弦二部图的概念格表示

李立峰[1,2],刘三阳[1],罗清君[3]

(1.西安电子科技大学理学院数学系,陕西西安 710126;2.西安邮电大学理学院,陕西西安 710121;3.西安财经学院理学院,陕西西安 710068)

摘 要: 本文首先讨论了二部图中双单纯边与概念格中概念之间的对应关系;其次研究了弦二部图和约简的形式背景的若干性质;最后将概念格中元素的消除理论应用于二部图的研究,给出了弦二部图的概念格刻画.结果表明,一个二部图是弦二部图当且仅当对应的概念格中有一个∨∧—不可约元的完美消除序列.

关键词: 知识推理;约简形式背景;概念格;弦二部图;边完美消除序列

中图分类号: TP18 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112(2013)07-1384-05

电子学报 URL: http://www.ejournal.org.cn **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2013.07.022

Representing Chordal Bipartite Graph Using Concept Lattice Theory

LI Li-feng[1,2],LIU San-yang[1],LUO Qing-jun[3]

(1. *Department of Mathematics, School of Science, Xidian University, Xi'an, Shaanxi* 710126, *China*;
2. *School of Science, Xi'an University of Posts and Telecommunications, Xi'an, Shaanxi* 710121, *China*;
3. *School of Science, Xi'an University of Finance and Economics, Xi'an, Shaanxi* 710068, *China*)

Abstract: In this paper, the relation between bisimplicial edges in a bipartite graph and their corresponding concepts are discussed, and some properties of reduced contexts and chordal bipartite graphs are investigated. Then, we apply the element elimination for a concept lattice to bipartite graph theory, and obtain a representation of chordal bipartite graphs. More precisely, we show that a bipartite graph is chordal bipartite graph if and only if there is a join and meet irreducible element elimination ordering with respect to its corresponding concept lattice.

Key words: reduced context; concept lattice; chordal bipartite graph; perfect edge without vertex elimination ordering

1 引言

1982年,Will[1,2]基于形式背景(V_1,V_2,E)建立了概念格理论,(V_1,V_2,E)是由对象集V_1、属性集V_2以及二元关系$E\subseteq V_1\times V_2$组成.近些年来,概念格理论在很多方面得到了发展和应用,概念格的模糊化以及约简理论已经成为热点的研究方向,比如,文献[3]给出了概念格的属性约简和方法,文献[4]讨论了决策形式背景下概念格的属性约简,文献[5]建立了一种模糊概念格的属性约简理论,文献[6]将概念格属性约简应用于二值逻辑约简当中.同时,概念格与二部图的交叉研究也逐渐发展[7~10],本文旨在探讨将概念格约简理论应用于二部图的研究当中,给出了弦二部图的概念格刻画.

2 预备知识

2.1 形式概念分析及其约简

本小节我们介绍形式概念分析以及约简的基本知识,更多的内容参见文献[2,3].

定义1[2] 设V是完备格,$v\in V$,定义

$$v^{\bullet}=\vee\{x\in V\mid x<v\}$$
$$v_{\bullet}=\vee\{x\in V\mid v<x\}$$

如果$v\neq v^{\bullet}$,则称v为∧—不可约元,$M(V)$表示V中∧—不可约元之集;如果$v\neq v_{\bullet}$,则称v为∨—不可约元,$J(V)$表示V中∨—不可约元之集.

本文中用$JM(V)=J(V)\cap M(V)$表示V中∧—不可约元和∨—不可约元之集,若$v\in JM(V)$,则称v为∨∧—不可约元.

称(V_1,V_2,E)为一个形式背景,其中$V_1=\{x_1,x_2,\cdots,x_s\}$为对象集,$V_2=\{y_1,y_2,\cdots,y_t\}$为属性集,$E\subseteq V_1\times V_2$.本文中,用1表示$(x,y)\in E$,用0表示$(x,y)\notin E$,这样形式背景可以表示成只含0和1的表格.

对于形式背景,在对象集$X\subseteq V_1$和属性集$Y\subseteq V_2$上分别定义

收稿日期:2011-07-27;修回日期:2012-11-20;责任编辑:郭游
基金项目:中央高校基本科研业务费专项资金(No.K50511700008);陕西省教育厅自然科学专项基金(No.11JK1051,No.2013JK1098,No.2013JK1130,No.2013JK1182)

$$X^* = \{y \in V_2 \mid \forall x \in X, (x,y) \in E\}$$
$$Y^* = \{x \in V_1 \mid \forall y \in Y, (x,y) \in E\}$$

定义 2[2]　设(V_1, V_2, E)为形式背景,$X \subseteq V_1$,$Y \subseteq V_2$,如果一个二元组(X, Y)满足 $X^* = Y$ 且 $Y^* = X$,则称(X, Y)是一个形式概念,简称概念.

定义 3[2]　设(X_1, Y_1),(X_2, Y_2)为形式背景(V_1, V_2, E)的概念,定义

$$(X_1, Y_1) \leqslant (X_2, Y_2) \Leftrightarrow X_1 \subseteq X_2 (\Leftrightarrow Y_2 \subseteq Y_1)$$

(V_1, V_2, E)中的所有概念的偏序集记为 $L(V_1, V_2, E)$,称为概念格.

定理 1　$L(V_1, V_2, E)$是完备格,且有

$$\bigwedge_{i\in I}(X_i, Y_i) = (\bigcap_{i\in I} X_i, (\bigcup_{i\in I} Y_i)^{**})$$
$$\bigvee_{i\in I}(X_i, Y_i) = ((\bigcap_{i\in I} X_i)^{**}, \bigcup_{i\in I} Y_i)$$

形式背景(V_1, V_2, E)中的概念具有如下性质$(\forall X_1, X_2, X \subseteq V_1, \forall Y_1, Y_2, Y \subseteq V_2)$:

(1)$X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow X_2^* \subseteq X_1^*$,$Y_1 \subseteq Y_2 \Rightarrow Y_2^* \subseteq Y_1^*$

(2)$X \subseteq X^{**}$,$Y \subseteq Y^{**}$

(3)$X^* = X^{***}$,$Y^* = Y^{***}$

(4)(X^{**}, X^*),$(Y^*, Y^{**}) \in L(V_1, V_2, E)$

不同的形式背景所对应的概念格可能是同构的,很多情况下减少对象集和属性集的某些元素并不改变概念格的格结构,基于此,概念格的约简是一个研究的热点问题.

在形式背景(V_1, V_2, E)下,$\forall N \subseteq V_2$,记 $E_N = E \cap (V_1 \times N)$,$\forall M \subseteq V_1$,记 $E_M = E \cap (M \times V_2)$,那么$(V_1, N, E_N)$和$(M, V_2, E_M)$都为形式背景.

定义 4[3]　设(V_1, V_2, E)为形式背景,如果存在 $N \subseteq V_2$ 使得 $L(V_1, V_2, E) \cong L(V_1, N, E_N)$,则称 N 为相容属性集,进一步,如果对任意 $y \in N$,$L(V_1, N-\{y\}, E_{N-\{y\}})$与 $L(V_1, N, E_N)$不同构,则称 N 为(V_1, V_2, E)的属性约简,此时称(V_1, N, E_N)为属性约简的形式背景.

类似的,设(V_1, V_2, E)为形式背景,如果存在 $M \subseteq V_1$ 使得 $L(V_1, V_2, E) \cong L(M, V_2, E_M)$,则称 M 为相容对象集,进一步,如果对任意 $x \in M$,$L(M, V_2, E_{M-\{x\}})$与 $L(M, V_2, E_M)$不同构,则称 M 为(V_1, V_2, E)的对象约简,此时称(M, V_2, E_M)为对象约简的形式背景.

定理 2[2]　$V_2 - \{y\}$是(V_1, V_2, E)的相容属性集当且仅当存在 $Y \subseteq V_2$,$y \notin Y$ 但有$\{y\}^* = Y^*$.相应的,$V_1 - \{x\}$是(V_1, V_2, E)的相容对象集当且仅当存在 $X \subseteq V_1$,$x \notin X$ 但有$\{x\}^* = X^*$.

定义 5　如果(V_1, V_2, E)既是属性约简又是对象约简的形式背景,则称(V_1, V_2, E)是约简形式背景.

2.2　二部图和概念格

本小节介绍有关二部图和概念格的若干知识,更多内容参见文献[7,11,12].文中出现的图均为有限无向图,用 $N(x)$表示点 x 的邻域.二部图 $G = (V_1, V_2, E)$是由两个非交顶点集 V_1、V_2,且 G 的每条边的顶点分别在 V_1、V_2 中.极大二部团(极大完备二部子图)是指二部图的子图 $H = (W_1, W_2, F)$,使得$\forall x \in W_1$,$\forall y \in W_2$ 都有$(x, y) \in F$.

定义 6[12]　一个二部图被称为弦二部图当且仅当每个长度大于 6 的圈都有弦.

定义 7[7]　设 $G = (V_1, V_2, E)$为二部图,则$(x, y) \in E$ 被称为双单纯边当且仅当 $N(x) \cup N(y)$可诱导出 G 的一个完备二部子图.

定义 8[7]　设 $G = (V_1, V_2, E)$为二部图,$|E| = m$,$(e_1, e_2, \cdots, e_m)$为 G 中所有边的一个序列.对于任意 $i = 0, 1, \cdots, m$,定义 G 的子图 $G_i = (V_1, V_2, E_i)$如下:$G_i = G_0$,$\forall i \geqslant 1$,G_i 为 G_{i-1}的子图,其中 G_i 的顶点集为 $V_1 \cup V_2$,边集 $E_i = E_{i-1} - \{e_i\}$.如果每条边 e_i 都是 G_{i-1}的双单纯边,则称$(e_1, e_2, \cdots, e_m)$为 G 的一个边完美消除序列.

定理 3[12]　G 是弦二部图当且仅当 G 存在一个边完美消除序列.

综上可知,给定形式背景(V_1, V_2, E),一方面我们可以建立概念格 $L(V_1, V_2, E)$;另一方面,如果将该形式背景看成是二部图的邻接矩阵,则形式背景又和二部图 $G = (V_1, V_2, E)$相对应.关于 $L(V_1, V_2, E)$和 $G = (V_1, V_2, E)$的关系有以下结果:

定理 4　设 $W_1 \subseteq V_1$,$W_2 \subseteq V_2$,$W_1 \cup W_2$ 是 $G = (V_1, V_2, E)$的极大二部团当且仅当$(W_1, W_2) \in L(V_1, V_2, E)$.

例 1　$V_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$,$V_2 = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$,$E$ 如表 1 所示.

表 1

E	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	1	1	1	0	1
x_2	1	0	1	1	0
x_3	0	1	1	0	0
x_4	0	1	1	0	0

其中形式概念(极大二部团)为:$C_1 = (\varnothing, V_2)$,$C_2 = (\{x_1\}, \{y_1, y_2, y_3, y_5\})$,$C_3 = (\{x_2\}, \{y_1, y_3, y_4\})$,$C_4 = (\{x_1, x_3, x_4\}, \{y_2, y_3\})$,$C_5 = (\{x_1, x_2\}, \{y_1, y_3\})$,$C_6 = (V_1, \{y_3\})$.其中 $G = (V_1, V_2, E)$如图 1 所示,$L(V_1, V_2, E)$如图 2 所示,如二部图中的极大二部团$\{x_1, x_3, x_4\} \cup \{y_2, y_3\}$对应于概念格中的 $C_4 = (\{x_1, x_3, x_4\}, \{y_2, y_3\})$.

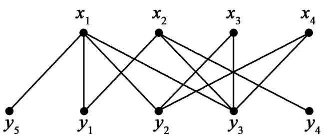

图1　(V_1,V_2,E)对应的二部图

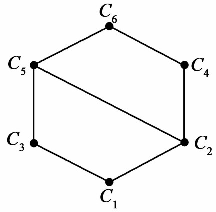

图2　(V_1,V_2,E)对应的概念格

3　弦二部图和约简形式背景

引理 1　设$(x,y)\in E$是$G=(V_1,V_2,E)$的一条双单纯边,则$N(x)\cup N(y)$是G的一个极大二部团,即$(N(y),N(x))\in L(V_1,V_2,E)$.

证明　设$(x,y)\in E$是双单纯边,由定义7可知$N(x)\cup N(y)$为G的完备二部子图.假设存在G的完备二部子图$X\cup Y$满足$N(y)\subset X$且$N(x)\subseteq Y$,任取$x^{\bullet}\in X-N(y)$,则$x^{\bullet}\notin N(y)$,因此$x^{\bullet}$与y不邻接.这与$X\cup Y$是完备子图相矛盾,所以$N(x)\cup N(y)$是G的一个极大二部团.

由定理4和定义7可以得到如下结论:

引理 2　设$(X,Y)\in L(V_1,V_2,E)$,如果存在$x\in V_1,y\in V_2$使得$X=N(y),Y=N(x)$,则$e=(x,y)$是$G=(V_1,V_2,E)$的一条双单纯边.

由引理1和引理2可得:

定理 5　$e=(x,y)$是$G=(V_1,V_2,E)$的双单纯边当且仅当$(N(y),N(x))\in L(V_1,V_2,E)$.

引理 3　设$e=(x,y)$是$G=(V_1,V_2,E)$的双单纯边,则$L(V_1,V_2,E-\{e\})$为$L(V_1,V_2,E)$的子格.

证明　设$e=(x,y)$是$G=(V_1,V_2,E)$的双单纯边.我们首先证明$N(x)\cup N(y)$是二部图$G=(V_1,V_2,E)$中唯一包含$e=(x,y)$的极大二部团($(N(y),N(x))$是$L(V_1,V_2,E)$中唯一的外延包含x,内涵包含y的概念).假设存在另一个概念$(A,B)\in L(V_1,V_2,E)$满足$x\in A,y\in B$,则$B=A^*\subseteq\{x\}^*=N(x)$且$A=B^*\subseteq\{y\}^*=N(y)$,因此$(A,B)=(N(y),N(x))$.所以$L(V_1,V_2,E-\{e\})$包含了中$L(V_1,V_2,E)$除$(N(y),N(x))$外的所有概念,而且当$V_1-\{x\}$是相容对象集或者$V_2-\{y\}$是相容属性集时$L(V_1,V_2,E-\{e\})\cong L(V_1,V_2,E)$,否则$L(V_1,V_2,E-\{e\})<L(V_1,V_2,E)$.

设形式背景$(\overline{V_1},\overline{V_2},\overline{E})$是$(V_1,V_2,E)$的约简,由定义4知$L(\overline{V_1},\overline{V_2},\overline{E})\cong L(V_1,V_2,E)$,下面定理给出了二部图$\overline{G}=(\overline{V_1},\overline{V_2},\overline{E})$与$G=(V_1,V_2,E)$的关系.

定理 6　设形式背景$(\overline{V_1},\overline{V_2},\overline{E})$是$(V_1,V_2,E)$的约简,则$G=(V_1,V_2,E)$是弦二部图当且仅当$\overline{G}=(\overline{V_1},\overline{V_2},\overline{E})$为弦二部图.

证明　充分性,设$V_2-\{y\}$是(V_1,V_2,E)的相容属性集,由定义4和定义5可知,只需证明如果$G^{\bullet}=(V_1,V_2-\{y\},E_{V_2-\{y\}})$是弦二部图,则$G=(V_1,V_2,E)$也是弦二部图即可.记$(V_1,V_2,E)$上的运算为“$*$”,$(V_1,V_2-\{y\},E_{V_2-\{y\}})$上的运算为“$\Delta$”,则$X\subseteq V_1$有$X^{\Delta}=X^*-\{y\}$,$Y\subseteq V_2-\{y\}$有$Y^{\Delta}=Y^*$.设$G$中存在无弦环$[x_1,y_1,\cdots,x_k,y_k,x_1]$$(k\geqslant 3)$,如果$y\notin\{y_1,y_2,\cdots,y_k\}$,则$[x_1,y_1,\cdots,x_k,y_k,x_1]$为$G^{\bullet}$中的无弦环,这与$G^{\bullet}$是弦二部图矛盾;如果$y\in\{y_1,y_2,\cdots,y_k\}$,不妨设$y=y_1$,则$(x_1,y)\in E,(x_2,y)\in E$,因此$x_1\in\{y\}^*,x_2\in\{y\}^*$.因为$V_2-\{y\}$是$(V_1,V_2,E)$的相容属性集,由定理2知存在$Y\subseteq V_2,y\notin Y$但有$\{y\}^*=Y^*$,因此$x_1\in Y^*=Y^{\Delta}$且$x_2\in Y^*=Y^{\Delta}$,所以$Y^{\Delta\Delta}\subseteq\{x_1\}^{\Delta}\cap\{x_2\}^{\Delta}$.因为$(Y^{\Delta},Y^{\Delta\Delta})$,$(\{x_1\}^{\Delta},\{x_1\}^{\Delta})$,$(\{x_2\}^{\Delta\Delta},\{x_2\}^{\Delta})$都是$L(V_1,V_2-\{y\},E_{V_2-\{y\}})$中的元素,由定义3可知$(\{x_1\}^{\Delta\Delta},\{x_1\}^{\Delta})\leqslant(Y^{\Delta},Y^{\Delta\Delta})$且$(\{x_2\}^{\Delta\Delta},\{x_2\}^{\Delta})\leqslant(Y^{\Delta},Y^{\Delta\Delta})$.因为$x_1\in\{x_1\}^{\Delta\Delta},x_2\in\{x_2\}^{\Delta\Delta}$,所以$x_1\in Y^{\Delta\Delta},x_2\in Y^{\Delta\Delta}$.由定理4可知,存在$\overline{y}\in Y^{\Delta\Delta}$使得$(x_1,\overline{y})\in E_{V_2-\{y\}}$,$(x_2,\overline{y})\in E_{V_2-\{y\}}$,所以$[x_1,\overline{y},\cdots,x_k,y_k,x_1]$也是$G^{\bullet}$中的无弦环,这与$G^{\bullet}$是弦二部图矛盾,因此充分性得证.

必要性,记(V_1,V_2,E)上的运算为“$*$”,$(\overline{V_1},\overline{V_2},\overline{E})$上的运算为“$\Delta$”.设$G=(V_1,V_2,E)$是弦二部图,$|E|=n,|\overline{E}|=m$.为证明$\overline{G}=(\overline{V_1},\overline{V_2},\overline{E})$是弦二部图,由定理3可知,只需证明$\overline{G}$存在一个边完美消除序列.由$G$是弦二部图知,存在$G$的一个边完美消除序列,记为$(e_1,e_2,\cdots,e_n)$.由$(\overline{V_1},\overline{V_2},\overline{E})$是$(V_1,V_2,E)$的约简形式背景可知$\overline{E}\subseteq E$,因此从$(e_1,e_2,\cdots,e_n)$删除不属于$\overline{E}$的边可得$\overline{E}$的一个边的序列$(e_{i1},e_{i2},\cdots,e_{im})$,只需证明$(e_{i1},e_{i2},\cdots,e_{im})$为$\overline{G}$的边完美消除序列即可.由$(e_1,e_2,\cdots,e_n)$是$G$的一个边完美消除序列可知$e_1=(x_1,y_1)\in E$是$G$的双单纯边.(1)若$e_1=(x_1,y_1)\in\overline{E}$,则$x_1\in\overline{V_1},y_1\in\overline{V_2}$,由定理5可知$(\{y_1\}^*,\{x_1\}^*)\in L(V_1,V_2,E)$,则由$(\overline{V_1},\overline{V_2},\overline{E})$的定义可知$(\{y_1\}^*\cap\overline{V_1},\{x_1\}^*\cap\overline{V_2})\in L(\overline{V_1},\overline{V_2},\overline{E})$,即$(\{y_1\}^{\Delta},\{x_1\}^{\Delta})\in L(\overline{V_1},\overline{V_2},\overline{E})$,因此$e_1=(x_1,y_1)\in\overline{E}$为$\overline{G}$的双单纯边,由引理3可知,$L(\overline{V_1},\overline{V_2},\overline{E}-\{e_1\})$包含$L(\overline{V_1},\overline{V_2},\overline{E})$中出了$(\{y_1\}^{\Delta},\{x_1\}^{\Delta})$的所有元素,同时$L(V_1,V_2,E-\{e_1\})$包含了$L(V_1,V_2,E)$除$(\{y_1\}^*,\{x_1\}^*)$外的所有元素;由$L(\overline{V_1},\overline{V_2},\overline{E})\cong L(V_1,V_2E)$可知$L(\overline{V_1},\overline{V_2},\overline{E}-\{e_1\})\cong L(V_1,V_2,E-\{e_1\})$.(2)若$e_1=(x_1,y_1)\notin\overline{E}$,则$L(\overline{V_1},\overline{V_2},\overline{E})\cong L(V_1,V_2,E)\cong L(V_1,V_2,E-\{e_1\})$,此时$(\overline{V_1},\overline{V_2},\overline{E})$为$(V_1,V_2,E-\{e_1\})$的约简形式背景.设$G_j=(V_1,V_2,E_j)$,$\overline{G_j}=(\overline{V_1},\overline{V_2},\overline{E_j})$这里$E_j=E-$

$\{e_1,e_2,\cdots,e_j\}$，$\overline{E_j}=\overline{E}-\{e_1,e_2,\cdots,e_j\}$，且 $L(V_1,V_2,E_j)\cong L(\overline{V_1},\overline{V_2},\overline{E_j})$. 因为 e_{j+1} 是 G_j 的双单纯边，如果 $e_{j+1}\in\overline{E_j}$，则有 e_{j+1} 是 $\overline{G_j}$ 的双单纯边. 重复上述过程可知 $(e_{i1},e_{i2},\cdots,e_{im})$ 为 $\overline{G}$ 的一个边完美删除序列，所以 $\overline{G}=(\overline{V_1},\overline{V_2},\overline{E})$ 是弦二部图.

例 2　接例 1，$(\overline{V_1},\overline{V_2},\overline{E})$ 为 (V_1,V_2,E) 的一个约简形式背景，其中 $\overline{V_1}=\{x_1,x_2,x_3\}$，$\overline{V_2}=\{y_1,y_2,y_4\}$，$\overline{E}$ 如表 2 所示.

表 2

$\overline{E}$	y_1	y_2	y_4
x_1	1	1	0
x_2	1	0	1
x_3	0	1	0

其中形式概念(极大二部团)为：$C_1^*=(\varnothing,\overline{V_2})$，$C_2^*=(\{x_1\},\{y_1,y_2\})$，$C_3^*=(\{x_2\},\{y_1,y_4\})$，$C_4^*=(\{x_1,x_3\},\{y_2\})$，$C_5^*=(\{x_1,x_2\},\{y_1\})$，$C_6^*=(\overline{V_1},\varnothing)$. 其中 $\overline{G}=(\overline{V_1},\overline{V_2},\overline{E})$ 如图 3 所示，$L(\overline{V_1},\overline{V_2},\overline{E})$ 如图 4 所示.

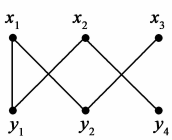

图3　$(\overline{V}_1,\overline{V}_2,\overline{E})$ 对应的二部图

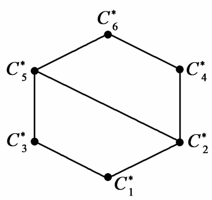

图4　$(\overline{V}_1,\overline{V}_2,\overline{E})$ 对应的概念格

因为 $((x_3,y_2),(x_2,y_4),(x_1,y_2),(x_1,y_1),(x_2,y_1))$ 是 $\overline{G}=(\overline{V_1},\overline{V_2},\overline{E})$ 的一个边完美删除序列，因此 $\overline{G}$ 是弦二部图. 由于 $(\overline{V_1},\overline{V_2},\overline{E})$ 是 (V_1,V_2,E) 的约简形式背景，所以 $G=(V_1,V_2,E)$ 也是弦二部图.

4　弦二部图的概念格表示

定理 7　设 (V_1,V_2,E) 为约简的形式背景，$(X,Y)\in L(V_1,V_2,E)$，则

(1) 若 $(X,Y)\notin ML(V_1,V_2,E)$，记 $\{(X_t,Y_t)\in L(V_1,V_2,E)\mid(X_t,Y_t)>(X,Y),t\in T\}$ 为严格大于 (X,Y) 的概念之集，则

$$(X,Y)=\bigwedge_{t\in T}(X_i,Y_i)=(\bigcap_{t\in T}X_t,\bigcup_{t\in T}Y_t)$$

(2) 若 $(X,Y)\notin JL(V_1,V_2,E)$，记 $\{(X_t,Y_t)\in L(V_1,V_2,E)\mid(X_t,Y_t)<(X,Y),t\in T\}$ 为严格小于 (X,Y) 的概念之集，则

$$(X,Y)=\bigvee_{t\in T}(X_t,Y_t)=(\bigcup_{t\in T}X_t,\bigcap_{t\in T}Y_t)$$

证明　由定义 1 和定理 1 可知 $(X,Y)=\bigwedge_{t\in T}(X_t,Y_t)=(\bigcap_{t\in T}X_t,(\bigcup_{t\in T}Y_t)^{**})$，为证明(1)成立我们只需证明 $(\bigcup_{t\in T}Y_t)^{**}=\bigcup_{t\in T}Y_t$ 即可. 易知 $\bigcup_{t\in T}Y_t\subseteq(\bigcup_{t\in T}Y_t)^{**}$，假如 $(\bigcup_{t\in T}Y_t)^{**}-\bigcup_{t\in T}Y_t\neq\varnothing$，则存在 $y\in(\bigcup_{t\in T}Y_t)^{**}-\bigcup_{t\in T}Y_t$，此时有 $X=((\bigcup_{t\in T}Y_t)^{**})^*\subseteq\{y\}^*$，有定义 3 可知 $(\bigcap_{t\in T}X_t,(\bigcup_{t\in T}Y_t)^{**})\leqslant(\{y\}^*,\{y\}^{**})$. 由 $(X,Y)\notin ML(V_1,V_2,E)$ 可知存在 $t_1\in T$ 使得 $(\{y\}^*,\{y\}^{**})=(X_{t_1},Y_{t_1})$. 由于 $y\notin\bigcup_{t\in T}Y_t$ 且 $t_1\in T$，所以 $y\notin Y_{t_1}$，且 $\{y\}^*=Y_{t_1}^*$. 由定理 2 知 $V_2-\{y\}$ 为相容属性集，这与 (V_1,V_2,E) 为约简的形式背景相矛盾，因此 $(X,Y)=\bigwedge_{i\in I}(X_i,Y_i)=(\bigcap_{t\in T}X_t,\bigcup_{t\in T}Y_t)$ 成立. (2)类似可证.

定理 8　设 (V_1,V_2,E) 为约简的形式背景，若 $(X,Y)\notin JML(V_1,V_2,E)$，则对于任意 $x\in V_1,y\in V_2$，有 $X^*\neq\{y\}^*$ 或者 $Y^*\neq\{x\}^*$.

证明　因为 $(X,Y)\notin JML(V_1,V_2,E)$，则 $(X,Y)\notin JL(V_1,V_2,E)$ 或 $(X,Y)\notin ML(V_1,V_2,E)$. 设 $(X,Y)\notin JL(V_1,V_2,E)$，即 $(X,Y)=\bigvee_{t\in T}\{(X_t,Y_t)\mid(X_t,Y_t)<(X,Y)\}$. 因为 (V_1,V_2,E) 为约简的形式背景，由定理 7 可知 $(X,Y)=\bigvee_{t\in T}(X_t,Y_t)=(\bigcup_{t\in T}X_t,\bigcap_{t\in T}Y_t)$. 对任意 $x\in\bigcup_{t\in T}X_t$，$y\in\bigcap_{t\in T}Y_t$，存在 $j\in T$ 使得 $x\in X_j$，所以 $Y=\bigcap_{t\in T}Y_t=(\bigcup_{t\in T}X_t)^*\subseteq X_j^*\subseteq\{x\}^*$. 如果 $Y=\{x\}^*$，则 $Y_j=Y$，因此 $(X,Y)=(X_j,Y_j)$，这与 $(X,Y)>(X_j,Y_j)$ 矛盾. 所以对于任意 $x\in V_1$ 有 $Y^*\neq\{x\}^*$. 同理可证，如果 $(X,Y)\notin ML(V_1,V_2,E)$，则对任意 $y\in V_2$ 有 $X^*\neq\{y\}^*$.

定理 9　设 (V_1,V_2,E) 为约简的形式背景，若 $(X,Y)\in JML(V_1,V_2,E)$，则存在 $x\in X,y\in Y$，使得 $X^*=\{y\}^*$ 且 $Y^*=\{x\}^*$.

证明　设对于任意 $x\in X$ 都有 $Y^*\neq\{x\}^*$. 由于 $(X,Y)\in L(V_1,V_2,E)$，则 $Y=X^*=\bigcap_{x\in X}\{x\}^*$，因此存在 $\{x_t\in X\mid t\in T,|T|\geqslant2\}$ 使得对于 $t,t_1\in T$ 总有 $\{x_t\}^*-\{x_{t_1}\}^*\neq\varnothing$ 且 $Y=\bigcap_{x_t\in X}\{x_t\}^*$，所以 $Y\subset\{x_t\}^*$，否则与 $Y^*\neq\{x\}^*$ 矛盾. 由于 $(\{x\}^{**},\{x\}^*)\in L(V_1,V_2,E)$，所以 $(X,Y)>(\{x\}^{**},\{x\}^*)$. 由 $Y=\bigcap_{x\in X}\{x\}^*$ 和定理 7 可知，$(X,Y)=\bigvee_{t\in T}(\{x\}^{**},\{x\}^*)$. 由 $|T|\geqslant2$ 和 $(X,Y)>(\{x\}^{**},\{x\}^*)$ 知 $(X,Y)\notin JL(V_1,V_2,E)$. 同理可证，若对于任意 $y\in Y$ 使得 $X^*=\{y\}^*$，则有 $(X,Y)\notin ML(V_1,V_2,E)$，因此命题得证.

由定理 8 和定理 9 可得如下命题：

定理 10　设 (V_1,V_2,E) 为约简的形式背景，则任意 $x\in X,y\in Y$，$(N(y),N(x))$ 是形式概念当且仅当 $(N(y),N(x))\in JML(V_1,V_2,E)$.

定义 9　设 V 为完备格且 $|V|=n$，$(v_1,v_2,\cdots,v_n)$ 为 V 中元素的一个序列. 对于 $i=0,1,\cdots,n$，定义子格如下：$V_0=V$，$V_i=V_{i-1}-\{v_i\}$，如果每个元素 v_i 都是子

格 V_{i-1} 的 $\vee\wedge$—不可约元,则称 $(v_1,v_2,\cdots,v_n)$ 是 V 的完美删除序列.

由定理 5 和定理 10 可知,如果 (V_1,V_2,E) 为约简的形式背景,则 $e_1=(x_1,y_1)$ 是 $G=(V_1,V_2,E)$ 双单纯边当且仅当 $(N(y_1),N(x_1))\in JML(V_1,V_2,E)$.再结合引理 3 知,如果 $e_1=(x_1,y_1)$ 是 $G=(V_1,V_2,E)$ 双单纯边,则有 $L(V_1,V_2,E-\{e_1\})\cong L(V_1,V_2,E)-\{(N(y_1),N(x_1)\}$.因此图 $G_1=(V_1,V_2,E-\{e_1\})$ 与 $L(V_1,V_2,E)-\{(N(y_1),N(x_1)\}$ 都和形式背景 $(V_1,V_2,E-\{e_1\})$ 相对应.注意到形式背景 $(V_1,V_2,E-\{e_1\})$ 未必是约简的形式背景,设 $(\overline{V_1},\overline{V_2},\overline{E-\{e_1\}})$ 是 $(V_1,V_2,E-\{e_1\})$ 的约简形式背景,则 $L(\overline{V_1},\overline{V_2},\overline{E-\{e_1\}})\cong L(V_1,V_2,E-\{e_1\})$,由定理 6 可知 $G_1=(V_1,V_2,E-\{e_1\})$ 是弦二部图当且仅当 $\overline{G_1}=(\overline{V_1},\overline{V_2},\overline{E-\{e_1\}})$ 是弦二部图.再应用定理 5 和定理 10,$e_2=(x_2,y_2)$ 是 $\overline{G_1}=(\overline{V_1},\overline{V_2},\overline{E-\{e_1\}})$ 的双单纯边当且仅当 $(N(y_2),N(x_2))\in JML(\overline{V_1},\overline{V_2},\overline{E-\{e_1\}})$,重复上面过程,可得到如下命题:

定理 11 设 $G=(V_1,V_2,E)$ 是二部图,则 $G=(V_1,V_2,E)$ 是弦二部图当且仅当 $L(V_1,V_2,E)$ 中有完美删除序列.

例 3 考察例 1 中的二部图,容易看出,在图 2 的概念格 $L(V_1,V_2,E)$ 中有一个完美删除序列 $(C_4,C_2,C_3,C_5,C_6,C_1)$,因此图 1 中所示的二部图为弦二部图.

5 结束语

本文将概念格的约简理论应用于弦二部图的判定当中.结果表明,一个二部图是弦二部图当且仅当其对应的概念格有完美删除序列,该结论从概念格的角度给出了弦二部图的一个新的刻画,下一步我们将概念格理论应用于其他类型的二部图研究.

参考文献

[1] R Wille. Restructuring Lattice Theory: An Approach Based on Hierarchies of Concept[M]. R Ivan Rival(ED.), Ordered Sets, Reidel, Dordecht. Boston, 1982. 445 – 470.

[2] B Ganter, R Wille. Formal Concept Analysis: Mathematical Foundations[M]. Springer – Verlag, Berlin, 1999.

[3] 张文修,魏玲,祁建军.概念格的属性约简理论与方法[J].中国科学,E 辑 2005,35(6):628 – 639.
Zhang Wenxiu, Wei Ling, Qi Jianjun. Attribute reduction theory and approach to concept lattice[J]. Science in China (Series E) 2005, 35(6):628 – 639. (in Chinese)

[4] L Wei, J J Qi, W X Zhang. Attribute reduction theory of concept lattice based on decision formal contexts[J]. Science in China Series F, 2008, 51(7):910 – 923.

[5] L F Li, J K Zhang. Attribute reduction in fuzzy concept lattices based on the T implication[J]. Knowledge-Based Systems, 2010, 23(6):497 – 503.

[6] 李立峰,张东晓.概念格在二值命题逻辑命题集约简中的应用[J].电子学报,2007,35(8):1538 – 1542.
Li-Lifeng, Zhang-Dongxiao. The application of concept lattice theory in the reduction of the proposition set in two-valued propo sitional logic[J]. Acta Electronica Sinica, 2007, 35 (8):1538 – 1542. (in Chinese)

[7] J Amilhastre, M C Vilarem, P Janssen. Complexity of minimum biclique cover and minimum biclique decomposition for bipartite domino-free graphs[J]. Discrete Applied Mathematics, 1998, 86:125 – 144.

[8] A Berry, A Sigayret. Representing a concept lattice by a graph[J]. Discrete Applied Mathematics, 2004, 144(1 – 2): 27 – 42.

[9] A Berry, R M McConnell, A Sigayret, J P Spinrad. Very fast instances for concept generation[J]. LNCS, 2006, 3874:119 – 129.

[10] A Berry, E SanJuanb, A Sigayret. Generalized domination in closure systems[J]. Discrete Applied Mathematics, 2006, 154:1064 – 1084.

[11] A Brandstadt. Special Graph Classes-A Survey[M]. Schriftenreihe des Fachbereichs Mathematik, Universitat Duisburg, 1991.

[12] T Kloksap, D Kratsch. Computing a perfect edge without vertex elimination ordering of a chordal bipartite graph[J]. Information Processing Letters, 1995, 55:11 – 16.

作者简介

李立峰 男,1980 年生于西安市长安区,西安电子科技大学博士生,西安邮电大学理学院讲师.主要从事概念格理论的研究.
E-mail: hlw12 – 12@sohu.com