

核稀疏保持投影及生物特征识别应用

殷 俊¹, 杨万扣²

(1. 上海海事大学信息工程学院, 上海 201306; 2. 东南大学自动化学院, 江苏南京 210096)

摘 要: 稀疏表示系数包含较强的鉴别信息, 稀疏保持投影(Sparsity Preserving Projections, SPP)利用稀疏表示系数进行特征提取. 本文通过核方法获取高维特征空间的核稀疏表示系数, 并利用核稀疏表示系数构造邻接矩阵, 提出核稀疏保持投影(Kernel Sparsity Preserving Projections, KSPP). 核稀疏表示系数比稀疏表示系数包含更强的鉴别信息, 因此 KSPP 可以比 SPP 提取更有效的鉴别特征. 在多个数据库上的生物特征识别实验, KSPP 都取得了不错的实验结果.

关键词: 稀疏表示; 邻接矩阵; 稀疏保持投影; 核方法

中图分类号: TP391.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2013)04-0639-07

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.3969/j.issn.0372-2112.2013.04.003

Kernel Sparsity Preserving Projections and Its Application to Biometrics

YIN Jun¹, YANG Wan-kou²

(1. Shanghai Maritime University, College of Information Engineering, Shanghai 201306, China;

2. Southeast University, School of Automation, Nanjing, Jiangsu 210096, China)

Abstract: Sparse representation coefficient contains strong discriminant information and sparsity preserving projections extracts features by sparse representation coefficient. This paper obtains kernel sparse representation coefficient in the high dimensional space by kernel method and use kernel sparse representation coefficient to construct adjacency matrix, then propose kernel sparsity preserving projections. Kernel sparse representation coefficient contains stronger discriminant information than sparse representation coefficient; therefore, KSPP could extract more efficient features than SPP. KSPP achieves good results in biometrics experiments of several databases.

Key words: sparse representation; adjacency matrix; sparsity preserving projections; kernel method

1 引言

稀疏表示是最近计算机视觉和模式识别领域的一个研究热点, 被成功应用于人脸识别^[1,2]、图像分类^[3]、图像超分辨率^[4,5]、图像压缩^[6]、目标检测和跟踪^[7,8]等研究领域. Wright 等人将稀疏表示用于模式分类, 提出基于稀疏表示的分类(Sparse Representation based Classification, SRC)方法^[1], SRC 在人脸识别实验中比已有的一些分类方法取得了更好的识别效果. 在 SRC 中, 一个测试样本被表示成所有训练样本的线性组合, 并且要求表示系数是稀疏的, 通过求解此稀疏表示问题可以求得稀疏表示系数, 之后再计算测试样本与每一类别训练样本重构值之间的残差, 最后将测试样本划分到残差最小的那个类.

SRC 是一种利用稀疏表示系数进行分类的方法, Qiao 等人则将稀疏表示系数运用于特征提取, 提出一种

基于稀疏表示的子空间特征提取方法——稀疏保持投影(Sparsity Preserving Projections, SPP)^[9]. SPP 将一个训练样本表示成剩余所有训练样本的线性组合, 并且要求表示系数是稀疏的, 从而求得稀疏表示系数. 运用基于流形学习的子空间特征提取算法中的邻接图的概念, SPP 使用求得的稀疏表示系数创建邻接图. 由于稀疏表示系数是通过最小化 l_1 范数求得的, 因此这种邻接图又称为 l_1 图, SPP 利用 l_1 图并通过图嵌入方法将样本数据投影到一个子空间中, 从而提取数据的特征. 由于稀疏表示系数中包含很强的鉴别信息, 所以 l_1 图比一般的邻接图更有效, 这就使得 SPP 比局部保持投影(Locality Preserving Projections, LPP)^[10]等基于流形学习的子空间特征提取算法具有更强的鉴别能力.

近十多年来, 基于核的子空间特征提取算法是模式识别中的一个重要研究方向, 其中最具代表性的两种算法是核主成分分析(Kernel Principal Component Analysis, KPCA)^[11]

和核 Fisher 鉴别分析(Kernel Fisher Discriminant Analysis, KFDA)^[12]. KPCA 和 KFDA 首先通过非线性映射将数据映射到更高维的特征空间,然后在新的高维特征空间中执行主成分分析(Principal Component Analysis, PCA)和 Fisher 鉴别分析(Fisher Discriminant Analysis, FDA). 因为高维特征空间的数据具有更好的线性可分性,一些在原特征空间线性不可分的数据,在高维特征空间能够变得线性可分,所以这些基于核的算法能提高线性算法的性能.

受到核方法的启发同时为了获得更有效的稀疏表示系数,我们提出核稀疏表示的思想. 核稀疏表示首先将数据映射到更高维的特征空间,接着利用核方法在高维特征空间中进行稀疏表示. 如果选择一个适当的核函数,数据在高维特征空间将具有更好的线性可分性,样本将可能更准确地由同类的训练样本线性表示,即样本的稀疏表示系数的非零值将更多地对应于同类训练样本,这样的稀疏表示系数无论对于分类还是特征提取都是很有利的.

高维特征空间中求得的稀疏表示系数可称为核稀疏表示系数,核稀疏表示系数已被用于分类,得到基于核稀疏表示(Kernel Sparse Representation based Classification, KSRC)的分类方法^[13],而本文将核稀疏表示系数运用在特征提取中,提出核稀疏保持投影(Kernel Sparsity Preserving Projections, KSPP). KSPP 利用核稀疏表示系数创建邻接图,使用这幅邻接图并通过图嵌入方法寻找子空间,最后将数据投影到子空间中. 经过 KSPP 投影后的数据可以保持原数据的核稀疏重构关系.

2 稀疏保持投影(SPP)

2.1 稀疏表示

假设共有 c 类的 M 个训练样本,并且每一类都有足够多的训练样本,第 k 类的训练样本矩阵记为 $\mathbf{X}_k = [\mathbf{x}_{k,1}, \mathbf{x}_{k,2}, \dots, \mathbf{x}_{k,l_k}] \in \mathbb{R}^{n \times l_k}$,其中 n 是样本的维数, l_k 是第 k 类的训练样本数. 这种情况下,属于第 k 类的任一样本 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ 可以近似地表示成此类的所有训练样本的线性组合:

$$\mathbf{y} = h_{k,1}\mathbf{x}_{k,1} + h_{k,2}\mathbf{x}_{k,2} + \dots + h_{k,l_k}\mathbf{x}_{k,l_k} \quad (1)$$

如若样本 \mathbf{y} 所属的类别开始是未知的,可以用所有训练样本的线性组合来表示 \mathbf{y} :

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{h} \quad (2)$$

其中 $\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_c] = [\mathbf{x}_{1,1}, \mathbf{x}_{1,2}, \dots, \mathbf{x}_{c,l_c}] \in \mathbb{R}^{n \times l}$ 是包括 c 类所有 M 个训练样本的样本矩阵, $\mathbf{h} = [0, \dots, 0, h_{k,1}, h_{k,2}, \dots, h_{k,l_k}, 0, \dots, 0]^T \in \mathbb{R}^M$ 是表示系数向量,理想情况下, \mathbf{h} 的非零元素只对应于第 k 类的训练样本,因此当类别数 c 很大时, \mathbf{h} 是稀疏的. 这时的线性

表示问题(2)就是一个稀疏表示问题.

当 $n < M$ 时,方程(2)是欠定方程,稀疏表示问题就是寻找一个向量 \mathbf{h} ,使得方程(2)成立同时 $\|\mathbf{h}\|_0$ 达到最小,其中 $\|\mathbf{h}\|_0$ 是 \mathbf{h} 的 l_0 范数. 这个问题描述如下:

$$\hat{\mathbf{h}} = \underset{\mathbf{h}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{h}\|_0 \quad \text{s.t. } \mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{h} \quad (3)$$

然而,求解问题(3)的稀疏解是一个 NP 难问题. 不过由稀疏表示和压缩感知理论可知,通过解以下的凸松弛最优化问题可以获得近似解:

$$\hat{\mathbf{h}} = \underset{\mathbf{h}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{h}\|_1 \quad \text{s.t. } \mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{h} \quad (4)$$

其中 $\|\mathbf{h}\|_1$ 是 \mathbf{h} 的 l_1 范数. 问题(4)可以通过标准线性规划方法求解. 由于不可避免有噪声以及样本观察值的误差存在,需要放宽式(4)中的约束条件,从而得到下面的最优化问题:

$$\hat{\mathbf{h}} = \underset{\mathbf{h}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{h}\|_1 \quad \text{s.t. } \|\mathbf{X}\mathbf{h} - \mathbf{y}\|_2 \leq \epsilon \quad (5)$$

其中 ϵ 是重建误差的容忍度. 这个凸最优化问题可以通过二阶锥规划方法求得.

2.2 SPP

最近,有学者证明已有的一些特征提取算法,如主成分分析、线性鉴别分析、基于流形学习的特征提取算法等,都可以统一到一个图嵌入框架下^[14]. Qiao 等人将稀疏表示运用在邻接矩阵的创建中^[9],利用稀疏表示系数创建邻接矩阵获得 l_1 邻接图,进而提出 SPP 算法.

对于任一训练样本 $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n (i = 1, 2, \dots, M)$,用除其自身以外剩余的所有训练样本对其稀疏表示. 这里,为了使稀疏表示更有效地针对特征提取, Qiao 等人在原先稀疏表示问题基础上增加了一个约束条件,得到修改的稀疏表示问题:

$$\hat{\mathbf{h}}_i = \underset{\mathbf{h}_i}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{h}_i\|_1 \quad (6)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{x}_i = \mathbf{X}\mathbf{h}_i$$

$$\mathbf{1} = \mathbf{e}^T \mathbf{h}_i$$

其中, \mathbf{e} 表示所有元素均为 1 的列向量, $\mathbf{h}_i = [\mathbf{h}_{i,1}, \dots, \mathbf{h}_{i,i-1}, 0, \mathbf{h}_{i,i+1}, \dots, \mathbf{h}_{i,M}]^T$ 表示稀疏表示系数向量; \mathbf{h}_i 的第 i 个元素为 0,表示只用除 \mathbf{x}_i 以外的训练样本来稀疏表示 \mathbf{x}_i ; $\mathbf{h}_{ij} (j \neq i)$ 表示训练样本 \mathbf{x}_j 对重构 \mathbf{x}_i 的贡献量. 同样地,由于噪声的存在以及样本观察值的误差,需要放宽约束条件 $\mathbf{x}_i = \mathbf{A}\mathbf{h}_i$,从而得到下面的约束最优化问题:

$$\hat{\mathbf{h}}_i = \underset{\mathbf{h}_i}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{h}_i\|_1$$

$$\text{s.t. } \|\mathbf{X}\mathbf{h}_i - \mathbf{x}_i\| \leq \epsilon$$

$$\mathbf{1} = \mathbf{e}^T \mathbf{h}_i \quad (7)$$

通过求解稀疏表示问题(6)或(7),得到稀疏表示系数向量 $\hat{\mathbf{h}}_i (i = 1, 2, \dots, M)$,这时邻接矩阵 \mathbf{H} 可以定义如下:

$$\mathbf{H} = [\hat{\mathbf{h}}_1, \hat{\mathbf{h}}_2, \dots, \hat{\mathbf{h}}_M] \quad (8)$$

H 能够在一定程度上反映数据的本质几何特性,并且包含较强的鉴别信息,使用这样的邻接矩阵进行特征提取可以获取更有效的特征.根据保持数据的稀疏重构关系的原则,定义如下的优化目标函数:

$$\min_w \sum_{i=1}^M (\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i - \mathbf{w}^T \mathbf{X} \hat{\mathbf{h}}_i)^2 \quad (9)$$

通过数学推导可得:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^M (\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i - \mathbf{w}^T \mathbf{X} \hat{\mathbf{h}}_i)^2 \\ &= \mathbf{w}^T \left(\sum_{i=1}^M (\mathbf{x}_i - \mathbf{X} \hat{\mathbf{h}}_i)(\mathbf{x}_i - \mathbf{X} \hat{\mathbf{h}}_i)^T \right) \mathbf{w} \\ &= \mathbf{w}^T \left(\sum_{i=1}^M (\mathbf{X} \mathbf{e}_i - \mathbf{X} \hat{\mathbf{h}}_i)(\mathbf{X} \mathbf{e}_i - \mathbf{X} \hat{\mathbf{h}}_i)^T \right) \mathbf{w} \\ &= \mathbf{w}^T \mathbf{X} \left(\sum_{i=1}^M (\mathbf{e}_i - \hat{\mathbf{h}}_i)(\mathbf{e}_i - \hat{\mathbf{h}}_i)^T \right) \mathbf{X}^T \mathbf{w} \\ &= \mathbf{w}^T \mathbf{X} \left(\sum_{i=1}^M \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T - \hat{\mathbf{h}}_i \mathbf{e}_i^T - \mathbf{e}_i \hat{\mathbf{h}}_i^T + \hat{\mathbf{h}}_i \hat{\mathbf{h}}_i^T \right) \mathbf{X}^T \mathbf{w} \\ &= \mathbf{w}^T \mathbf{X} (\mathbf{I} - \mathbf{H} - \mathbf{H}^T + \mathbf{H} \mathbf{H}^T) \mathbf{X}^T \mathbf{w} \end{aligned} \quad (10)$$

其中 \mathbf{e}_i 表示除第 i 个元素为 1 外,其他元素均为 0 的列向量.为了避免退化解的出现,给定约束条件 $\mathbf{w}^T \mathbf{X} \mathbf{X}^T \mathbf{w} = 1$,从而得到 SPP 的优化准则为:

$$\min_w \frac{\mathbf{w}^T \mathbf{X} (\mathbf{I} - \mathbf{H} - \mathbf{H}^T + \mathbf{H} \mathbf{H}^T) \mathbf{X}^T \mathbf{w}}{\mathbf{w}^T \mathbf{X} \mathbf{X}^T \mathbf{w}} \quad (11)$$

此最小化准则可以化简为如下等价的最大化准则:

$$\max_w \frac{\mathbf{w}^T \mathbf{X} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T - \mathbf{H} \mathbf{H}^T) \mathbf{X}^T \mathbf{w}}{\mathbf{w}^T \mathbf{X} \mathbf{X}^T \mathbf{w}} \quad (12)$$

准则(12)可以转化为求解广义本征方程:

$$\mathbf{X} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T - \mathbf{H} \mathbf{H}^T) \mathbf{X}^T \mathbf{w} = \lambda \mathbf{X} \mathbf{X}^T \mathbf{w} \quad (13)$$

SPP 的投影矩阵由方程(13)的对应前 d 个最大本征值的本征向量构成.

3 核稀疏保持投影(KSPP)

核方法通过将样本映射到高维特征空间,可以改变样本的分布.若选择一个合适的核函数,一些在原空间线性不可分的数据样本被映射到高维特征空间后会变得线性可分,这时样本可以更准确地由同类的其他样本稀疏表示,即样本的稀疏表示系数中包含更强的鉴别信息.为此,利用核方法在高维特征空间中进行稀疏表示,提出核稀疏表示,利用核稀疏表示得到的核稀疏表示系数构造邻接矩阵,并用此邻接矩阵进行图嵌入,进而提取数据的特征,这样提取的特征可以保持数据的核稀疏重构关系,此算法称为核稀疏保持投影(KSPP).

3.1 核稀疏表示

假设样本通过非线性映射 ϕ 被映射到高维特征空间.令 $\mathbf{B} = [\phi(\mathbf{x}_{1,1}), \phi(\mathbf{x}_{1,2}), \dots, \phi(\mathbf{x}_{c,l_c})]$ 表示非线性

映射后的训练样本矩阵,则高维特征空间的稀疏表示问题可以描述如下:

$$\hat{\mathbf{s}} = \underset{\mathbf{s}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{s}\|_0 \quad \text{s.t. } \phi(\mathbf{y}) = \mathbf{B} \mathbf{s} \quad (14)$$

其中, $\phi(\mathbf{y})$ 是由原空间中任一样本 \mathbf{y} 映射到高维特征空间形成的.类似于原始空间中的稀疏表示问题,问题(14)的近似解可以通过以下的约束最优化问题求得:

$$\hat{\mathbf{s}} = \underset{\mathbf{s}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{s}\|_1 \quad \text{s.t. } \phi(\mathbf{y}) = \mathbf{B} \mathbf{s} \quad (15)$$

当观察值不准确时,需要放宽问题(15)的约束条件,从而得到以下约束最优化问题:

$$\hat{\mathbf{s}} = \underset{\mathbf{s}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{s}\|_1 \quad \text{s.t. } \|\mathbf{B} \mathbf{s} - \phi(\mathbf{y})\|_2 \leq \epsilon \quad (16)$$

若令 $\epsilon = 0$,问题(16)和问题(15)是等价的,因此,问题(15)可以看成是问题(16)的特殊情形,因此下面只讨论问题(16).

因为 \mathbf{B} 和 $\phi(\mathbf{y})$ 是未知的,所以问题(16)不能直接求解.但是根据定理 1,此问题可以转化为以下的约束最优化问题:

$$\hat{\mathbf{s}} = \underset{\mathbf{s}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{s}\|_1 \quad \text{s.t. } \|\mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{s} - \mathbf{B}^T \phi(\mathbf{y})\|_2 \leq \delta \quad (17)$$

定理 1 对任意的 $\epsilon \geq 0$, 都存在 $\delta \geq 0$, 只要 $\|\mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{s} - \mathbf{B}^T \phi(\mathbf{y})\|_2 \leq \delta$, 就一定有 $\|\mathbf{B} \mathbf{s} - \phi(\mathbf{y})\|_2 \leq \epsilon$.

证明 令 $\Gamma(\mathbf{s}) = (\mathbf{B} \mathbf{s} - \phi(\mathbf{y}))^T (\mathbf{B} \mathbf{s} - \phi(\mathbf{y}))$, 则 $\Gamma(\mathbf{s})$ 关于变量 \mathbf{s} 的导数是 $\Gamma'(\mathbf{s}) = 2 \mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{s} - 2 \mathbf{B}^T \phi(\mathbf{y})$. 因为 $\Gamma(\mathbf{s}) \geq 0$, 当 $\mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{s} - \mathbf{B}^T \phi(\mathbf{y}) = 0$ 成立时, $\Gamma(\mathbf{s})$ 达到最小值. 如果 $\mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{s} - \mathbf{B}^T \phi(\mathbf{y})$ 接近于 0, $\Gamma(\mathbf{s})$ 就会逼近它的最小值, 此时, $\|\mathbf{B} \mathbf{s} - \phi(\mathbf{y})\|_2 = \sqrt{(\mathbf{B} \mathbf{s} - \phi(\mathbf{y}))^T (\mathbf{B} \mathbf{s} - \phi(\mathbf{y}))} = \sqrt{\Gamma(\mathbf{s})}$ 也逼近其最小值.

因此, 对于任意的 $\epsilon \geq 0$, 一定存在 $\delta \geq 0$, 只要 $\|\mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{s} - \mathbf{B}^T \phi(\mathbf{y})\|_2 \leq \delta$, 就有 $\|\mathbf{B} \mathbf{s} - \phi(\mathbf{y})\|_2 \leq \epsilon$. 证毕

高维特征空间中的内积可以通过核函数求得, 对于任意 \mathbf{x} 和 \mathbf{y} , 有 $\phi(\mathbf{x})^T \phi(\mathbf{y}) = K(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, 因此有

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^T \mathbf{B} &= [\phi(\mathbf{x}_{1,1}), \phi(\mathbf{x}_{1,2}), \dots, \phi(\mathbf{x}_{c,l_c})]^T \cdot [\phi(\mathbf{x}_{1,1}), \phi(\mathbf{x}_{1,2}), \dots, \phi(\mathbf{x}_{c,l_c})] \\ &= \begin{bmatrix} K(\mathbf{x}_{1,1}, \mathbf{x}_{1,1}) & K(\mathbf{x}_{1,1}, \mathbf{x}_{1,2}) & \cdots & K(\mathbf{x}_{1,1}, \mathbf{x}_{c,l_c}) \\ K(\mathbf{x}_{1,2}, \mathbf{x}_{1,1}) & K(\mathbf{x}_{1,2}, \mathbf{x}_{1,2}) & \cdots & K(\mathbf{x}_{1,2}, \mathbf{x}_{c,l_c}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K(\mathbf{x}_{c,l_c}, \mathbf{x}_{1,1}) & K(\mathbf{x}_{c,l_c}, \mathbf{x}_{1,2}) & \cdots & K(\mathbf{x}_{c,l_c}, \mathbf{x}_{c,l_c}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

并且

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \phi(\mathbf{y}) &= [\phi(\mathbf{x}_{1,1}), \phi(\mathbf{x}_{1,2}), \dots, \phi(\mathbf{x}_{c,l_c})]^T \phi(\mathbf{y}) \\ &= \begin{bmatrix} K(\mathbf{x}_{1,1}, \mathbf{y}) \\ K(\mathbf{x}_{1,2}, \mathbf{y}) \\ \vdots \\ K(\mathbf{x}_{c,l_c}, \mathbf{y}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (19)$$

当核函数 $K(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 给定时, $\mathbf{B}^T \mathbf{B}$ 和 $\mathbf{B}^T \phi(\mathbf{y})$ 就可根据式(18)和式(19)求得, 这时凸最优化问题(17)可以求解。

3.2 KSPP

利用核稀疏表示系数构造高维特征空间样本数据的邻接矩阵, 用此邻接矩阵通过图嵌入方法进行特征提取, 从而得到 KSPP 算法。

通过非线性映射 ϕ 将样本 $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n (i = 1, 2, \dots, M)$ 映射到高维特征空间得到 $\phi(\mathbf{x}_i) (i = 1, 2, \dots, M)$, 对于高维特征空间的任一样本 $\phi(\mathbf{x}_i) (i = 1, 2, \dots, M)$, 用除其自身以外的所有训练样本对其进行稀疏表示。类似于 SPP 的做法, 对稀疏表示系数向量施加一个约束条件, 即使得向量中所有元素的和为 1, 这样得到以下约束最优化问题:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{s}}_i &= \underset{\mathbf{s}_i}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{s}_i\|_1 \\ \text{s.t. } \phi(\mathbf{x}_i) &= \mathbf{B}\mathbf{s}_i \\ 1 &= \mathbf{e}^T \mathbf{s}_i \end{aligned} \quad (20)$$

其中 $\mathbf{B} = [\phi(\mathbf{x}_1), \phi(\mathbf{x}_2), \dots, \phi(\mathbf{x}_M)]$ 表示高维特征空间中所有训练样本组成的矩阵, $\mathbf{s}_i = [s_{i,1}, \dots, s_{i,i-1}, 0, s_{i,i+1}, \dots, s_{i,M}]^T$ 表示高维特征空间中的稀疏表示系数向量, 称其为核稀疏表示系数向量; $s_{ij} (j \neq i)$ 表示高维特征空间中训练样本 $\phi(\mathbf{x}_j)$ 对重构 $\phi(\mathbf{x}_i)$ 的贡献量。由于噪声的存在以及样本观察值的误差, 约束条件 $\phi(\mathbf{x}_i) = \mathbf{B}\mathbf{s}_i$ 不是总能成立, 这时通过放宽式(20)的约束条件得到以下约束最优化问题:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{s}}_i &= \underset{\mathbf{s}_i}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{s}_i\|_1 \\ \text{s.t. } \|\mathbf{B}\mathbf{s}_i - \phi(\mathbf{x}_i)\| &\leq \epsilon \\ 1 &= \mathbf{e}^T \mathbf{s}_i \end{aligned} \quad (21)$$

若设问题(21)中的 ϵ 为 0, 则最优化问题(21)就等同于最优化问题(20), 即问题(20)可以看成问题(21)的一种特殊情况, 由此可以只考虑问题(21)。因为非线性映射 ϕ 的具体表达式是未知的, 所以 \mathbf{B} 和 $\phi(\mathbf{x}_i)$ 也是未知的, 问题(21)不能直接求解。不过根据定理 1, 问题(21)可以转化为以下约束最优化问题:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{s}}_i &= \underset{\mathbf{s}_i}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{s}_i\|_1 \\ \text{s.t. } \|\mathbf{B}^T \mathbf{B}\mathbf{s}_i - \mathbf{B}^T \phi(\mathbf{x}_i)\| &\leq \delta \\ 1 &= \mathbf{e}^T \mathbf{s}_i \end{aligned} \quad (22)$$

利用核函数计算高维特征空间数据的内积, 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^T \mathbf{B} &= [\phi(\mathbf{x}_1), \phi(\mathbf{x}_2), \dots, \phi(\mathbf{x}_M)]^T \cdot [\phi(\mathbf{x}_1), \phi(\mathbf{x}_2), \dots, \phi(\mathbf{x}_M)] \\ &= \begin{bmatrix} K(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) & K(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) & \cdots & K(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_M) \\ K(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) & K(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2) & \cdots & K(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_M) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K(\mathbf{x}_M, \mathbf{x}_1) & K(\mathbf{x}_M, \mathbf{x}_2) & \cdots & K(\mathbf{x}_M, \mathbf{x}_M) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \mathbf{K} \quad (23)$$

以及

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^T \phi(\mathbf{x}_i) &= [\phi(\mathbf{x}_1), \phi(\mathbf{x}_2), \dots, \phi(\mathbf{x}_M)]^T \phi(\mathbf{x}_i) \\ &= \begin{bmatrix} K(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_i) \\ K(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_i) \\ \vdots \\ K(\mathbf{x}_M, \mathbf{x}_i) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (24)$$

这时可求解最优化问题(22), 得到核稀疏表示系数向量 $\hat{\mathbf{s}}_i (i = 1, 2, \dots, M)$, 利用其组合得到稀疏重构邻接矩阵 $\mathbf{S} = [\hat{\mathbf{s}}_1, \hat{\mathbf{s}}_2, \dots, \hat{\mathbf{s}}_M]$ 。通过 \mathbf{S} 建立 KSPP 的优化目标函数:

$$\min_{\mathbf{w}} \sum_{i=1}^M (\mathbf{w}^T \phi(\mathbf{x}_i) - \mathbf{w}^T \mathbf{B}\hat{\mathbf{s}}_i)^2 \quad (25)$$

通过数学推导可得:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^M (\mathbf{w}^T \phi(\mathbf{x}_i) - \mathbf{w}^T \mathbf{B}\hat{\mathbf{s}}_i)^2 \\ &= \mathbf{w}^T \left(\sum_{i=1}^M (\phi(\mathbf{x}_i) - \mathbf{B}\hat{\mathbf{s}}_i)(\phi(\mathbf{x}_i) - \mathbf{B}\hat{\mathbf{s}}_i)^T \right) \mathbf{w} \\ &= \mathbf{w}^T \left(\sum_{i=1}^M (\mathbf{B}\mathbf{e}_i - \mathbf{B}\hat{\mathbf{s}}_i)(\mathbf{B}\mathbf{e}_i - \mathbf{B}\hat{\mathbf{s}}_i)^T \right) \mathbf{w} \\ &= \mathbf{w}^T \mathbf{B} \left(\sum_{i=1}^M (\mathbf{e}_i - \hat{\mathbf{s}}_i)(\mathbf{e}_i - \hat{\mathbf{s}}_i)^T \right) \mathbf{B}^T \mathbf{w} \\ &= \mathbf{w}^T \mathbf{B} \left(\sum_{i=1}^M \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T - \hat{\mathbf{s}}_i \mathbf{e}_i^T - \mathbf{e}_i \hat{\mathbf{s}}_i^T + \hat{\mathbf{s}}_i \hat{\mathbf{s}}_i^T \right) \mathbf{B}^T \mathbf{w} \\ &= \mathbf{w}^T \mathbf{B} (\mathbf{I} - \mathbf{S} - \mathbf{S}^T + \mathbf{S}\mathbf{S}^T) \mathbf{B}^T \mathbf{w} \end{aligned} \quad (26)$$

为了防止出现退化解, 给定约束条件 $\mathbf{w}^T \mathbf{B}\mathbf{B}^T \mathbf{w} = 1$, 这样得到 KSPP 的优化准则:

$$\min_{\mathbf{w}} \frac{\mathbf{w}^T \mathbf{B} (\mathbf{I} - \mathbf{S} - \mathbf{S}^T + \mathbf{S}\mathbf{S}^T) \mathbf{B}^T \mathbf{w}}{\mathbf{w}^T \mathbf{B}\mathbf{B}^T \mathbf{w}} \quad (27)$$

准则(27)等价于以下最大化准则:

$$\max_{\mathbf{w}} \frac{\mathbf{w}^T \mathbf{B} (\mathbf{S} + \mathbf{S}^T - \mathbf{S}\mathbf{S}^T) \mathbf{B}^T \mathbf{w}}{\mathbf{w}^T \mathbf{B}\mathbf{B}^T \mathbf{w}} \quad (28)$$

最大化准则(28)可以转化为求解广义本征方程:

$$\mathbf{B} (\mathbf{S} + \mathbf{S}^T - \mathbf{S}\mathbf{S}^T) \mathbf{B}^T \mathbf{w} = \lambda \mathbf{B}\mathbf{B}^T \mathbf{w} \quad (29)$$

方程(29)等价于

$$\mathbf{B}^T \mathbf{B} (\mathbf{S} + \mathbf{S}^T - \mathbf{S}\mathbf{S}^T) \mathbf{B}^T \mathbf{w} = \lambda \mathbf{B}^T \mathbf{B}\mathbf{B}^T \mathbf{w} \quad (30)$$

投影向量 \mathbf{w} 可以表示成

$$\mathbf{w} = \mathbf{B}\mathbf{p} \quad (31)$$

将式(31)代入方程(30), 得到

$$\mathbf{B}^T \mathbf{B} (\mathbf{S} + \mathbf{S}^T - \mathbf{S}\mathbf{S}^T) \mathbf{B}^T \mathbf{B}\mathbf{p} = \lambda \mathbf{B}^T \mathbf{B}\mathbf{B}^T \mathbf{B}\mathbf{p} \quad (32)$$

根据式(23), 广义本征方程(32)可以化简为

$$\mathbf{K} (\mathbf{S} + \mathbf{S}^T - \mathbf{S}\mathbf{S}^T) \mathbf{K}\mathbf{p} = \lambda \mathbf{K}^2 \mathbf{p} \quad (33)$$

求解方程(33)对应前 d 个最大本征值的本征向量 $\mathbf{p}_i (i = 1, 2, \dots, d)$ 。为了归一化 KSPP 的投影向量 $\mathbf{w}_i = \mathbf{B}\mathbf{p}_i (i = 1, 2, \dots, d)$, 要使下式成立

$$\mathbf{w}_i^T \mathbf{w}_i = \mathbf{p}_i^T \mathbf{B}^T \mathbf{B}\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_i^T \mathbf{K}\mathbf{p}_i = 1 \quad (34)$$

因此有

$$w_i = \frac{Bp_i}{\sqrt{p_i^T K p_i}} \quad (35)$$

高维特征空间的样本 $\phi(x)$, 经过 KSPP 投影后的第 i 个新特征为

$$y_i = w_i^T \phi(x) = \left(\frac{Bp_i}{\sqrt{p_i^T K p_i}} \right)^T \phi(x) \\ = \frac{p_i^T B^T \phi(x)}{\sqrt{p_i^T K p_i}} = \frac{p_i^T}{\sqrt{p_i^T K p_i}} \begin{bmatrix} K(x_1, x) \\ K(x_2, x) \\ \vdots \\ K(x_M, x) \end{bmatrix} \quad (36)$$

KSPP 算法如下所述:

Step1 解约束最优化问题(22), 求出核稀疏表示系数 $\hat{s}_i (i = 1, 2, \dots, M)$, 用 $\hat{s}_i (i = 1, 2, \dots, M)$ 组合得到核稀疏重构邻接矩阵 $S = [\hat{s}_1, \hat{s}_2, \dots, \hat{s}_M]$.

Step2 求解广义本征方程 $K(S + S^T - SS^T)Kp = \lambda K^2 p$ 的对应前 d 个最大本征值的本征向量 p_1, p_2, \dots, p_d .

$$\text{Step3 令 } P = \left[\frac{p_1}{\sqrt{p_1^T K p_1}}, \frac{p_2}{\sqrt{p_2^T K p_2}}, \dots, \frac{p_d}{\sqrt{p_d^T K p_d}} \right],$$

对于样本 x , 其新的 KSPP 特征为 $y = P^T \begin{bmatrix} K(x_1, x) \\ K(x_2, x) \\ \vdots \\ K(x_M, x) \end{bmatrix}$.

4 实验

本节通过 FERET 人脸库、ORL 人脸库以及 PolyU 掌纹数据库上的生物特征识别实验验证 KSPP 算法的有效性. 实验中, 将 KSPP 与 PCA、LPP、SPP 等子空间特征提取算法作对比, 实验还验证了这些特征提取算法在最近邻(Nearest Neighbor, NN), SRC 和 KSRC 等不同分类算法下的有效性. 在实验中, 对于 KSRC 和 KSPP 中的核函数, 分别选取高斯核 $K(x, y) = \exp(-\|x - y\|^2/t)$ 和多项式核 $K(x, y) = (1 + x^T y)^d$.

4.1 FERET 人脸库上的实验

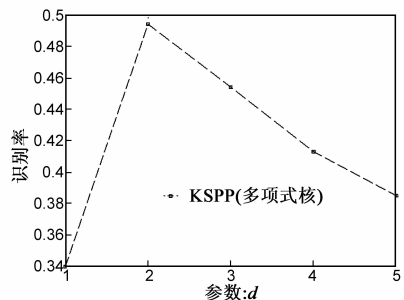
FERET 人脸库^[15]是由美国国防部的 DARPA 计划赞助发起的, 它已经成为测试和验证人脸识别算法的一个标准库. 实验中使用 FERET 库的一个子库, 它由 200 个人的 1400 幅图像构成, 每个人 7 幅图像. 这些图像包括人脸表情、姿态以及光照的变化. 根据眼睛和嘴巴的位置, 将原图像的人脸部分剪裁出来, 并将他们缩放到 80×80 像素大小, 此外, 对这些图像做了直方图均衡化处理. 图 1 显示了其中一个人的 7 幅均衡化的图像.

在实验中, 每个人的前 3 幅图像做训练, 剩余的 4

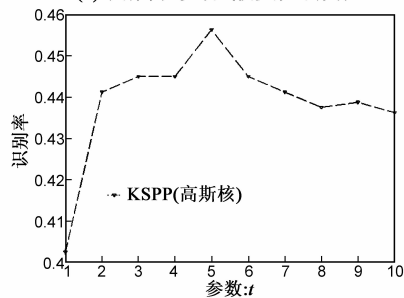
幅图像做测试. 首先, 利用从总体到局部的搜索策略为 KSPP 寻找最优核参数. 在利用 KSPP 进行特征提取后, 使用 NN 分类器对提取的 KSPP 特征进行分类. 通过总体搜索, 找到多项式核参数 d 的候选区间为 1 到 5, 高斯核参数 t 的候选区间为 1 到 10. 接着通过局部搜索在候选区间中寻找最优的核参数. 图 2(a)显示了 KSPP 的识别率随多项式核参数 d 的变化, 图 2(b)显示了 KSPP 的识别率随核参数 t 的变化. 从图中可以看到, 对于 KSPP, 最优的多项式核参数 d 为 2, 最优的高斯核参数 t 为 5.



图1 FERET人脸库上一个人的7幅均衡化图像



(a) 识别率随多项式核参数 d 的变化



(b) 识别率随高斯核参数 t 的变化

图2 在FERET人脸库上, KSPP的识别率随核参数的变化情况

在获得最优核参数后, 将 KSPP 与 PCA、LPP、SPP 等子空间特征提取算法做对比, 首先使用这些算法提取图像的特征, 接着利用 NN 分类器对提取的特征进行分类. 表 1 列出了四种特征提取算法的最大识别率及其对应的维数和参数, 其中 LPP 的参数 k 指近邻数. 从表中可以看出: 使用多项式核的 KSPP 算法取得了最高的识别率; 使用高斯核的 KSPP 算法也取得了不错的识别率, 其识别率高于 LPP 和 SPP, 不过低于 PCA; 不论是使用多项式核还是高斯核, KSPP 的识别率均高于 SPP, 说

明利用核方法得到的高维空间中的稀疏表示系数进行特征提取,确实可以获得鉴别能力更强的特征.

表 1 在 FERET 人脸库上,PCA、LPP、SPP 和 KSPP 的最大识别率(百分数)及其对应的维数和参数

算法	PCA	LPP	SPP	KSPP(多项式核)	KSPP(高斯核)
识别率	54.0	45.1	50.0	55.9	52.0
维数	150	150	230	590	210
参数	/	$k=2$	/	$d=2$	$t=5$

4.2 ORL 人脸库上的实验

ORL 人脸数据库包含 40 个人的 400 幅人脸图像,每个人 10 幅图像,图像的大小是 112×92 . 这些图像拍摄于不同时期,人的脸部表情和脸部细节有着不同程度的变化,如笑与不笑,眼睛或睁或闭,戴或不戴眼镜;人脸姿态也有相当程度的变化;深度旋转和平面旋转可达 20° ;人脸的尺度也有多达 10% 的变化.图 3 是 ORL 人脸库上一个人的 10 幅人脸图像.



图3 ORL人脸库上一个人的10幅人脸图像

实验中,随机选择每个人的 5 幅图像做训练,剩余的 5 幅图像做测试,实验重复 20 次,分别使用 PCA、LPP、SPP 和 KSPP 提取图像特征,接着利用 NN 分类器对提取的特征进行分类.为了选取最优的核参数,仍然是运用从总体到局部的搜索策略.表 2 列出了几种特征提取算法的最大平均识别率及其对应的特征维数和最优参数.从表中可以看出,SPP 的识别率高于 PCA 和 LPP;使用多项式核和高斯核的 KSPP 都取得了比 SPP 更好的识别效果;使用多项式核的 KSPP 的识别率是最高的,在核参数 d 取 2 时,KSPP 取得了 95.1% 的识别率.

表 2 在 ORL 人脸库上,PCA、LPP、SPP 和 KSPP 的最大平均识别率(百分数)及其对应的维数和参数

算法	PCA	LPP	SPP	KSPP(多项式核)	KSPP(高斯核)
识别率	93.0	91.3	93.4	95.1	94.3
维数	70	45	100	95	105
参数	/	$k=4$	/	$d=2$	$t=2$

4.3 PolyU 掌纹数据库上的实验

实验使用 PolyU 掌纹数据库的一个子库,其中包括 100 个不同掌纹的 600 幅图像,每个掌纹 6 幅图像.这 6 幅图像是在两个时间段获取的,前 3 幅拍摄于第一个时

间段,后 3 幅拍摄于第二个时间段,两个时间段平均间隔 2 个月.使用文献[16]中的算法,剪切出图像的中心区域,将其缩放到 128×128 像素大小并且进行直方图均衡化处理,图 4 显示了其中一个掌纹的 6 幅图像.

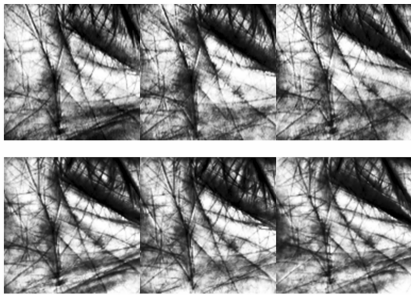


图4 PolyU掌纹数据库上一个掌纹的6幅均衡化的图像

在实验中,第一个时间段拍摄的 3 幅图像做训练,第二个时间段拍摄的 3 幅图像做测试.为了检验不同特征提取算法和分类算法组合的性能,在利用 PCA、LPP、SPP 和 KSPP 提取特征后,对于每一种算法提取的特征分别利用 NN、SRC 和 KSRC 三种分类算法进行分类,表 3 列出了实验结果.从表中可以看出,KSPP 提取的特征在几种分类算法下都取得了较高的识别率,而其他子空间特征提取算法在不同分类算法下的识别率波动较大;对于不同特征提取算法提取的特征,SRC 和 KSRC 分类算法的效果几乎都要好于 NN,并且 KSRC 的效果总体上要好于 SRC;KSPP 和 KSRC 的组合得到的识别率是所有情况中最好的.

表 3 在 PolyU 掌纹数据库上,几种特征提取算法与分类算法组合的最大识别率(百分数)以及对应的参数(括号中)

	PCA	LPP ($k=2$)	SPP	KSPP (多项式核) ($d=2$)	KSPP (高斯核) ($t=6$)
NN	88.0	92.0	85.3	94.3	95.3
SRC	92.3	97.3	92.3	96.7	98.3
KSRC(多项式核)($d=1$)	97.0	96.7	96.7	98.3	98.3
KSRC(高斯核)($t=3$)	96.3	96.7	96.7	96.7	97.7

对于 KSPP,核函数的参数的选择至关重要,直接关系到算法的性能,实验通过从总体到局部的搜索策略获取最优参数.这样做势必增加算法的时间复杂度,降低算法的效率;但如今计算机硬件发展迅速,时间复杂度对于算法的影响已有所减弱,若能提高算法的性能,即使增加一定时间复杂度也是可以接受的.

5 结论

本文利用核方法在高维特征空间进行稀疏表示,获得核稀疏表示系数并将其应用于特征提取,提出 KSPP 子空间特征提取算法.由于高维特征空间中的数

据具有更好的线性可分性,所以在其中获得的核稀疏表示系数具有更强的鉴别能力,利用它进行特征提取可以获得更好的性能。在 FERET、ORL 人脸库以及 PolyU 掌纹数据库上的实验,KSPP 与 PCA、LPP、SPP 等子空间特征提取算法进行了对比,结果表明 KSPP 确实可以提取更有鉴别能力的特征,从而取得更高的识别率。另外, PolyU 掌纹数据库上的实验还表明, KSPP 提取的特征在不同分类算法下都可以取得不错的识别率并且识别率较为稳定。

参考文献

- [1] Wright J, Yang A Y, Ganesh A, Sastry S S, Ma Y. Robust face recognition via sparse representation[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2009, 31(2): 210 – 227.
- [2] Haichao Zhang, Nasser M Nasrabadi, Yanning Zhang, Thomas S Huang. Joint dynamic sparse representation for multi-view face recognition[J]. Pattern Recognition, 2012, 45(4): 1290 – 1298.
- [3] Hui Kang hua, Li Chun li, Zhang Lei. Sparse neighbor representation for classification[J]. Pattern Recognition Letters, 2012, 33(5): 661 – 669.
- [4] Yang J, Wright J, Huang T, Ma Y. Image super-resolution as sparse representation of raw patches[A]. Proceedings of IEEE International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition[C]. Anchorage, Alaska, USA: IEEE Computer Society, 2008. 1 – 8.
- [5] 练秋生, 张伟. 基于图像块分类稀疏表示的超分辨率重构算法[J]. 电子学报, 2012, 40(5): 920 – 925.
LIAN Qiu-sheng, ZHANG Wei. Image super-resolution algorithms based on sparse representation of classified image patches[J]. Acta Electronica Sinica, 2012, 40(5): 920 – 925. (in Chinese)
- [6] 练秋生, 周婷. 结合字典稀疏表示和非局部相似性的自适应压缩成像算法[J]. 电子学报, 2012, 40(7): 1416 – 1422.
LIAN Qiu-sheng, ZHOU Ting. Adaptive compressed imaging algorithm combined the sparse representation in the dictionaries with non-local similarity[J]. Acta Electronica Sinica, 2012, 40(7): 1416 – 1422. (in Chinese)
- [7] Feng Chen, Qing Wang, Song Wang, Weidong Zhang, Wenli Xu. Object tracking via appearance modeling and sparse representation[J]. Image and Vision Computing, 2011, 29(11): 787 – 796.
- [8] 孙玉宝, 吴敏, 韦志辉, 肖亮, 冯灿. 基于稀疏表示的脑电棘波检测算法研究[J]. 电子学报, 2009, 37(9): 1971 – 1976.

SUN Yu-bao, WU Min, WEI Zhi-hui, XIAO Liang, FENG Can. EEG spike detection using sparse representation[J]. Acta Electronica Sinica, 2009, 37(9): 1971 – 1976. (in Chinese)

- [9] Qiao L S, Chen S C, Tan X Y. Sparsity preserving projections with applications to face recognition[J]. Pattern Recognition, 2010, 43(1): 331 – 341.
- [10] He X F, Yan S C, Hu Y, Niyogi P, Zhang H J. Face recognition using Laplacianfaces[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2005, 27(3): 328 – 340.
- [11] Schölkopf B, Smola A, Müller K R. Nonlinear component analysis as a kernel eigenvalue problem[J]. Neural Computation, 1998, 10(5): 1299 – 1319.
- [12] Roth V, Steinhaag V. Nonlinear discriminant analysis using kernel functions[A]. Proceedings of Advances in Neural Information Processing Systems[C]. USA: The MIT Press, 1999. 568 – 574.
- [13] Jun Yin, Zhonghua Liu, Zhong Jin, Wankou Yang. Kernel sparse representation based classification[J]. Neurocomputing, 2012, 77(1): 120 – 128.
- [14] Yan S C, Xu D, Zhang B Y, Zhang H J, Yang Q, Lin S. Graph embedding and extensions: a general framework for dimensionality reduction[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2007, 29(1): 40 – 51.
- [15] Phillips P J, Moon H, Rizvi S A, Rauss P J. The FERET evaluation methodology for face recognition algorithms[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2000, 22(10): 1090 – 1104.
- [16] Zhang D. Palmprint Authentication[M]. Massachusetts, USA: Kluwer Academic Publishers, 2004.

作者简介



殷俊 男, 1984 年 5 月生, 江苏扬州人。2011 年毕业于南京理工大学, 获博士学位。现为上海海事大学信息工程学院讲师, 主要研究方向为模式识别、机器学习等。
E-mail: junyin@shmtu.edu.cn



杨万扣 男, 1979 年 12 月生, 江苏盐城人。2009 年毕业于南京理工大学, 获博士学位。现为东南大学自动化学院讲师, 主要研究方向为模式识别、计算机视觉等。
E-mail: youngwankou@yeah.net