

一种有效的相干噪声背景下宽带相干信号 DOA 估计算法

张 进¹, 叶中付², 毛云祥¹

(1. 电子工程学院, 安徽合肥 230027; 2. 中国科学技术大学, 安徽合肥 230027)

摘 要: 利用均匀线阵, 本文提出了一种有效的相干噪声下宽带相干信号 DOA 估计算法. 首先, 在各个频率点, 利用空间差分技术消除噪声分量, 并通过平方操作构造新矩阵; 然后, 通过聚焦操作得到通用的协方差矩阵; 最后, 通过使用传播算法估计得到宽带相干信号的 DOA. 算法能够分辨的相干组中相干信号的个数可以是奇数或是偶数. 仿真结果验证了算法的有效性和性能.

关键词: 宽带相干信号; DOA 估计; 均匀线阵; 空间相关噪声; 传播算法

中图分类号: TN911.23 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2013)07-1278-06

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2013.07.006

An Efficient DOA Estimation Method for Wideband Coherent Signals in the Presence of Correlated Noise

ZHANG Jin¹, YE Zhong-fu², MAO Yun-xiang¹

(1. Electronic Engineering Institute, Hefei, Anhui 230027, China;

2. Department of Electronic Engineering and Information Science, USTC, Hefei, Anhui 230027, China)

Abstract: In this paper, we propose an efficient direction of arrival estimation method for wideband coherent signals in the presence of correlated noise with uniform linear array. Firstly, the component of correlated noise is eliminated by using the spatial differencing technique and then a new matrix is constructed by performing the squaring operation at each frequency bin. Afterwards, a universal covariance matrix is obtained by performing a focusing operation. Finally, the coherent signals are resolved by applying the propagator method. The signal number in a coherent group resolved by the proposed method can be even or odd. Simulation results demonstrate the effectiveness and performance of the proposed method.

Key words: wideband coherent signal; direction-of-arrival estimation; uniform linear array; spatially correlated noise; propagator method

1 概述

宽带信号广泛应用于如雷达、无线通信等领域中, 宽带信号 DOA 估计已经成为一个研究热点. 宽带信号 DOA 估计算法^[1~6]大多分成两类即非相干信号子空间算法 (ISSM: Incoherent Signal-Subspace Method)^[1]和相干信号子空间算法 (CSSM: Coherent Signal-Subspace Method)^[2,3], 两类算法都先将阵列输出分解成多个窄带信号. ISSM 随后对各个窄带信号应用 MUSIC 算法^[7], 得到初始 DOA 估计值, 再通过组合平滑得到最终 DOA 估计值. 虽然 ISSM 在高信噪比时简单且有效, 但在低信噪比时估计性能较差, 且不能直接处理相干信号. CSSM 利

用构造的聚焦矩阵对各窄带信号进行对齐平滑得到通用协方差矩阵, 再使用窄带算法得到 DOA 估计值. CSSM 能够直接处理相干信号并具有较高估计精度, 但大多需要预估 DOA 值并对其敏感.

多数的高分辨算法假设阵列噪声是空间白噪声, 但是实际中的噪声常常相关. 文献[8,9]提出的相干噪声下算法, 只适用于窄带信号; 文献[10]提出的相干噪声下 DED (Differencing and Eigen Decomposition) 和 MDED (Modified Differencing and Eigen Decomposition) 算法仅适用于相干组中含有两个宽带相干信号的场合; 文献[11]提出的差分相干传播算法 (DCPM: Differencing Coherent Propagation Method) 也只能用于相干组中仅有两个信号

的场合。

在相关噪声下,利用均匀线阵(ULA:Uniform Linear Array),本文提出一种低复杂度的宽带相干信号 DOA 估计算法。在各频率点上,先通过差分技术去除噪声分量;再通过平方操作构造新矩阵,并进行聚焦处理得到通用矩阵;最后使用传播算法得到信号 DOA 估计值。算法中的阵列噪声具有 Toeplitz 型协方差矩阵,并经常出现在声呐系统中。理论分析和仿真实验均表明算法能够解决相干组中含有奇数或偶数个宽带信号的 DOA 估计问题。

2 信号模型

考虑 K 个宽带相干信号分别从 $\theta_k, k=1, \dots, K$ 入射到由 M 个各向同性传感器组成的 ULA 上, K 个信号源自 D 个具有重叠带宽 B 的无关远场源 $s_d(t), d=1, \dots, D$, 满足 $K = \sum_{d=1}^D P_d < M$, 其中 $P_d > 1$ 表示第 d 个远场源产生的多径相干信号个数。阵列噪声是具有 Toeplitz 型协方差矩阵的相关噪声,且与信号不相关。

第 m 个阵元接收信号为

$$x_m(t) = \sum_{d=1}^D \sum_{p=1}^{P_d} a_{dp} s_d(t - t_{dp} - \tau_{md_p}) + n_m(t), \quad m=1, \dots, M \quad (1)$$

其中, $n_m(t)$ 表示第 m 个阵元噪声, $s_{dp}(t) = s_d(t - t_{dp})$ 表示 $s_d(t)$ 的第 p 个多径信号, t_{dp} 和 a_{dp} 分别表示其时间延迟和衰减系数,为了便于描述设 $a_{dp} = 1, \tau_{md_p} = (m-1)d_0 \sin \theta_{dp}/c$ 表示传播延迟, d_0 为阵元间距, c 为传播速度和 θ_{dp} 为 $s_{dp}(t)$ 的方向。

当观测时间足够长时,利用离散傅里叶变换得到阵列接收信号的频域模型

$$\mathbf{x}(f_j) = \mathbf{A}(f_j) \mathbf{s}(f_j) + \mathbf{n}(f_j), \quad j=1, \dots, J \quad (2)$$

其中, $\mathbf{A}(f_j) = [\mathbf{A}_1(f_j), \dots, \mathbf{A}_D(f_j)]$,

$$\mathbf{A}_d(f_j) = [\mathbf{a}(f_j, \theta_{d_1}), \dots, \mathbf{a}(f_j, \theta_{d_{P_d}})],$$

$$\mathbf{a}(f_j, \theta_{d_p}) = [1, \dots, e^{-i2\pi f_j(M-1)d \sin \theta_{dp}/c}]^T, i = \sqrt{-1},$$

$$\mathbf{x}(f_j) = [x_1(f_j), \dots, x_M(f_j)]^T,$$

$$\mathbf{s}(f_j) = [s_1(f_j) \boldsymbol{\rho}_1^T(f_j), \dots, s_D(f_j) \boldsymbol{\rho}_D^T(f_j)]^T,$$

$$\mathbf{n}(f_j) = [n_1(f_j), \dots, n_M(f_j)]^T,$$

$$\boldsymbol{\rho}_d(f_j) = [\rho_{d_1}(f_j), \dots, \rho_{d_{P_d}}(f_j)]^T,$$

$$\rho_{d_p}(f_j) = e^{-i2\pi f_j t_{dp}}, \text{上标 T 表示转置。}$$

阵列协方差矩阵 $\mathbf{R}_x(f_j) = \mathbf{A}(f_j) \mathbf{R}_s(f_j) \mathbf{A}^H(f_j) + \mathbf{Q}(f_j)$, 其中 $\mathbf{R}_s(f_j)$ 、 $\mathbf{Q}(f_j)$ 分别表示信号、噪声的协方差矩阵, 上标 H 表示共轭转置。通过对阵列协方差矩阵进行相干聚焦处理如 RSS, 可以估计得到信号 DOA。然而, CSSM 的估计性能依赖于 DOA 预估值。当噪声相关时,

DOA 预估值的误差将增大, 导致 CSSM 的估计性能恶化。

因此, 为了消除相关噪声的影响, 本文提出了低复杂度的宽带相干信号 DOA 估计算法。

3 本文算法

显然, 阵列协方差矩阵可表述成

$$\mathbf{R}_x(f_j) = \mathbf{R}_{NT}(f_j) + \mathbf{R}_T(f_j) \quad (3)$$

其中, $\mathbf{R}_{NT}(f_j)$ 表示相干信号的非 Toeplitz 矩阵, $\mathbf{R}_T(f_j)$ 表示相关噪声的 Toeplitz 矩阵满足 $\mathbf{E} \mathbf{R}_T^T(f_j) \mathbf{E} = \mathbf{E} \mathbf{R}_T^*(f_j) \mathbf{E} = \mathbf{R}_T(f_j)$, \mathbf{E} 表示反对角元素为 1、其他元素为 0 的交换矩阵, 上标 * 表示共轭。差分处理后有 $\Delta \mathbf{R}_x(f_j) = \mathbf{R}_x(f_j) - \mathbf{E} \mathbf{R}_x^T(f_j) \mathbf{E} = \mathbf{R}_{NT}(f_j) - \mathbf{E} \mathbf{R}_{NT}^T(f_j) \mathbf{E}$, 从而消除了 Toeplitz 型相关噪声和非相关信号的影响, 仅保留相干信号的信息。进一步, 有

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{R}_x(f_j) &= \sum_{d=1}^D \Delta \mathbf{R}_{xd}(f_j) \\ &= \mathbf{A}(f_j) \text{blkdiag}\{\Delta \mathbf{R}_{s1}(f_j), \dots, \Delta \mathbf{R}_{sD}(f_j)\} \mathbf{A}^H(f_j) \end{aligned} \quad (4)$$

其中, $\Delta \mathbf{R}_{xd}(f_j) = \mathbf{A}_d(f_j) \Delta \mathbf{R}_{sd}(f_j) \mathbf{A}_d^H(f_j)$, $\Delta \mathbf{R}_{sd}(f_j) = \mathbf{R}_{sd}(f_j) - \boldsymbol{\Phi}_d(f_j) \mathbf{R}_{sd}^T(f_j) \boldsymbol{\Phi}_d^*(f_j)$, $\boldsymbol{\Phi}_d(f_j) = \text{diag}\{e^{i2\pi f_j \tau_{d_1}}, \dots, e^{i2\pi f_j \tau_{d_{P_d}}}\}$ 。相干聚焦处理得通用差分矩阵

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{R}_x &= \sum_{j=1}^J \mathbf{T}_\beta(f_j) \Delta \mathbf{R}_x(f_j) \mathbf{T}_\beta^H(f_j) \\ &= \mathbf{A}(f_0) \text{blkdiag}\left\{\sum_{j=1}^J \Delta \mathbf{R}_{s1}(f_j), \dots, \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \Delta \mathbf{R}_{sD}(f_j)\right\} \mathbf{A}^H(f_0) \end{aligned} \quad (5)$$

其中, $\mathbf{T}_\beta(f_j)$ 为聚焦矩阵如 RSS 聚焦矩阵, $\boldsymbol{\beta}$ 为由低分辨率算法得到的 DOA 预估值, f_0 为参考频率, 符号 blkdiag 表示块对角矩阵。

命题 1 当 $M \geq K$ 和 $J \geq \lceil P_{\max}/2 \rceil$ 时, $\text{rank}(\Delta \mathbf{R}_x) = K - K_0$ 。其中, P_{\max} 表示最大相干组的尺寸, K_0 表示包含奇数个相干信号的相干组的组数, $\lceil P_{\max}/2 \rceil$ 表示取不小于 $P_{\max}/2$ 的最小整数。

命题 1 的证明与文献[12]类同, 这里不再赘述。根据命题 1 可知, 当某组中相干信号个数为奇数时, $\Delta \mathbf{R}_x$ 秩亏并将导致估计出现错误, 因此需要通过下面三步解决秩亏问题并估计出信号 DOA。

第一步, 构造各频率点的新矩阵

$$\mathbf{R}_q(f_j) = \Delta \mathbf{R}_x(f_j) \Delta \mathbf{R}_x^H(f_j) \quad (6)$$

根据文献[13]可知 $\Delta \mathbf{R}_x(f_j)$ 的秩为 $2D$ 及其特征值正负成对出现, 因而其特征值分解为 $\Delta \mathbf{R}_x(f_j) = \mathbf{U}(f_j) \boldsymbol{\Lambda}(f_j) \mathbf{U}^H(f_j)$, 其中 $\boldsymbol{\Lambda}(f_j) = \text{diag}\{\lambda_1(f_j), -\lambda_1(f_j), \dots, \lambda_D(f_j), -\lambda_D(f_j)\}$, $\mathbf{U}(f_j)$ 是 $M \times 2D$ 的列满秩矩阵, 符号 diag 表示对角矩阵。根据子空间理论, 当 $K \geq 2D$ 时存在

$K \times 2D$ 的列满秩矩阵 $\mathbf{C}(f_j)$ 满足 $\mathbf{U}(f_j) = \mathbf{A}(f_j) \mathbf{C}(f_j)$. 因此, 新矩阵可以写成 $\mathbf{R}_q(f_j) = \mathbf{A}(f_j) \mathbf{C}(f_j) \mathbf{A}^H(f_j) \mathbf{C}^H(f_j) \mathbf{A}^H(f_j)$.

第二步, 利用 RSS 聚焦矩阵对新矩阵进行聚焦处理, 得到通用协方差矩阵

$$\mathbf{R}_q = \sum_{j=1}^J \mathbf{T}_\beta(f_j) \mathbf{R}_q(f_j) \mathbf{T}_\beta^H(f_j) = \mathbf{A}(f_0) \left(\sum_{j=1}^J \mathbf{C}(f_j) \mathbf{A}^2(f_j) \mathbf{C}^H(f_j) \right) \mathbf{A}^H(f_0) \quad (7)$$

命题 2 当 $M \geq K$ 和 $J \geq \max(\lceil P_{\max}/2 \rceil, \lceil K/2D \rceil)$ 时, $\text{rank}(\mathbf{R}_q) = K$, 其中符号 \max 表示取最大值, rank 表示矩阵的秩.

命题 2 的证明可见附录. 根据命题 2 可知, 无论各组中相干信号个数是奇数或偶数时, \mathbf{R}_q 的秩总能恢复到总相干信号个数, 克服了秩亏问题.

第三步, 对 \mathbf{R}_q 应用 PM 算法^[14]. 先定义传播算子 \mathbf{P} 满足 $\mathbf{P}^H \mathbf{A}_1(f_0) = \mathbf{A}_2(f_0)$, 其中 $\mathbf{A}_1(f_0) = \mathbf{A}(f_0)(1:K, :)$ 和 $\mathbf{A}_2(f_0) = \mathbf{A}(f_0)(K+1:M, :)$, 且该传播算子可通过 $\mathbf{P} = (\mathbf{G}^H \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^H \mathbf{H}$ 来估算, 其中 $\mathbf{G} = \mathbf{R}_q(:, 1:K)$, $\mathbf{H} = \mathbf{R}_q(:, K+1:M)$ 满足 $\mathbf{H} = \mathbf{G}\mathbf{P}$. 接着构造噪声子空间矩阵 $\mathbf{Q} = [\mathbf{P} \mid -\mathbf{I}_{M-K}]$ 满足 $\mathbf{A}^H(f_0) [\mathbf{P} \mid -\mathbf{I}_{M-K}] = \mathbf{0}_{K \times (M-K)}$, 其中符号 $|$ 表示按列排列, \mathbf{I}_{M-K} 表示 $(M-K) \times (M-K)$ 的单位阵, $\mathbf{0}_{K \times (M-K)}$ 表示 $K \times (M-K)$ 的零矩阵. 再通过下式估算出 K 个信号的 DOA

$$\hat{\theta}_k = \arg \max_{\theta_k} \frac{1}{\|\mathbf{a}^H(f_0, \theta) \mathbf{Q}_0\|_F^2}, \quad k = 1, \dots, K \quad (8)$$

其中, $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q}(\mathbf{Q}^H \mathbf{Q})^{-1/2}$, 符号 \arg 表示求相位角, 符号 $\|\cdot\|_F$ 表示 Frobenius 范数.

值得注意的是, 文献[11]中的聚焦传播算子 \mathbf{P}_{foc} 在理想情况下等于 f_0 处的传播算子 \mathbf{P}_0 , 即 $\mathbf{P}_{foc} = \mathbf{P}_0$. 当有 D 个相干信号组时, \mathbf{P}_0 的秩为 $2D$ 存在秩亏问题, 意味着 \mathbf{P}_{foc} 没有完成了实际的能量聚焦处理, 导致 DCPM 算法仅能用于相干组中只有两个信号的场合. 而 \mathbf{R}_q 秩的恢复意味着 \mathbf{R}_q 完成了实际的能量聚焦处理, 导致本文算法能够估计出所有宽带相干信号的 DOA, 并且当各相干组中只有两个信号时, 本文算法的估计性能也要优于 DCPM 算法. 另一方面, 由于在构造新矩阵和估算 DOA 时分别采用特征分解技术和 MUSIC 算法, 导致文献[12]中算法的计算量较大; 而平方操作和传播算法的采用, 使得本文算法的计算量较小.

4 仿真实验

下面通过计算机仿真验证本文算法. 仿真阵列采用 $d_0 = c/2f_c$ 的八元 ULA, 其中 f_c 表示中心频率, 并选择 DCPM 算法作为比较算法. 信号源间具有扁平的复数

频谱, 频率数为 10; 互相关的噪声与信号不相关, 并具有 Toeplitz 结构的协方差矩阵.

在第一组仿真中, 考虑三种场合下宽带相干信号的空间谱. 第一种场合是两组四个宽带相干信号来自于 $[7^\circ, 12^\circ]$ 和 $[-25^\circ, 25^\circ]$, 时延系数为 $[0.4000, 0.28888]$ 和 $[0.9726, 0.4783]$. 第二种场合是一组时延系数为 $[0.4000, 0.28888, 0.9726, 0.4783]$ 的四个信号, 方向同上. 最后一种是两组来自于 $[-5^\circ, 13^\circ]$ 和 $[-30^\circ, 17^\circ, 29^\circ]$ 的五个信号, 时延系数为 $[0.7699, 0.9371]$ 和 $[0.5039, 0.4720, 0.9278]$. 对于预估 DOA 值前两种为 $[-22.8^\circ, 9.3^\circ, 21.9^\circ]$ 和后一种为 $[-28.2^\circ, -14.2^\circ, -3^\circ, 10.7^\circ, 27.1^\circ]$, 在此基础上构造各自的 RSS 聚焦矩阵. 图 1~3 所示的是当信噪比 $\text{SNR} = 0\text{dB}$ 和快拍数 $L = 100$ 时, 三种场合下的空间谱. 图中结果表明, DCPM 算法仅能工作在相干组中只有两个信号的场合, 本文算法能够适用于所有场合. 而图 1 的结果表明, 当各相干组中只有两个信号时, 相比 DCPM 算法, 本文算法的空间谱更加尖锐.

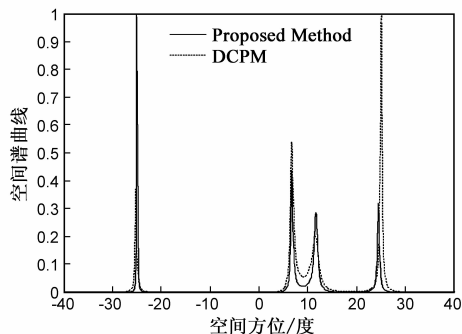


图1 空间谱曲线

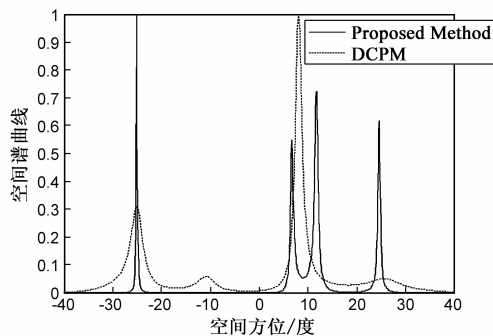


图2 空间谱曲线

第二组仿真考虑两种情况下的 DOA 估计性能, Monte-Carlo 仿真次数取 100. 前一种是时延系数为 $[0.2205, 0.4169]$ 和 $[0.1803, 0.2497]$ 的四个信号分别从 $[8^\circ, 14^\circ]$ 和 $[-21^\circ, -26^\circ]$ 入射; 后一种是时延系数为 $[0.9779, 0.1912, 0.0957]$ 的三个信号从 $[10^\circ, 25^\circ, -16^\circ]$ 入射. 预估 DOA 值分别是 $[10.8^\circ, -23.4^\circ]$ 和 $[21.7^\circ, 12.6^\circ, -13.2^\circ]$. 在前一种情况下, 当 $L = 200$ 时均方根误差与信噪比间曲线如图 4 所示, 当 $\text{SNR} = 0\text{dB}$ 时均方

根误差与快拍数间曲线如图 5 所示,图 6 所示的是当 $L = 200$ 时分辨概率与信噪比间曲线.三个图结果表明,即使当各个相干组中只有两个信号时,本文算法的估计性能也要优于 DCPM 算法,验证了之前的理论分析.图 7 和图 8 所示的分别是,在后一种情况下当 $L = 200$ 时均方根误差与信噪比间曲线和当 $\text{SNR} = 0\text{dB}$ 时均方

根误差与快拍数间曲线.图中结果表明,本文算法可以高分辨地解决相干组中含有奇数个相干信号的 DOA 估计问题.结合图 4~8 的结果可知,本文算法对相干组中的相干信号个数没有奇偶的限制,因此具有较大的理论意义.

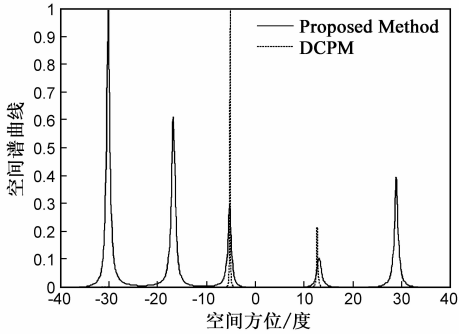


图3 空间谱曲线

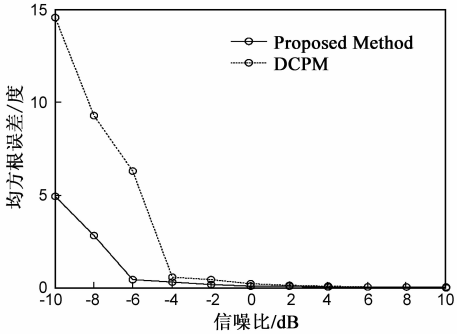


图4 均方根误差与信噪比间曲线

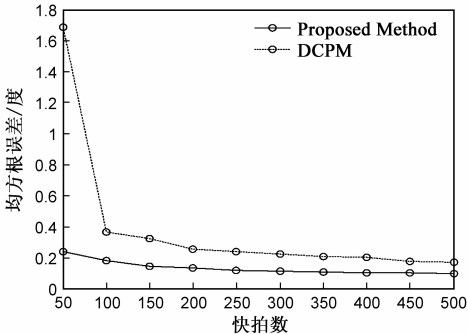


图5 均方根误差与快拍数间曲线

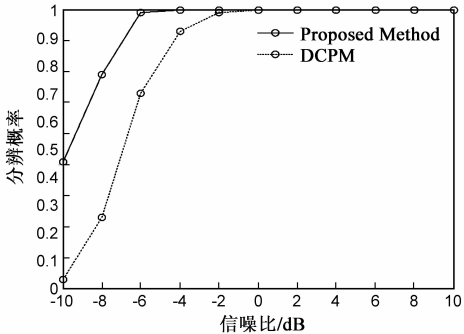


图6 分辨概率与信噪比间曲线

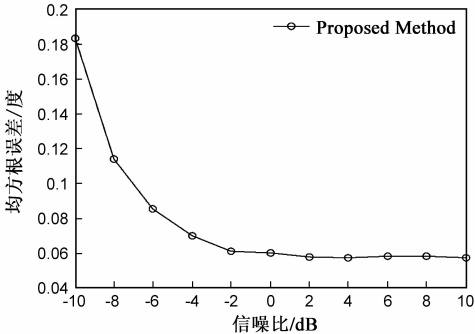


图7 均方根误差与信噪比间曲线

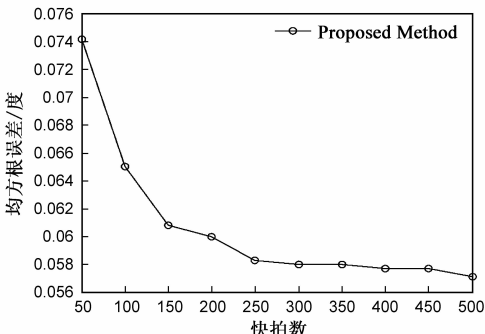


图8 均方根误差与快拍数间曲线

5 结论

在相关噪声下,本文提出一种低复杂度的宽带相干信号 DOA 估计算法.在各个频率点,算法首先使用空间差分技术去除具有 Toeplitz 型协方差矩阵的噪声分量,并通过平方操作构造新矩阵;然后,通过对新矩阵进行 RSS 聚焦处理得到通用协方差矩阵;最后,应用低复杂度的 PM 算法估计信号的 DOA.无论相干信号的个

数是奇数或偶数,本文算法都具有较好的估计性能.即使当相干组中信号个数是奇数时,本文算法的估计性能也明显优于 DCPM 算法.平方操作和传播算法的应用,使得本文算法的计算复杂度较低.计算机仿真结果验证了算法的有效性和估计性能.

附录(命题 2 的证明)

由文献[13]可知 $\Delta \mathbf{R}_{\text{rel}}(f_j)$ 的秩等于 2,且是一个负

反对称矩阵,其特征值分解为

$$\Delta \mathbf{R}_{sd}(f_j) = \mathbf{A}_d(f_j) \widehat{\mathbf{C}}_d(f_j) | \mathbf{A}_d(f_j) |^{1/2} \widehat{\mathbf{G}}_d | \widehat{\mathbf{A}}_d(f_j) |^{1/2} \widehat{\mathbf{C}}_d^H(f_j) \mathbf{A}_d^H(f_j) \quad (9)$$

其中, $\widehat{\mathbf{A}}_d(f_j) = \text{diag}\{\widehat{\Lambda}_d(f_j), -\widehat{\Lambda}_d(f_j)\}$ 和 $\widehat{\mathbf{U}}_d(f_j) = [\widehat{\mathbf{u}}_d(f_j), \widehat{\mathbf{u}}_d'(f_j)]$, $\widehat{\mathbf{C}}_d(f_j) = [\widehat{\mathbf{c}}_{d1}(f_j), \widehat{\mathbf{c}}_{d2}(f_j)]$ 为 $P_d \times 2$ 的列满秩矩阵满足 $\widehat{\mathbf{U}}_d(f_j) = \mathbf{A}_d(f_j) \widehat{\mathbf{C}}_d(f_j)$, $| \widehat{\mathbf{A}}_d(f_j) |^{1/2} = \text{diag}\{\lambda_d^{1/2}(f_j), \lambda_d^{1/2}(f_j)\}$ 和 $\widehat{\mathbf{G}}_d = \text{diag}\{1, -1\}$.

因此,将上式与(4)式联合可得

$$\Delta \mathbf{R}_x(f_j) = \mathbf{A}(f_j) \text{blkdiag}\{\widehat{\mathbf{C}}_1(f_j) \widehat{\mathbf{A}}_1(f_j) \widehat{\mathbf{C}}_1^H(f_j), \dots, \widehat{\mathbf{C}}_D(f_j) \widehat{\mathbf{A}}_D(f_j) \widehat{\mathbf{C}}_D^H(f_j)\} \mathbf{A}^H(f_j) \quad (10)$$

其中, $| \widehat{\mathbf{A}}(f_j) |^{1/2} = \text{blkdiag}\{| \widehat{\mathbf{A}}_1(f_j) |^{1/2}, \dots, | \widehat{\mathbf{A}}_D(f_j) |^{1/2}\}$, $\widehat{\mathbf{G}} = \text{blkdiag}\{\widehat{\mathbf{G}}_1, \dots, \widehat{\mathbf{G}}_D\}$ 和 $\widehat{\mathbf{C}}(f_j) = \text{blkdiag}\{\widehat{\mathbf{C}}_1(f_j), \dots, \widehat{\mathbf{C}}_D(f_j)\}$.

设 $\Delta \mathbf{R}_{sd} = \sum_{j=1}^J \widehat{\mathbf{C}}_d(f_j) \widehat{\mathbf{A}}_d(f_j) \widehat{\mathbf{C}}_d^H(f_j) = \widehat{\mathbf{C}}_d \widehat{\mathbf{A}}_d \widehat{\mathbf{C}}_d^H$, 其

中 $\widehat{\mathbf{C}}_d = [\widehat{\mathbf{C}}_d(f_1), \dots, \widehat{\mathbf{C}}_d(f_J)]$, $\widehat{\mathbf{A}}_d = \text{blkdiag}\{\widehat{\mathbf{A}}_d(f_1), \dots, \widehat{\mathbf{A}}_d(f_J)\}$. 将 $\widehat{\mathbf{C}}_d(f_j) = [\widehat{\mathbf{c}}_{d1}(f_j), \widehat{\mathbf{c}}_{d2}(f_j)]$ 代入得 $\Delta \mathbf{R}_{sd} = \widehat{\mathbf{C}}_d \mathbf{I} \widehat{\mathbf{C}}_d^H$, 其中 $\widehat{\mathbf{C}}_d = [\widehat{\mathbf{c}}_{d1}(f_1), \dots, \widehat{\mathbf{c}}_{d1}(f_J), \widehat{\mathbf{c}}_{d2}(f_1), \dots, \widehat{\mathbf{c}}_{d2}(f_J)]$, $\widehat{\mathbf{c}}_{dk}(f_j) = \widehat{\mathbf{c}}_{dk}(f_j) / \widehat{\Lambda}_d(f_j)$, $k = 1, 2$, $\mathbf{I} = \text{blkdiag}\{\mathbf{I}_J, \mathbf{I}_J\}$, \mathbf{I}_J 、 \mathbf{I}_J 分别为 $J \times J$ 的正、负单位阵. 同时根据文献[12]中命题 1 的证明, $\Delta \mathbf{R}_{sd} = \mathbf{W}_d \mathbf{I} \mathbf{W}_d^H$, 其中 \mathbf{W}_d 是 $P_d \times 2J$ 的行满秩矩阵. 因此, 必然存在 $2J \times 2J$ 的满秩

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{R}_{|s|} &= \sum_{j=1}^J \widehat{\mathbf{C}}(f_j) | \widehat{\mathbf{A}}(f_j) |^{1/2} \widehat{\mathbf{H}}(f_j) | \widehat{\mathbf{A}}(f_j) |^{1/2} \widehat{\mathbf{H}}^H(f_j) (| \widehat{\mathbf{A}}(f_j) |^{1/2})^H \widehat{\mathbf{C}}^H(f_j) \\ &= (\widehat{\mathbf{B}} \text{blkdiag}\{\widehat{\mathbf{H}}(f_1), \dots, \widehat{\mathbf{H}}(f_J)\} \text{blkdiag}\{| \widehat{\mathbf{A}}(f_1) |^{1/2}, \dots, | \widehat{\mathbf{A}}(f_J) |^{1/2}\}) \\ &\quad (\widehat{\mathbf{B}} \text{blkdiag}\{\widehat{\mathbf{H}}(f_1), \dots, \widehat{\mathbf{H}}(f_J)\} \text{blkdiag}\{| \widehat{\mathbf{A}}(f_1) |^{1/2}, \dots, | \widehat{\mathbf{A}}(f_J) |^{1/2}\})^H \end{aligned} \quad (16)$$

显然当 $J \geq \max(\lceil P_{\max}/2 \rceil, \lceil K/2D \rceil)$ 时, $\text{rank}(\Delta \mathbf{R}_{|s|}) = \text{rank}(\widehat{\mathbf{B}}) = K$. 而 $\mathbf{A}(f_0)$ 的列满秩使得命题 2 成立.

参考文献

- [1] M Wax, T Shan, T Kailath. Spatio-temporal spectral analysis by eigenstructure methods[J]. IEEE Trans on ASSP, 1984, 32(8): 817-827.
- [2] H Wang, M Kaveh. Coherent signal-subspace processing for detection and estimation of angles of multiple wide-band sources[J]. IEEE Trans on ASSP, 1985, 33(4): 823-831.
- [3] H Hung, M Kaveh. Focussing matrices for coherent signal-subspace processing[J]. IEEE Trans on ASSP, 1988, 36(8): 1272-1281.

矩阵 $\bar{\mathbf{H}}_d$ 满足 $\bar{\mathbf{H}}_d \mathbf{I} \bar{\mathbf{H}}_d^H = \mathbf{I}$, 使得 $\bar{\mathbf{C}}_d = \mathbf{W}_d \bar{\mathbf{H}}_d$. 根据矩阵理论知识, 当 $J \geq \lceil P_d/2 \rceil$ 时 $\bar{\mathbf{C}}_d$ 的秩为 P_d . 另外

$$\Delta \mathbf{R}_x(f_j) = \mathbf{A}(f_j) \mathbf{C}(f_j) | \mathbf{A}(f_j) |^{1/2} \widehat{\mathbf{G}} | \mathbf{A}(f_j) |^{1/2} \mathbf{C}^H(f_j) \mathbf{A}^H(f_j) \quad (11)$$

其中,

$$| \mathbf{A}(f_j) |^{1/2} = \text{diag}\{\lambda_1^{1/2}(f_j), \lambda_1^{1/2}(f_j), \dots, \lambda_D^{1/2}(f_j), \lambda_D^{1/2}(f_j)\}.$$

联合上面两式, 得到

$$\mathbf{A}(f_j) \mathbf{C}(f_j) | \mathbf{A}(f_j) |^{1/2} = \mathbf{A}(f_j) \widehat{\mathbf{C}}(f_j) | \widehat{\mathbf{A}}(f_j) |^{1/2} \widehat{\mathbf{H}}(f_j) \quad (12)$$

其中, $\widehat{\mathbf{H}}(f_j)$ 是 $2D \times 2D$ 的满秩矩阵满足 $\widehat{\mathbf{H}}(f_j) \widehat{\mathbf{G}} \widehat{\mathbf{H}}^H(f_j) = \widehat{\mathbf{G}}$. 这样, $\mathbf{R}_q(f_j)$ 可写成

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_q(f_j) &= \mathbf{A}(f_j) \widehat{\mathbf{C}}(f_j) | \widehat{\mathbf{A}}(f_j) |^{1/2} \widehat{\mathbf{H}}(f_j) | \widehat{\mathbf{A}}(f_j) |^{1/2} \widehat{\mathbf{H}}^H(f_j) \\ &\quad (| \widehat{\mathbf{A}}(f_j) |^{1/2})^H \widehat{\mathbf{C}}^H(f_j) \mathbf{A}^H(f_j) \end{aligned} \quad (13)$$

定义

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{R}_{|s|} &= \sum_{j=1}^J \widehat{\mathbf{C}}(f_j) | \widehat{\mathbf{A}}(f_j) |^{1/2} (| \widehat{\mathbf{A}}(f_j) |^{1/2})^H \widehat{\mathbf{C}}^H(f_j) \\ &= \text{blkdiag}\{\Delta \mathbf{R}_{|s|1}, \dots, \Delta \mathbf{R}_{|s|D}\} = \widehat{\mathbf{B}} \widehat{\mathbf{B}}^H \end{aligned} \quad (14)$$

其中, $\Delta \mathbf{R}_{|s|d} = \sum_{j=1}^J \widehat{\mathbf{C}}_d(f_j) | \widehat{\mathbf{A}}_d(f_j) |^{1/2} \widehat{\mathbf{C}}_d^H(f_j) = \widehat{\mathbf{C}}_d \widehat{\mathbf{C}}_d^H$,

$\widehat{\mathbf{B}} = [\widehat{\mathbf{B}}(f_1), \dots, \widehat{\mathbf{B}}(f_J)]$, $\widehat{\mathbf{B}}(f_j) = \widehat{\mathbf{C}}(f_j) | \widehat{\mathbf{A}}(f_j) |^{1/2}$. 显然, 当 $J \geq \max(\lceil P_{\max}/2 \rceil, \lceil K/2D \rceil)$ 时, $\text{rank}(\widehat{\mathbf{B}}) = K$. 而

$$\mathbf{R}_q = \mathbf{A}(f_0) \Delta \mathbf{R}_{|s|} \mathbf{A}^H(f_0) \quad (15)$$

其中

- [4] E Claudio, R Parisi. WAVES: Weighted average of signal subspaces for robust wideband direction finding[J]. IEEE Trans on SP, 2001, 49(10): 2179-2191.

- [5] Y Yoon, L Kaplan, J McClellan. TOPS: New DOA estimator for wideband signals[J]. IEEE Trans on SP, 2006, 54(6): 1977-1989.

- [6] J Zhang, J Dai, Z Ye. An extended TOPS algorithm based on incoherent signal subspace method[J]. IEEE Trans on SP, 2010, 90(7): 3317-3324.

- [7] R Schmidt. Multiple emitter location and signal parameter estimation[J]. IEEE Trans on AP, 1986, 34(3): 276-280.

- [8] S Vorobyov, A Gershman, K Wong. Maximum likelihood direction-of-arrival estimation in unknown noise fields using sparse sensor arrays[J]. IEEE Trans on SP, 2005, 53(1): 34

- 43.

- [9] 齐崇英,王永良,张永顺,陈辉.色噪声背景下相干信源 DOA 估计的空间差分平滑算法[J].电子学报,2005,33(7):1314-1318.
Qi Chongying, Wang Yongliang, Zhang Yongshun, Chen Hui. Spatial difference smoothing algorithm for DOA estimation of coherent sources in the presence of colored noise fields[J]. Acta Electronica Sinica, 2005, 33(7): 1314-1318. (in Chinese)
- [10] K Kumar, R Rajagopal, P Rap. Wide-band DOA estimation in the presence of correlated noise[J]. IEEE Trans on SP, 1996, 52(1): 23-34.
- [11] P Palanisamy, N Kalyanasundaram, A Raghunandan. A new DOA estimation algorithm for wideband signals in the presence of unknown spatially correlated noise[J]. SP, 2009, 89(10): 1921-1931.
- [12] 张进,叶中付,王伟.一种新的未知相关噪声下的宽带相干信号 DOA 估计算法[J].宇航学报,2012,33(8): 1119-1126.

Zhang Jin, Ye Zhongfu, Wang Wei. A novel DOA estimation algorithm for wideband coherent signals in the presence of unknown correlated noise[J]. Journal of Astronautics, 2012, 33(8): 1119-1126. (in Chinese)

- [13] Z Ye, Y Zhang, X Xu, C Liu. Direction of arrival estimation for uncorrelated and coherent signals with uniform linear array[J]. IET RSN, 2009, 3(2): 144-154.
- [14] S Marcos, A Marsal, M Benidir. The propagator method for source bearing estimation[J]. SP, 1995, 42(2): 121-138.

作者简介

张 进 男,1974 年生于安徽芜湖,讲师,2010 年获中国科技大学博士学位,主要研究方向为阵列信号处理和高速数字信号处理.
E-mail: zhj313@mail.ustc.edu.cn

叶中付 男,1959 年生于安徽桐城,教授,博士生导师,1995 年获中国科学技术大学博士学位,主要研究方向为统计信号分析与处理、阵列信号处理、图像分析与处理.

毛云祥 男,1973 年生于浙江诸暨,讲师,2004 年获解放军电子工程学院硕士学位,主要研究方向为雷达信号处理.