$h\to0^+$($h>0$,并趋于 0)时,是求左极限,$h\to0^-$($h<0$,并趋于 0)时,是求右极限.当且仅当左极限和右极限都存在并且相等时,整数阶导数才存在.

对于分数阶导数,由于 α 是非整数,只能取 $h\to0^+$($h>0$ 并趋于 0).这是分数阶导数与整数阶导数的区别之一.在现有的许多资料中,往往忽略了这一点,因而引出一些模糊概念.

如果整数阶导数 $f^{(n)}(x)$存在,则对于 $k=n-1,n-2,\cdots,1$,$f^{(k)}(x)$必然存在,根据上述,$f^{(n)}(x)$,$f^{(n-1)}(x)$,…对应的右极限必然存在而等于左极限,因此,若 $f^{(n)}(x)$存在,则式(8)适用于 $n-1\leqslant\alpha\leqslant n$.

2.5　分数阶积分的 Caputo 定义

分数阶积分的 Caputo 定义(以左下标 c 作标志)为

$$ {}_{\mathrm{c}}D_{0,x}^{-\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)\mathrm{d}t,$$
$$\mathrm{Re}(-\alpha)<0 \tag{9}$$

显然,如果不考虑复数阶,则式(9)与式(1)本质上是相同的,只是对阶数范围的表述形式不同而已.

2.6　分数阶导数 Caputo 定义

分数阶导数 Caputo 定义是对函数的整数阶导数取分数阶积分(积分阶数比导数阶数小 α),其定义式(以左下标 C 作标志)为

$$\begin{aligned} {}_{\mathrm{C}}D_{0,x}^{\alpha}f(x)&={}_{\mathrm{C}}D_{0,x}^{-(n-\alpha)}D^nf(x)\\ &=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(t)\mathrm{d}t,\\ &-1<\alpha\leqslant n\end{aligned} \tag{10}$$

与前面所有分数阶导数定义不同,式(10)要求 $f(x)$ 必须具有 n 阶导数.

当 $\alpha = n-1$ 时,式(10)右端变成 $f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0) \neq f^{(n-1)}(x)$,因此,式(10)不适用于 $\alpha = n-1$,除非 $f^{(n-1)}(0)=0$.

有些资料把分数阶导数的 Caputo 定义的适用范写成 $n-1<\alpha<n$,这是不全面的.

2.7 分数阶微积分三种定义之间的关系

综合上述可得:

(1)分数阶积分 R-L 定义与 Caputo 定义是等价的;

(2)分数阶积分 R-L 定义的非整数阶子集与分数阶积分 G-L 定义是等价的;

(3)分数阶导数 R-L 定义与 G-L 定义是等价的.

(4)分数阶导数 Caputo 定义同 R-L 定义及 G-L 定义不同,它与要求 $f^{(n)}(x)$ 必须存在.当且仅当在 $f^{(n)}(x)$ 存在,并且 $f^{(n-1)}(0)=0$ 时,分数阶导数 Caputo 定义同 R-L 定义及 G-L 定义等价.

3 分数阶微积分的本质

3.1 分数阶积分与导数的统一公式

综合式(1)和式(4),可以得出分数阶积分与导数的一个统一公式

$$D_{0,x}^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\,\mathrm{d}t \tag{11}$$

当 $\alpha \in \mathbf{R}^+$ 时,式(11)即式(1),表示实数阶积分;当 $n-1<-\alpha<n$,即当 $-n<\alpha<-(n-1)$,$n\in\mathbf{N}$ 时,式(11)与式(4)等价,表示非整数阶导数.式(11)对于 α 的适用范围如图 1 所示.

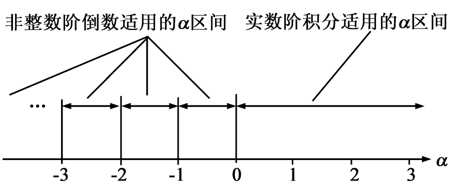

图1 公式(11)对α的适用区间

3.2 对分数阶微积分本质的认识

式(11)把实数阶积分与非整数阶导数统一在一个框架下,为我们从总体上认识分数阶微积分的本质,提供了有利条件.下面通过几个具体例子来说明这个问题.

例 1:设 $\alpha=1$,代入式(11),得

$$D_{0,x}^{-1} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1)} \int_0^x (x-t)^{1-1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \tag{12}$$

显然,这就是普通的上限为变量的定积分.

例 2:设 $\alpha=1.5$,代入式(11),得

$$D_{0,x}^{-1.5} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1.5)} \int_0^x (x-t)^{0.5} f(t)\,\mathrm{d}t \tag{13}$$

例 3:设 $\alpha=0.5$,代入式(11),得

$$D_{0,x}^{-0.5} f(x) = \frac{1}{\Gamma(0.5)} \int_0^x (x-t)^{-0.5} f(t)\,\mathrm{d}t \tag{14}$$

以上三个例子都属于实数阶积分.

例 4:设 $\alpha=-0.5$,代入式(11),得非整数阶导数

$$D_{0,x}^{0.5} f(x) = \frac{1}{\Gamma(-0.5)} \int_0^x (x-t)^{-1.5} f(t)\,\mathrm{d}t \tag{15}$$

由以上几个例子,我们可以得出以下几点认识:

(1)实数阶积分是一种加权积分.其中,一阶积分(即普通积分)是一个特例,其权值恒等于 1;阶数大于 1 时(例 2),积分变量距离积分上限越远,则对应的权值越大;相反,阶数小于 1 时(例 3),积分变量距离积分上限越远,则对应的权值越小.

(2)非整数阶导数也可以看作是一种加权积分,积分变量距离积分上限越远,则对应的权值越小(例 4).

3.3 分数阶微积分的一种物理解释

现有的关于分数阶微积分的物理解释比较抽象难懂.本文给出一种比较简单的物理解释如下:

重写分数阶积分公式(1)如下:

$$_{\mathrm{R}}D_{0,x}^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\,\mathrm{d}t \tag{16}$$

可以看出,上式中的积分式是 $f(x)$ 与 $x^{\alpha-1}$ 的卷积分,根据卷积分性质,该式也可以改写成

$$_{\mathrm{R}}D_{0,x}^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x t^{\alpha-1} f(x-t)\,\mathrm{d}t \tag{17}$$

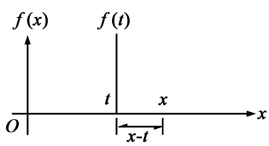

图2 分数阶积分公式(16)物理解释

就图 2 来看,若把 $f(x)$ 假想为作用在横轴单位长度上的力,则式(16)的被积函数相当于在横轴上 t 点处的力元 $f(t)\,\mathrm{d}t$ 对 x 点产生的力矩,其力臂长度等于 $(x-t)^{\alpha-1}$,积分结果相当于区间段$[0,x]$上所有的力对 x 点产生的总力矩,再除以 $\Gamma(\alpha)$,则得到以 $\Gamma(\alpha)$ 为力臂长度的等效力.

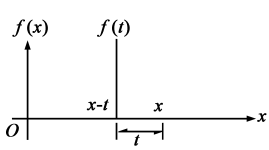

图3 分数阶积分公式(17)物理解释

就图 3 来看,式(17)的被积函数相当于在横轴上 $x-t$ 点处的力元 $f(x-t)\,\mathrm{d}t$ 对 x 点产生的力矩,其力臂长度等于 $t^{\alpha-1}$,积分结果相当于区间段$[x,0]$上所有的力对 x 点产生的总力矩,与按(16)积分结果相等,再除

以 $\Gamma(\alpha)$,则得到以 $\Gamma(\alpha)$为力臂长度的等效力.

类似思想也适用于非整数阶导数,只是力臂长度要分别换成$(x-t)^{-\alpha-1}$、$t^{-\alpha-1}$以及 $\Gamma(-\alpha)$.

4　定域长分数阶微积分

4.1　定域长分数阶微积分定义

前面讨论的分数阶微积分公式,其积分域(积分区间)长度等于 $x-0=x$,它随着自变量 x 的增大而加长.

本文提出一种积分域长(积分区间长度)保持不变(等于给定值)的分数阶微积分—定域长分数阶微积分.定域长分数阶积分定义为

$$D_B^{-\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x-B}^{x}t^{\alpha-1}f(x-t)\mathrm{d}t$$

$$x\geqslant B,\alpha\in\mathbf{R}^{+}\tag{18}$$

式中,常数 B 表示积分域长,其大小根据需要设置.

把式(18)中的 α 换成 $-\alpha$,便得到定域长非整数阶导数定义

$$D_B^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_{x-B}^{x}(x-t)^{-\alpha-1}f(t)\mathrm{d}t$$

$$x\geqslant B,\alpha\in F^{+}\tag{19}$$

预期这种定域长分数阶微积分可能找到应用,譬如,能否用定域长非整数阶积分滤波器,合成具有局部相关/记忆特性的随机信号,就是一个值得进一步探讨的问题.

4.2　定域长分数阶微积分的另一种表达形式

对式(18)做变量代换,令 $x-t=\tau$,则 $\mathrm{d}t=-\mathrm{d}\tau$,积分下限 $t=x-B$ 对应于 $\tau=B$,积分上限 $t=x$ 对应于 $\tau=0$,于是,式(18)可改写成另一种表达形式

$$D_B^{-\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{B}\tau^{\alpha-1}f(x-\tau)\mathrm{d}\tau,$$

$$x\geqslant B,\alpha\in\mathbf{R}^{+}$$

把积分变量 τ 换成 t,则有

$$D_B^{-\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{B}t^{\alpha-1}f(x-t)\mathrm{d}t$$

$$x\geqslant B,\alpha\in\mathbf{R}^{+}\tag{20}$$

式(20)与式(17)相似,只是积分上限不同.如果令式(18)的积分下限 $x-B=0$,(此时,式(18)已经不是定域长分数阶积分了),则 $B=x$,式(20)的积分上限可以改成 x,于是,式(20)便与式(17)完全相同了.有趣的是,式(20)的积分上限虽然是常数,但由于被积函数中含有非积分变量 x,所以积分结果仍然是 x 的函数.

同理,式(19)可改写成另一种表达形式

$$D_B^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_{0}^{B}t^{-\alpha-1}f(x-t)\mathrm{d}t\tag{21}$$

$$x\geqslant B,\alpha\in F^{+}$$

4.3　定域长分数阶微积分的一种物理解释

前面提出的分数阶微积分物理解释,也适用于定域长分数阶微积分.式(18)的物理解释如图 4 所示,积分变量 t 从 $x-B$ 变到 x.与式(18)等价的式(20),其物理解释如图 5 所示,积分变量 t 从 0(x 点处)变到 B($x-B$ 点处).可见按以上两式积分结果完全相同.除了积分区间不同以外,具体物理解释与 3.3 节完全相同.

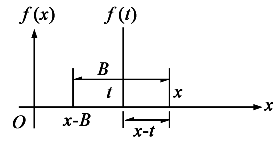

图4　定域长分数阶积分公式(18)物理解释

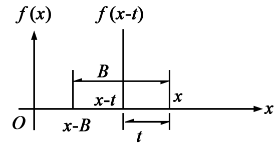

图5　定域长分数阶积分公式(20)物理解释

4.4　定域长分数阶微积分的极限形式表达式

可以证明,与式(20)对应的定域长非整数阶积分极限形式表达式为

$$D_B^{-\alpha}f(x)\big|_{x=uh}=\lim_{h\to0^{+}}h^{\alpha}\sum_{k=0}^{b}\begin{bmatrix}\alpha\\k\end{bmatrix}f(x-kh)$$

$$u\geqslant b,\alpha\in F^{+}\tag{22}$$

式中,$b=\lfloor B/h\rfloor$是 B/h 的最小商.

注意,式(20)(以及式(18))既适用于整数阶,也适用于非整数阶,沿用传统的说法,仍称其为定域长分数阶积分.但式(22)仅适用于非整数阶,为了避免混淆,称其为定域长非整数阶积分.

与式(21)对应的定域长非整数阶导数极限形式表达式为

$$D_B^{\alpha}f(x)\big|_{x=uh}=\lim_{h\to0^{+}}h^{\alpha}\sum_{k=0}^{b}\begin{bmatrix}-\alpha\\k\end{bmatrix}f(x-kh)$$

$$u\geqslant b,\alpha\in F^{+}\tag{23}$$

4.5　定域长非整数阶微积分的直接数值算法

同其它分数阶微积分定义一样,定域长非整数阶微积分的极限形式表达式可以用于直接数值计算.下面以公式(23)为例,讨论定域长非整数阶导数的直接数值算法.

实际计算时,选定一个很小的步长 h 之后,使用公式(23)的近似式

$$D_B^{\alpha}f(x)\big|_{x=uh}\approx h^{\alpha}\sum_{k=0}^{b}\begin{bmatrix}-\alpha\\k\end{bmatrix}f(uh-kh)$$

$$u\geqslant b,\alpha\in F^{+}\tag{24}$$

式中的求和项系数可以展开为

$$\begin{bmatrix}-\alpha\\k\end{bmatrix}=\frac{-\alpha(-\alpha+1)(-\alpha+2)\cdots(-\alpha+k-1)}{k!}\tag{25}$$

如果记$\begin{bmatrix} -\alpha \\ k \end{bmatrix} = W_k^{(\alpha)}$,则由式(25)可以导出递推公式:

$$W_0^{(\alpha)} = 1;$$

$$W_k^{(\alpha)} = W_{k-1}^{(\alpha)}\left(1 - \frac{\alpha+1}{k}\right), k = 1,2,\cdots,b \tag{26}$$

初始化时,计算出 h^α,利用式(26)把求和系数全部算出;以后,x 每增加一个步长,只须重新计算各 $f(uh - kh)$值.而通常的非整数阶导数,x 每增加一个步长,递推公式(26)中,k 的上限也要加 1,即要再计算一个求和项系数.

只要把式(24)~(26)中的 α 换成 $-\alpha$,便得到定域长非整数阶积分的直接数值算法.

5 结论

综上,本文有以下结论:

(1)分析了分数阶微积分三种基本定义,即 R-L 定义、G-L 定义和 Caputo 定义适用的阶数范围,以及它们之间的等价关系(及其条件).由于分数阶概念有时已经被泛化成实数阶,为了避免混淆,在必要时,应采用‘非整数阶’表示真正的分数阶.

(2)强调指出非整数阶导数与整数阶导数的两点区别:①非整数阶导数的极限形式表表达式,其取极限的条件是 $h \to 0^+$,而整数阶导数,其取极限的条件是 $h \to 0$(包含 $h \to 0^+$ 和($h \to 0^-$);②非整数阶导数还有一种积分符号表达式,因此,它也可以看成是一种‘加权积分’,通常所谓的‘分数阶导数具有记忆功能’,正是源于这种‘积分’作用,在非整数阶导数的极限形式表达式中,这种‘积分’作用表现为求和项数为 ∞(与阶数无关),而整数阶导数只有极限形式表达式,而且其求和项数是有限的(等于阶数).

(3)给出分数阶积分和导数一个统一模型,从中可以看出非整数阶积分与非整数阶导数之间的关系,以及非整数阶积分与整数阶积分之间的关系.

(4)给出分数阶微积分一种简单的物理解释,从而可以从另一个侧面加深对分数阶微积分本质的认识.

(5)提出一种定域长分数阶微积分定义,并给出它的直接数值算法.预期它可能得到实际应用,例如,是否可以用定域长分数阶积分滤波器来合成具有局部相关/记忆特征的分数阶随机信号[8],就是一个值得进一步探讨的问题.

参考文献

[1] Y Q Chen, K L Moore. Discretization schemes for fractional-order differentiators and integrators[J]. IEEE Trans On Circuits and Systems - I: Fundamental Theory and Applications, 2002, 49(3): 363 - 367.

[2] M Axtell, E M Bise. Fractional calculus applications in control systems[A]. Proceedings of the IEEE 1990 Nat. Aerospace and Electronics Conference[C]. New York: IEEE, 1990.563 - 566.

[3] M D Ortigueira, J A T Machado. Fractional calculus applications in signals and systems [J]. Signal Processing, 2006, 83 (3): 2503 - 2504.

[4] Li Xiao-rang. Fractional Calculus, Fractal Geometry and Stochastic Process [D]. Ontario: The University of Western Ontario USA, 2003.

[5] M D Ortigueira. Introduction to fractional linear systems Part 1: Continuous-time case[J]. IEE Proc-Vis Image Signal Processing, 2000, 147(1): 63 - 65.

[6] K S Miller, B Ross. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations [M]. NewYork, USA: John Wiley & Sons Inc, 1993.32 - 50.

[7] S G Smako, A A Kilbas, O I Marichev. Fractional Integrals and Derivitives—Theory and Applications[M]. USA: Gorden and Breach Science Publishers, 1987.28 - 45.

[8] 盛虎.分数阶信号合成与滤波技术研究及应用[D].辽宁大连:大连理工大学,2011.
Sheng hu. Fractional Signal Synthesis and Fractional-Order Filters with Applications[D]. Dalian, Liaoning: Dalian University of Technology of China, 2011.(in Chinese)

作者简介

张旭秀 女,1968 年生,辽宁大连人,2006 年毕业于大连理工大学,获工学博士学位.现为大连交通大学教授,硕士生导师,主要从事信号处理,智能控制方面的研究与教学工作.
E-mail: zhangxuxiu@163.com

邱天爽 男,1954 年生,江苏海门人,1995 年毕业于大连理工大学,获工学博士学位.现为大连理工大学教授,博士生导师,主要从事信号与信息处理方面的研究和教学工作.在国内外学术期刊与会议上发表论文 180 余篇,曾获教育部中国高校科学技术二等奖等多项科技奖励.
E-mail: qiutsh@dlut.edu.cn