第4期
2013年4月

电　子　学　报
ACTA ELECTRONICA SINICA

Vol.41 No.4
Apr. 2013

# 广义量子Loop程序的若干性质

雷红轩[1,2],席政军[1],李永明[1]
(1.陕西师范大学计算机科学学院,陕西西安 710062;2.内江师范学院数学与信息科学学院,四川内江 641112)

**摘　要：** 本文首先就广义量子loop程序(简记为GQLoop)的主体由比特翻转、去极化、幅值阻尼、相位阻尼等信道描述时,对它的终止(几乎终止)问题进行了研究.其次,讨论了两类GQLoop程序相互嵌套时loop程序的终止(几乎终止)的问题.研究表明:以量子运算的嵌套为主体的GQLoop程序终止(几乎终止)的条件依赖于刻画量子信道的参数.最后,当开放量子系统与其环境在酉运算下做为loop程序的主体时,讨论了在酉运算后去掉环境时的主系统上量子程序的执行过程.

**关键词：** 广义量子loop程序；量子运算；终止；几乎终止；复合量子系统

**中图分类号：** TP301.6　　**文献标识码：** A　　**文章编号：** 0372-2112 (2013)04-0727-06

**电子学报URL：** http://www.ejournal.org.cn　　**DOI：** 10.3969/j.issn.0372-2112.2013.04.017

# Some Properties of Generalized Quantum Loop Program

LEI Hong-xuan[1,2], XI Zheng-jun[1], LI Yong-ming[1]
(1. *School of Computer Science, Shaanxi Normal University, Xi'an, Shaanxi* 710062, *China*;
2. *School of Mathematics and Information Science, Neijiang Normal University, Neijiang, Sichuan* 641112, *China*)

**Abstract:** In this paper, the termination(almost termination) of generalized quantum loop program(for short GQLoop) is firstly investigated, where the loop bodies of GQLoop are described by bit flip channel, depolarizing channel, amplitude damping channel and phase damping channel, respectively. Secondly, when the loop bodies are the embedding of two kinds of GQLoop, the conditions of the termination(almost termination) of GQLoop are addressed. It shows that the conditions of the termination(almost termination) of GQLoop depend on the parameters occuring in the quantum channels. Finally, when the loop bodies are an unitary operation on the principle system and the environment under the open quantum system, after implementing unitary operation, the computed processing of the quantum program is discussed by performing a partial trace over the environment.

**Key words:** generalized quantum loop program; quantum operation; termination; almost termination; composite quantum system

## 1　引言

1994年,Shor[1]提出了著名的量子因子分解算法,1996年Grover[2]给出了量子搜索算法,它们显示出量子计算在某些计算领域比经典计算更有效[3].当前,量子算法还处在较低水平的量子线路的探索阶段.最近一些学者开始研究量子程序语言的设计和语义[4~14].比如,Knill[4]最先提出了设计量子程序语言,Ömer[6,7]第一次给出了真正的量子程序语言并对其进行了计算仿真,Sanders[8]和Zuliani[8~11]设计了GCL风格下的量子程序语言.按照Selinger[12]的观点,一个量子程序由超算子描述.李志强等作者[13]给出了四量子可逆逻辑电路快速综合算法,薛希玲等作者[14]较系统地阐述了量子线路仿真的分治算法.为了能以较小的代价自动高效地构造量子可逆逻辑电路,杨忠明等作者[15]提出了一种新颖的量子可逆逻辑电路综合方法.

最近,应明生教授等作者[16~18]详细研究了量子程序的Floyd-Hoare逻辑、量子loop程序和量子程序的验证问题,并在文献[17]中给出了主体是酉运算的量子loop程序及程序终止(几乎终止)的定义,给出了程序终止(几乎终止)的充要条件和量子态的计算函数,解决了几乎终止对噪声的敏感性等问题.同时指出当两个量子loop嵌套时主体不再是酉运算而是量子运算.本文作者在文献[17]的基础上提出了量子loop程序的主体是量子运算的量子loop程序,即广义量子loop程序(简记为GQLoop),讨论了它的终止(几乎终止)等问题.

收稿日期:2012-04-23;修回日期:2012-11-28
基金项目:国家自然科学基金(No.11271237,No.61228305)

本文首先在单量子比特空间上,选取测量算子为"yes-no"测量时,分别对 GQLoop 程序的主体由比特翻转、去极化、幅值阻尼、相位阻尼等信道描述时,GQLoop 程序的终止(几乎终止)问题进行了研究.其次,将上述信道按先后顺序的嵌套和外层 GQLoop 程序的输入态为内层 GQLoop 程序的终态的嵌套做为 GQLoop 程序的主体时它的终止(几乎终止)的情形进行了讨论,并给出了一些实例.在开放量子系统中,一个自然的问题是在主系统与环境构成的复合系统上执行量子 loop 时,主系统上是否也进行量子 loop,该问题也可以归结于嵌套问题.最后一部分重点讨论复合系统与子系统上 loop 的嵌套问题.

## 2 量子 loop 程序的基本概念

开放量子系统的动力学过程可以看成是主系统同相应环境之间的交互作用[3].设主系统-环境初始输入为一个积状态 $\rho\otimes\rho_{\mathrm{env}}$,在酉变换 $U$ 后,在环境上执行一个偏迹,得到开放系统的演化态,即

$$\varepsilon(\rho)=\mathrm{tr}_{\mathrm{env}}[U(\rho\otimes\rho_{\mathrm{env}})U^{\dagger}] \tag{1}$$

其中 $\varepsilon$ 是一个量子运算.令 $\{|e_k>\}$ 为环境 $E$ 的状态空间的一组标准正交基,不妨设 $\rho_{\mathrm{env}}=|0><0|$ 为环境的初始状态,则式(1)可以由 Kraus 算子和表示:

$\varepsilon(\rho)=\sum_k<e_k|U[\rho\otimes|0><0|]U^{\dagger}|e_k>=\sum_k E_k\rho E_k^{\dagger}$ 其中 $E_k=<e_k|U|0>$ 为主系统的状态空间上的一个算子,算子 $\{E_k\}$ 称为量子运算 $\varepsilon$ 的运算元[3].本文中,用 $D(H)$ 表示 Hilbert 空间 $H$ 上所有密度算子之集,$\mathrm{spec}(M)$ 表示算子 $M$ 的特征值之集.

下面介绍广义量子 loop 程序.假设有一个包含 $n$ 个量子系统 $q_1,q_2,\cdots,q_n$ 的量子寄存器,并且对于每个 $i\leqslant n$,$q_i$ 的状态空间是 $H_i$.设 $K$ 是复合空间 $H=\otimes_{i=1}^{n}H_i$ 上的一个量子运算,即 $K(\rho)=\sum_{i=1}^{d}E_i\rho E_i^{\dagger}$,其中 $E_i$ 是运算元,满足 $\sum_{i=1}^{d}E_i^{\dagger}E_i=I,\rho\in D(H),d=\dim(H)$.若算子 $M=\sum_m mP_m$ 是 $H$ 上可观测量,则对任意的 $X\subseteq\mathrm{spec}(M)$,量子运算下的 loop 程序(GQLoop)[19]由 $K,M$ 和 $X$ 定义为

$$while(M[\bar{q}]\in X)\{\bar{q}:=K(\bar{q})\} \tag{2}$$

其中,$\bar{q}$ 表示量子寄存器 $q_1,q_2,\cdots,q_n$.

设 $P_X=\sum_m P_m,P_{\bar{X}}=I_H-P_X=\sum_{m\in\mathrm{spec}(M)-X}P_m$,其中 $I_H$ 是 $H$ 上的单位算子.那么 GQLoop(2)的控制部分"$M\in X$"表示投影测量 $\{P_X,P_{\bar{X}}\}$ 在 $\bar{q}$ 上的作用.如果式(2)中的 $K$ 是酉变换,即运算元 $E_i$ 是酉矩阵时,量子 loop 程序的主体就是酉运算[17].

对任意输入态 $\rho_0=\rho\in D(H)$,如果 GQLoop(2)程序在前 $n-1$ 步是不终止的,那么在第 $n$ 步中,程序以 $p_T^{(n)}(\rho)=\mathrm{tr}(P_{\bar{X}}\rho_{\mathrm{in}}^{(n-1)})$ 的概率终止于量子态 $\rho_{\mathrm{out}}^{(n)}=\dfrac{P_{\bar{X}}\rho_{\mathrm{in}}^{(n-1)}P_{\bar{X}}}{p_T^{(n)}(\rho)}$,以 $p_{\mathrm{NT}}^{(n)}(\rho)=\mathrm{tr}(P_X\rho_{\mathrm{in}}^{(n-1)})$ 的概率继续进行 GQLoop(2)程序,且不终止的量子态为 $\rho_{\mathrm{mid}}^{(n)}=\dfrac{P_X\rho_{\mathrm{in}}^{(n-1)}P_X}{p_{NT}^{(n)}(\rho)}$,且 $\rho_{\mathrm{in}}^{(n)}=K(\rho_{\mathrm{mid}}^{(n)})$.

**定义 1**[19] 1.如果对某个正整数 $N$,有 $p_{\mathrm{NT}}^{(N)}(\rho)=0$,则称 GQLoop(2)在输入态 $\rho$ 上终止;

2.输入态 $\rho$ 上 GQLoop(2)不终止的概率定义为 $p_{\mathrm{NT}}(\rho)=\lim_{n\to\infty}p_{\mathrm{NT}}^{n+}(\rho)$,其中 $p_{\mathrm{NT}}^{n+}(\rho)=\prod_{i=1}^{n}p_{\mathrm{NT}}^{(i)}$ 表示在第 $n$ 步后 GQLoop(2)程序不终止的概率.特别地,记 $p_{\mathrm{NT}}^{0+}(\rho)=1$;

3.如果 $p_{\mathrm{NT}}(\rho)=0$,则称 GQLoop(2)在状态 $\rho$ 上几乎终止;

4.如果 $p_{\mathrm{NT}}(\rho)>0$,则称 GQLoop(2)在状态 $\rho$ 上不终止.

**定义 2**[19] 如果一个 GQLoop(2)在所有的输入态 $\rho\in D(H)$ 上都终止(几乎终止),则称它是终止的(几乎终止的).

设 $A$ 是 Hilbert 空间 $H$ 上的任意一个算子,记 $A_X=P_XAP_X$,其中 $P_X$ 是投影算子.对量子运算 $K:D(H)\to D(H)$ 在投影算子 $P_X$ 下的限制,记 $K_X(\rho)=P_XK(\rho)P_X=P_X(\sum_{i=1}^{d}E_i\rho E_i^{\dagger})P_X$.显然 $K_X$ 仍然是量子运算.记 $K_X^n$ 为 $K_X^n(\rho)=\overbrace{K_X(K_X(\cdots K_X}^{n\text{个}K_X}(\rho)\cdots))$.对任意的正整数 $n$,GQLoop(2)程序的计算函数[19]为:

$$F(\rho)=P_{\bar{X}}\rho P_{\bar{X}}+P_{\bar{X}}K\Big(\sum_{n=0}^{\infty}K_X^n(\rho_X)\Big)P_{\bar{X}}.$$

特别地,如果量子运算被酉变换代替时,GQLoop 程序将退化到文献[17]所定义的主体是酉变换的量子 loop 程序.然而,任意两个广义量子 loop 程序嵌套后是否仍然是一个广义量子 loop 程序? 由于不知道程序的终止情况,嵌套后的情形变的比较复杂.一般地,对于每一个 $\rho\in D(H)$,有 $\mathrm{tr}(F(\rho))=1-p_{\mathrm{NT}}(\rho)$.根据定义 1,$F(\rho)\in D(H)$ 当且仅当广义量子 loop 程序在输入态 $\rho$ 上几乎终止.在这种情况下,该广义量子 loop 程序可以构造一个量子运算.设 $L_1$ 和 $L_2$ 是两个广义量子 loop 程序,且 $L_1$ 是几乎终止的,则将 $L_1$ 嵌入 $L_2$ 后得到一个新的广义量子 loop 程序.

## 3 几种量子信道下 GQLoop 程序的终止

本节中,分别考虑比特翻转信道、去极化信道、幅值阻尼信道、相位阻尼信道作为广义量子 loop 程序的主体时,GQLoop(2)程序的终止(几乎终止)的情况.不

失一般性,选取测量算子为"yes-no"测量,即 $M_0 = |0\rangle\langle 0|$, $M_1 = |1\rangle\langle 1|$测量算子.本节仅考虑单量子比特系统,也即二维的 Hilbert 空间 $H_2$.设 $\rho_0 \in D(H_2)$是初始态,其中 $\rho_0 = |\varphi_0\rangle\langle\varphi_0|$, $|\varphi_0\rangle = \alpha|0\rangle + \sqrt{1-\alpha^2}|1\rangle$为单量子比特,$\alpha$ 为实数.用 $\boldsymbol{I},\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}$ 分别表示单位矩阵、Pauli-X 矩阵、Pauli-Y 矩阵、Pauli-Z 矩阵[3].

(1) 比特翻转信道

比特翻转信道的运算元为 $E_{10} = \sqrt{p}\boldsymbol{I}$, $E_{11} = \sqrt{1-p}\boldsymbol{X}$, $0 \leqslant p \leqslant 1$.它的 Kraus 算子和为 $K_1(\rho_0) = \sum_{i=0}^{1} E_{1i}\rho_0 E_{1i}^{\dagger}$.经过简单的计算可得

$$K_{1X}^{n}(\rho_0) = p^{n-1}[(1-\alpha^2)p + \alpha^2(1-p)]|1\rangle\langle 1|,$$

$$P_{\mathrm{NT}}^{n+}(\rho_0) = \mathrm{tr}(K_{1X}^{n-1}(\rho_0)) = p^{n-2}[(1-\alpha^2)p + \alpha^2(1-p)].$$

**命题 1**　($i$)当 $0 < p < 1$ 时,GQLoop(2)程序的主体由比特翻转信道 $K_1$ 描述时是几乎终止的;($ii$)当$|\alpha| = 1$, $p = 1$ 或 $p = 0$ 时,GQLoop(2)程序的主体由比特翻转信道 $K_1$ 描述时是终止的.

(2) 去极化信道

去极化信道的运算元为 $E_{20} = \frac{\sqrt{4-3p}\boldsymbol{I}}{2}$, $E_{21} = \frac{\sqrt{p}\boldsymbol{X}}{2}$, $E_{22} = \frac{\sqrt{p}\boldsymbol{Y}}{2}$, $E_{23} = \frac{\sqrt{p}\boldsymbol{Z}}{2}$, $0 \leqslant p \leqslant 1$.它的 Kraus 算子和为 $K_2(\rho_0) = \sum_{i=0}^{3} E_{2i}\rho_0 E_{2i}^{\dagger}$.

经过简单的计算可得

$$K_{2X}^{n}(\rho_0) = (1-\alpha^2)\left(1-\frac{1}{2}p\right)^{n}|1\rangle\langle 1|,$$

$$P_{\mathrm{NT}}^{n+}(\rho_0) = \mathrm{tr}(K_{2X}^{n-1}(\rho_0)) = (1-\alpha^2)\left(1-\frac{1}{2}p\right)^{n-1}.$$

**命题 2**　($i$)当 $0 < p \leqslant 1$,GQLoop(2)程序的主体由去极化信道 $K_2$ 描述时是几乎终止的;($ii$)当$|\alpha| = 1$,即 $\rho_0 = |0\rangle\langle 0|$为计算基态时,GQLoop(2)程序的主体由去极化信道 $K_2$ 描述时是终止的.

(3)幅值阻尼信道

幅值阻尼信道的运算元为 $E_{30} = diag(1,\sqrt{1-\gamma})$, $E_{31} = anti-diag(0,\sqrt{\gamma})$, $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$ 可认为是丢失一个光子的概率[3].它的 Kraus 算子和为 $K_3(\rho_0) = \sum_{i=0}^{1} E_{3i}\rho_0 E_{3i}^{\dagger}$.经过简单的计算可得

$$K_{3X}^{n}(\rho_0) = (1-\alpha^2)(1-\gamma)^{n}|1\rangle\langle 1|,$$

$$P_{\mathrm{NT}}^{n+}(\rho_0) = \mathrm{tr}(K_{3X}^{n-1}(\rho_0)) = (1-\alpha^2)(1-\gamma)^{n-1}.$$

**命题 3**　($i$)当 $0 < \gamma < 1$ 时,GQLoop(2)程序的主体由幅值阻尼信道 $K_3$ 描述时是几乎终止的;($ii$)当 $\gamma = 1$ 或$|\alpha| = 1$,即 $\rho_0 = |0\rangle\langle 0|$为计算基态时,GQLoop(2)程序的主体由幅值阻尼信道 $K_3$ 描述时是终止的.

(4)相位阻尼信道

相位阻尼信道的运算元为 $E_{40} = diag(1,\sqrt{1-p})$, $E_{41} = diag(0,\sqrt{p})$, $0 \leqslant p \leqslant 1$ 可以认为是来自系统的一个光子没有能量损失时散射的概率[3].它的 Kraus 算子和为 $K_4(\rho_0) = \sum_{i=0}^{1} E_{4i}\rho_0 E_{4i}^{\dagger}$.经过简单的计算可得

$$K_{4X}^{n}(\rho_0) = (1-\alpha^2)|1\rangle\langle 1|,$$

$$P_{\mathrm{NT}}^{n+}(\rho_0) = \mathrm{tr}(K_{4X}^{n-1}(\rho_0)) = 1-\alpha^2.$$

**命题 4**　当$|\alpha| = 1$,即 $\rho_0 = |0\rangle\langle 0|$为计算基态时,GQLoop(2)程序的主体由相位阻尼信道 $K_4$ 描述时是终止的.

## 4　几种常用信道相互嵌套在 GQLoop 下的性质

本节我们将讨论比特翻转信道、去极化信道、幅值阻尼信道、相位阻尼信道的相互嵌套在量子运算 $K$ 作用下作为 GQLoop 程序的主体时,GQLoop(2)程序的终止(几乎终止)的情况.由于这四种信道相互嵌套的情况很多,其分析基本类似,我们选择其中 2 个有典型意义的信道讨论如下:

设 $K_1(\rho_0)$, $K_3(\rho_0)$分别为比特翻转信道和幅值阻尼信道的 Kraus 算子和表示.

(1) 量子运算先作用在比特翻转信道上后作用在幅值阻尼信道上的嵌套

经过简单的计算可得

$$(K_{3X}K_{1X})^{n}(\rho_0) = [(1-\alpha^2)p + \alpha^2(1-p)]p^{n-1}(1-\gamma)^{n}|1\rangle\langle 1|,$$

$$P_{\mathrm{NT}}^{n+}(\rho_0) = [(1-\alpha^2)p + \alpha^2(1-p)]p^{n-2}(1-\gamma)^{n-1}.$$

**命题 5**　($i$)当 $p = 0$ 时,GQLoop(2)程序的主体由 $K_3K_1$ 描述时是终止的;($ii$)当 $0 < p < 1$ 时,GQLoop(2)程序的主体由 $K_3K_1$ 描述时是几乎终止的;($iii$)当 $0 < \gamma < 1$ 时,GQLoop(2)程序的主体由 $K_3K_1$ 描述时是几乎终止的;($iv$)当 $\gamma = 1$ 时,GQLoop(2)程序的主体由 $K_3K_1$ 描述时是终止的;($v$)当$|\alpha| = 1$, $p = 1$, $\gamma = 0$ 时,GQLoop(2)程序的主体由 $K_3K_1$ 描述时是终止的.

(2)量子运算先作用在幅值阻尼信道后作用在比特翻转信道上的嵌套

经过简单的计算可得

$$(K_{1X}K_{3X})^{n}(\rho_0) = (1-\alpha^2)(1-\gamma)^{n}p^{n}|1\rangle\langle 1|,$$

$$P_{\mathrm{NT}}^{n+}(\rho_0) = (1-\alpha^2)(1-\gamma)^{n-1}p^{n-1}.$$

**命题 6**　($i$)当 $p = 0$ 时,GQLoop(2)程序的主体由 $K_1K_3$ 描述时是终止的;($ii$)当 $0 < p < 1$ 时,GQLoop(2)程序的主体由 $K_1K_3$ 描述时是几乎终止的;($iii$)当 $0 < \gamma < 1$ 时,GQLoop(2)程序的主体由 $K_1K_3$ 描述时是几乎终止的;($iv$)当 $\gamma = 1$ 时,GQLoop(2)程序的主体由 $K_1K_3$ 描述时是终止的;($v$)当$|\alpha| = 1$, $p = 1$, $\gamma = 0$ 时,GQLoop(2)程序的主体由 $K_1K_3$ 描述时是终止的.

以上两个命题表明,尽管两个量子程序结合的前后顺序和非终止的概率 $P_{\mathrm{NT}}^{n+}(\rho_0)$不一样,但它们在相同条件下终止(几乎终止)的结果是一致.但通过对本文所讨论的四种常用量子程序嵌套的分析可知,任意两个量子程序结合的先后顺序不同也会导致不同的结论,嵌套后的 GQLoop 程序的终止(几乎终止)的情况变得比较复杂.然而,当一个 GQLoop 程序的输入态为另一个 GQLoop 程序的终态时,这种嵌套下的 GQLoop(2)程序的终止(几乎终止)的情况如何,我们分析如下:

(3) $K_3$ 描述的 GQLoop 程序的输入态为 $K_1$ 描述的 GQLoop 程序终态的嵌套

首先计算 $K_1$ 描述的 GQLoop 程序的终态 $F_1(\rho_0)$.经过简单的计算有

$$\rho_{0X}=M_1\rho_0M_1=(1-\alpha^2)|1><1|,$$

$$F_1(\rho_0)=(1-\alpha^2)\frac{1}{1-p}|1><1|,0<p<1.$$

此时 $F_1(\rho_0)$作为 $K_3$ 描述的 GQLoop 程序的输入态,经计算有:

$$K_{3X}^n(F_1(\rho_0))=(1-\alpha^2)\frac{1}{1-p}(1-\gamma)^n|1><1|,$$

$$P_{\mathrm{NT}}^{n+}(F_1(\rho_0))=(1-\alpha^2)\frac{1}{1-p}(1-\gamma)^{n-1},0<p<1.$$

因为当$|\alpha|=1,p=1$ 时,GQLoop(2)程序的主体由 $K_1$ 描述时是终止的,此时 $\rho_{0X}=0$,这时 $F_1(\rho_0)=0$ 没有必要做为 GQLoop(2)程序的主体由 $K_3$ 描述时的输入态,因此有如下结论:

**命题 7** 设$|\alpha|\neq 1,0<p<1$,GQLoop(2)程序的主体由 $K_3$ 描述,并以由 $K_1$ 描述时的终态作为输入态,则这种嵌套的 GQLoop 程序终止(几乎终止)的情况如下:($i$)当 $0<\gamma<1$ 时,GQLoop(2)程序的主体由 $K_3$ 描述时在输入态 $F_1(\rho_0)$上是几乎终止的;($ii$)当 $\gamma=1$ 时,GQLoop(2)程序的主体由 $K_3$ 描述时在输入态 $F_1(\rho_0)$上是终止的.

以上结论与命题 3 的结论是类似的,这说明 GQLoop(2)程序的主体由 $K_3$ 描述时终止(几乎终止)对输入态的选取不敏感,而对 $\gamma$ 的取值很敏感.

(4) $K_1$ 描述的 GQLoop 程序的输入态为 $K_3$ 描述的 GQLoop 程序终态的嵌套

类似的计算可得

$$F_3(\rho_0)=(1-\alpha^2)\frac{1}{\gamma}|1><1|,0<\gamma<1.$$

此时 $F_3(\rho_0)$作为 $K_1$ 描述的 GQLoop 程序的输入态,经计算有:

$$K_{1X}^n(F_3(\rho_0))=(1-\alpha^2)\frac{1}{\gamma}p^n|1><1|,$$

$$P_{\mathrm{NT}}^{n+}(F_3(\rho_0))=(1-\alpha^2)\frac{1}{\gamma}p^{n-1},0<\gamma<1.$$

因为当$|\alpha|=1$,或 $\gamma=1$ 时,GQLoop(2)程序的主体由 $K_3$ 描述时是终止的,此时 $\rho_{0X}=0$,这时 $F_3(\rho_0)=0$ 没有必要做为 GQLoop(2)程序的主体由 $K_1$ 描述时的输入态,因此有如下结论:

**命题 8** 设$|\alpha|\neq 1,0<\gamma<1$,GQLoop(2)程序的主体由 $K_1$ 描述,并以由 $K_3$ 描述时的终态作为输入态,则这种嵌套的 GQLoop 的终止(几乎终止)情况如下:($i$)当 $0<p<1$ 时,GQLoop(2)程序的主体由 $K_1$ 描述时在输入态 $F_1(\rho_0)$上是几乎终止的;($ii$)当 $p=0$ 时,GQLoop(2)程序的主体由 $K_1$ 描述时在输入态 $F_1(\rho_0)$上是终止的.

上面结论与命题 1 的结论是类似的,这说明 GQLoop(2)程序的主体由 $K_1$ 描述时的终止(几乎终止)对输入态的选取不敏感,而对 $p$ 的取值很敏感.

通过对以上两个命题的分析可知,当一个 GQLoop 程序的输入态为另一个 GQLoop 程序的终态时,这种嵌套的情况很复杂.因为当被嵌套的 GQLoop 程序终止时,它的终态为 0,就不能作为外层 GQLoop 程序的输入态.结果表明,当内层 GQLoop 程序的输入态为纯态时,它的终态也是纯态,也就是说外层 GQLoop 程序的输入态为纯态.一般来说,这种嵌套极大地依赖于内外量子程序中参数的选取.

## 5 复合系统与子系统上的 Loop 程序

在前面我们选取纯态和简单的测量算子讨论了几类量子信道作为量子 loop 程序主体时的终止(几乎终止)情况,同时也考虑了它们之间的嵌套.现在一个自然的问题是,在复合系统上执行 loop 程序时,子系统上是否也存在一个相应的 loop.基于主系统与环境之间的关系,这节我们将回答这个问题.不妨设主系统和环境在酉变换下执行 loop 程序,下面考虑该复合系统在 loop 后得到的主量子系统上的态是否可以等价于主系统上相应的量子运算执行的 loop 程序.我们将考虑控制非门诱导的 loop 情形.

设主系统是一个单量子比特主系统,它通过控制非门变换

$$U=P_0\otimes \boldsymbol{I}+P_1\otimes \boldsymbol{X}$$

与环境产生交互作用.其中 $\boldsymbol{X}$ 为 Pauli 矩阵,$P_0=|0><0|$,$P_1=|1><1|$为投影算子.假定环境从状态$|e_0>=|0>$出发,设主系统处于状态 $\rho$,则

$$E_0\equiv<0|U|0>=|0><0|,E_1\equiv<1|U|0>=|1><1|,$$

于是

$$U(\rho\otimes|0><0|)U^{\dagger}=\sum\nolimits_{i,j=0}^{1}E_i\rho E_j^{\dagger}\otimes|i><j|.$$

记 $\tilde{\rho}=U(\rho\otimes|0><0|)U^{\dagger}$,首先考虑使用 $M_1\otimes \boldsymbol{I}$ 对 $\tilde{\rho}$ 进行测量,之后再进行 $U$ 演化,得到

$$(M_1\otimes \boldsymbol{I})\tilde{\rho}(M_1\otimes \boldsymbol{I})=M_1\rho M_1\otimes|1><1|,$$

$U(M_1\rho M_1\otimes|1><1|)U^{\dagger}=E_1\rho E_1\otimes|0><0|$.

上述过程经过 $n$ 次后,进行第 $n+1$ 次测量得到 $M_1\rho M_1\otimes|1><1|$,此时

$P_{NT}^{n+}(\bar{\rho})=\mathrm{tr}(M_1\rho M_1\otimes|1><1|)=\mathrm{tr}(M_1\rho)$.

而 $\varepsilon(\rho)=\mathrm{tr}_{env}(U(\rho\otimes|0><0|)U^{\dagger})=E_0\rho E_0^{\dagger}+E_1\rho E_1^{\dagger}$,经过简单的计算可得 $\varepsilon_X^n(\rho)=M_1\rho M_1$, $P_{NT}^{n+}(\rho)=\mathrm{tr}(M_1\rho)$.

通过以上分析可得,在复合系统上执行 loop 程序时,在测量算子 $M_1\otimes \boldsymbol{I}$ 作用下 loop 程序在输入态 $\rho\otimes|0><0|$ 上终止(几乎终止)的结果同主系统上执行 GQLoop 程序时在输入态 $\rho$ 上终止(几乎终止)的结果一致.

其次,用测量算子 $\boldsymbol{I}\otimes M_1$ 对 $\bar{\rho}$ 进行测量,再进行 $U$ 演化,得到

$(\boldsymbol{I}\otimes M_1)\bar{\rho}(\boldsymbol{I}\otimes M_1)=M_1\rho M_1\otimes|1><1|$,

$U(M_1\rho M_1\otimes|1><1|)U^{\dagger}=E_1\rho E_1\otimes|0><0|$,

再测量后得

$(\boldsymbol{I}\otimes M_1)(E_1\rho E_1\otimes|0><0|)(\boldsymbol{I}\otimes M_1)=0$.

此时 $P_{NT}^{n+}(\bar{\rho})=0$,但是 $P_{NT}^{n+}(\rho)=\mathrm{tr}(M_1\rho)$.

通过以上分析可得,复合系统作为 loop 程序的主体在测量算子 $\boldsymbol{I}\otimes M_1$ 作用下 GQLoop 程序在输入态 $\rho\otimes|0><0|$ 上是终止的,但在环境上执行一个偏迹得到主系统的约化状态做为 GQLoop 程序的主体时 GQLoop 程序在输入态 $\rho$ 上终止的概率为 $\mathrm{tr}(M_1\rho)$.

最后,用测量算子 $M_1\otimes M_1$ 对 $\bar{\rho}$ 进行测量,再进行 $U$ 演化,得到

$(M_1\otimes M_1)\bar{\rho}(M_1\otimes M_1)=M_1\rho M_1\otimes|1><1|$,

$U(M_1\rho M_1\otimes|1><1|)U^{\dagger}=E_1\rho E_1\otimes|0><0|$,

再测量后得

$(M_1\otimes M_1)(E_1\rho E_1\otimes|0><0|)(M_1\otimes M_1)=0$.

此时 $P_{NT}^{n+}(\bar{\rho})=0$,但是 $P_{NT}^{n+}(\rho)=\mathrm{tr}(M_1\rho)$.

进一步分析可得,复合系统作为 loop 程序的主体在测量算子 $M_1\otimes M_1$ 作用下 GQLoop 程序在输入态 $\rho\otimes|0><0|$ 上是终止的,但在环境上执行一个偏迹得到主系统的约化状态做为 GQLoop 程序的主体时 GQLoop 程序在输入态 $\rho$ 上终止的概率为 $\mathrm{tr}(M_1\rho)$.

通过以上三种情况的分析我们得到如下结论:

在复合系统上执行酉变换的 loop 程序时,在不同的测量算子下得到不同的结果.同时,在子系统上不一定再执行 loop 程序.子系统上是否执行 loop 程序与复合系统上的测量有直接关系.

## 6 结论

本文分别对 GQLoop 程序的主体由比特翻转、去极化、幅值阻尼、相位阻尼等量子信道描述时,GQLoop 程序终止(几乎终止)等问题进行了研究.由于上述任意两个信道描述的量子运算的嵌套仍为一个量子运算,我们讨论了它们相互嵌套后做为 GQLoop 程序的主体时 GQLoop 程序终止(几乎终止)的问题,并给出了几个例子予以说明.研究表明:不管是两个量子信道按先后顺序的嵌套还是外层 GQLoop 程序的输入态为内层 GQLoop 程序的终态的嵌套,GQLoop 程序终止(几乎终止)的情况变得较为复杂,对刻画量子信道的参数的选取要求较高.最后我们对酉运算描述的复合系统中主系统-环境在酉运算 $U$ 下做为 loop 程序的主体及在环境上执行一个偏迹得到主系统单独的约化状态做为 loop 程序的主体问题进行了探讨,发现复合系统做为 loop 程序的主体在不同测量算子作用下 loop 程序终止(几乎终止)的结果同主系统的约化状态做为 loop 程序的主体时 loop 程序终止(几乎终止)的结果不一致,即就是说,复合量子系统在酉运算下对不同的测量算子的影响很敏感,有的测量算子对复合系统测量后主系统不再是一个量子 loop.从而,本文很好的回答和解决了文献[17]中提出的一个公开问题,即量子 loop 程序的主体不是酉运算而是量子运算时量子 loop 程序终止(几乎终止)的判定问题.

### 参考文献


[1] P W Shor. Algorithms for quantum computation: Discrete logarithms and factoring[A]. Proceedings of 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science[C]. Los Alamitos, CA: IEEE Press, 1994. 124 – 134.

[2] L Grover. A fast quantum mechanical algorithm for database search[A]. Proceedings of 28th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing[C]. New York: ACM Press, 1996. 212 – 219.

[3] M A Nielsen, Chuang I L. Quantum Computation and Quantum Information[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

[4] E H Knill. Conventions for quantum pseudocode[R]. LAUR-96-2724, LANL Report, 1996.

[5] E D'Hondt, P Panangaden. Quantum weakest preconditions [J]. Mathematical Structures in Computer Science, 2006, 16: 429 – 451.

[6] B Ömer. A procedural formalism for quantum computing[D]. Vienna: Technical University of Vienna, 1998.

[7] B Ömer. Structured quantum programming[D]. Vienna: Technical University of Vienna, 2003.

[8] J W Sanders, P Zuliani. Quantum programming[A]. Proceedings of Mathematics of Program Construction 2000[C]. German: Springer, 2000. 80 – 99.

[9] P Zuliani. Quantum programming[D]. UK: Oxford University,

2001.
[10] P Zuliani.Compiling quantum program[J].Acta Informatica,2005,41:435 – 474.
[11] P Zuliani.Quantum programming with mixed states[J].Electronic Notes in Theoretical Computer Science,2007,170:185 – 199.
[12] P Selinger.Towards a quantum programming language[J].Mathematics Structures in Computer Science,2004,14(4):527 – 586.
[13] 李志强,陈汉武,徐宝文,肖芳英,薛希玲.四量子可逆逻辑电路快速综合算法[J].电子学报,2008,36(11):2081 – 2089.
LI Zhi-qiang,CHEN Han-wu,XU Bao-wen,XIAO Fang-ying,XUE Xi-ling.Fast algorithms for 4-qubit reversible logic circuits synthesis[J].Acta Electronica Sinica,2008,36(11):2081 – 2089.(in Chinese)
[14] 薛希玲,陈汉武,刘志昊,李志强.量子线路仿真的分治算法[J].电子学报,2010,38(2):339 – 342.
XUE Xi-ling,CHEN Han-wu,LIU Zhi-hao,LI Zhi-qiang.Divide and conquer algorithms for quantum circuit simulation[J].Acta Electronica Sinica,2010,38(2):339 – 342.(in Chinese)
[15] 杨忠明,陈汉武,王冬.基于二分法量子可逆逻辑电路综合[J].电子学报,2012,40(5):1045 – 1049.
YANG Zhong-ming,CHEN Han-wu,WANG Dong.Qubits reversible logic circuits synthesis based on bisection method[J].Acta Electronica Sinica,2012,40(5):1045 – 1049.(in Chinese)
[16] M S Ying.Floyd-Hoare Logic for quantum programs[J].ACT Transactions on Programming Languages and Systems,2011,33(6):19 – 49.
[17] M S Ying,Y Feng.Quantum loop programs[J].Acta Informatica,2010,47(4):221 – 250.
[18] M S Ying,N K Yu,Y Feng,R Y Duan.Verification of quantum programs[DB/OL].http://arxiv.org/abs/Quant-ph/1106.4063v1,2011.
[19] 李小鹏.广义量子 loop 程序[D].西安:陕西师范大学,2011.
X P Li.General quantum loop program[D].Xi′an:Shaanxi Normal University,2011.
[20] Y J Li,N K Yu,M S Ying.Termination of nodeterministic quantum programs[DB/OL].http://arxiv.org/abs/Quant-ph/1201.0891v1,2012.
[21] N K Yu,M S Ying.Reachability and termination analysis of concurrent quantum programs[DB/OL].http://arxiv.org/abs/Quant-ph/1206.1935v1,2012.
[22] M S Ying,N K Yu,Y Feng.Defining quantum control flow[DB/OL].http://arxiv.org/abs/Quant-ph/1209.4379v1,2012.

## 作者简介

**雷红轩** 男,1967 年出生于陕西洋县,博士研究生,副教授,主要研究领域为量子程序验证和量子模型检测.
E-mail:leihx2004@yahoo.com.cn

**席政军** 男,1983 年出生于甘肃会宁,博士,主要研究领域为量子信息论与量子程序语言.

**李永明** 男,1966 年出生于陕西大荔,博士,教授,博士生导师,研究方向为计算智能、量子逻辑、量子计算、模型检测.