

基于过完备表示的图像去噪算法

解 凯, 张 芬

(北京印刷学院信息工程学院, 北京 102600)

摘 要: 提出一种基于过完备线性变换集合的图像去除白高斯噪声算法. 对于每个变换使用阈值技术进行图像去噪, 图像恢复使用加权平均来融合去噪结果. 采用稀疏集中度来计算图像稀疏分解的测度, 而权重依赖该结果. 对于图像稀疏区域, 拥有较大的权. 该方法不需要设计复杂的变换系数统计模型, 与使用复杂的有向变换和图像统计模型方法相比, 取得了较高的去噪性能. 该方法简洁高效, 尤其是对包含奇异特征的图像得到了较好的去噪结果. 实验结果证实了所提方法的有效性.

关键词: 稀疏测度; 图像去噪; 过完备; 离散余弦变换

中图分类号: TN911.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2013) 10-1911-06

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2013.10.006

Overcomplete Representation Base Image Denoising Algorithm

XIE Kai, ZHANG Fen

(School of Information Engineering, Beijing Institute of Graphic Communication, Beijing 102600)

Abstract: An image denoising algorithm is proposed with an overcomplete set of linear transforms for removing white Gaussian noises of the image. The denoising result is gotten by weight averaging. The method computes the weight with the sparse concentrate index. The weight depends on sparse decomposition of localized transform coefficients. Sparser the image region is, the larger its weight is. The method has no need to devise elaborate statistic models on the transform coefficients and more sophisticated transforms for image singularities. The method is simple and obtains very high denoising performance, especially for the image with singularities. Experiments results show the effectivity of the method.

Key words: sparsity measure; image denoising; overcomplete; DCT

1 引言

图像去噪的目标是把被噪声污染的图像恢复为原始图像. 借助于图像稀疏分解变换和非线性阈值化技术是图像去噪的主要方法之一, 如经典的小波收缩去噪算法^[1]等. 但由于小波和块 DCT 变换等对含有奇异特征的图像具有有限的稀疏性, 因此采用上述变换方法的去噪性能有待改进. 一个改进方向是研究对奇异特征具有良好性质的过完备变换上, 如抽样小波、steerable 小波、rigdgelet、Contourlet 和 Curvelet 等变换^[2]. 相比小波变换能获得更稀疏的分解, 在图像去噪等领域也取得了更优的处理效果. 但每一种变换只对某些特征表示是稀疏的. 自然图像中往往包含各种特征, 仅采用某一种变换很难对所有特征进行有效表示. 自然将多种基函数级联构造造成过完备字典以包含图像的各种特征, 能实现图像的有效分解, 但这种方法产生的字典规模巨大, 限制了

其应用. 其次是研究更好的阈值技术以适应奇异特征在空间和尺度上的变化^[3]. 另一方面是研究小波系数间存在的依赖性^[4-5], 研究人员主要集中在研究奇异特征上的小波系数间模型的统计依赖性. 这些技术取得了很好的去噪性能, 但与经典的小波收缩去噪算法相比, 它们缺乏简单性和效率. 通过学习、训练来获得过完备字典的方法近两年得到了发展, 如 Kreutz^[6]考虑到图像之间的相似性, 结合聚类算法用于字典学习. Aharon^[7]将 K 均值聚类方法推广为 K-SVD 算法, 用于字典自适应更新. 丁兴号等^[10]采用 K 均值聚类算法泛化可用于过完备字典的自适应更新, 以实现图像的有效表示. 赖剑煌^[11]等人将字典学习转化为一个二次规划问题, 并提出适合于大规模运算的投影梯度算法, 均取得不错的效果. 但目前学习算法的效率普遍较低. 本文采用一组块 DCT 变换, 采用硬阈值化技术来实现加权平均去噪.

2 基于过完备域的图像去噪模型

考虑一个噪音图像

$$y = x + v \quad (1)$$

$y(N \times 1)$ 是观测到的图像, x 是未知的原图像, v 是叠加的白噪音, 其方差为 σ_v^2 . 我们的目标是设计一个算法从 y 中删除噪音使其尽可能的接近原图像 x . 设 $D_i(N \times N, i = 1, 2, \dots, M)$ 表示一组正交变换, 构成一组过完备域 $D = \{D_1, D_2, \dots, D_M\}$. 将该组变换用于观测图像得到其变换系数, 采用阈值化技术处理, 然后应用逆变换产生对原图像的去噪估计, 最后融合各变换后的估计以产生最终原图像 x 的估计. 其形式化过程如下:

$$\begin{aligned} c_i &= D_i y \\ \hat{c}_i &= T(c_i) \\ \hat{x}_i &= D_i^{-1} \hat{c}_i \quad i = 1, 2, \dots, M \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $c_i(N \times 1)$ 为采用 D_i 变换后的系数, $\hat{c}_i(N \times 1)$ 为阈值化后的系数, $T(\cdot)$ 为阈值化函数, \hat{x}_i 为 x 的第 i 个去噪估计. 阈值化技术是相当广泛的, 为了方便我们只采用硬阈值技术, 对于每一个变换系数

$$\hat{c}_i = \begin{cases} 0, & |c_i(k)| \leq \tau_{i,k} \\ c_i(k), & |c_i(k)| > \tau_{i,k} \end{cases} \quad (3)$$

其中 $k = 1, 2, \dots, N$, $c_i(k)$ 是第 i 个变换的第 k 个系数, $\tau_{i,k}$ 为用于 $c_i(k)$ 的一个阈值, 为了简化, 本文采用均匀阈值 ($\tau_{i,k} = \tau$), 但本文的方法允许采用不同的阈值. 由于 D_i 变换式正交变换则原图像 x 的估计为

$$\hat{x}_i = D_i^T T(c_i) \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (4)$$

Coifman^[11] 等考虑避免图像奇异特征处产生的鬼影, 将原图像 x 的 M 个估计值平均得到

$$\hat{x}(n) = 1/M \sum_{i=1}^M \hat{x}_i(n) \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (5)$$

但平均取值导致图像“过拟合”现象出现. 本文采用如下用不同权公式的方式来求解原图像:

$$\hat{x}(n) = \sum_{i=1}^M w_i(n) \hat{x}_i(n) \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (6)$$

其中权 $w_i(n)$ 满足 $\sum_{i=1}^M w_i(n) = 1$.

3 过完备域上的加权图像去噪方法

对于每一像素, 在给定噪音图像和 M 个去噪估计 $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_M$ 的条件下, 我们考虑如下条件均方误差的权值优化, 最小化下面公式

$$E[(x(n) - \hat{x}(n))^2 | y, \hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_M] \quad (7)$$

令 $\varphi(\cdot)$ 表示条件期望 $E[\cdot | y, \hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_M]$, 并定义

$$\begin{aligned} W_n &= [w_1(n), \dots, w_M(n)]^T \\ X_n &= [\hat{x}_1(n), \dots, \hat{x}_M(n)]^T \\ \epsilon_n &= [e_1(n), \dots, e_M(n)]^T; e_i = x(n) - \hat{x}_i(n) \end{aligned}$$

$$\eta_n = \varphi[\epsilon_n \epsilon_n^T]; U = [1, 1, \dots, 1]^T$$

将权约束加入式(7), 采用 lagrange 乘数法, 则最小化式(7)变成

$$\begin{aligned} E(W, \mu) &= \varphi\{(x(n) - W_n^T X_n)^2\} - \mu(W_n^T U - 1) \\ &= \varphi\{(x(n)(1 - W_n^T U) + W_n^T \epsilon_n)^2\} - \mu(W_n^T U - 1) \end{aligned} \quad (8)$$

因 $\varphi(\cdot)$ 表示条件期望, 对上式最小化, 对式(8)的求导可得

$$\eta_n W_n = \mu U \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned} \eta_n(i, j) &= \varphi[e_i(n) e_j(n)] \\ &= E[(x(n) - \hat{x}_i(n))(x(n) - \hat{x}_j(n)) | y, \hat{x}_i, \hat{x}_j] \\ &= \delta_n^T E[(x - \hat{x}_i)(x - \hat{x}_j)^T | y, \hat{x}_i, \hat{x}_j] \delta_n \end{aligned} \quad (10)$$

δ_n 是一个列向量, 只有第 n 个元素为 1, 其余皆为 0. 对于每个像素计算权来说, 求解方程(9)需要计算 η_n 的逆, 计算量大且复杂. 注意到该矩阵的元素 $\eta_n(i, j)$ 表示的是在第 i, j 变换后所估计的去噪音结果的残余量的互相关值. 我们只考虑对角线元素而忽略其元素, 则 $\eta_n(i, j)$ 可简化为

$$D_n(k, l) = \begin{cases} \delta_n^T E[(x - \hat{x}_i)(x - \hat{x}_i)^T | y, \hat{x}_i] \delta_n & k = l \\ 0 & \text{other} \end{cases} \quad (11)$$

根据式(11)我们能得出, $D_n(k, k)$ 的值与第 i 个变换后估计值的残差大小密切相关, 如图像去噪估计得准, 则其残差小, $w_i(n = 1, 2, \dots, M)$ 权值就大; 反之, 若估计的不准, 则残差和 $D_n(k, k)$ 的值就大, 其对应的权 w_n 值就小.

根据文献^[12-13] 的结论, 图像中的稀疏区域对应于局部变换后的稀疏分解, 其分解系数按幅值迅速衰减. 而且分解系数衰减的越迅速, 其对应图像的去噪和压缩性能就越好. 重要的是对应 DCT 类变换的稀疏区域并不仅仅对应于光滑图像区域, 例如, 许多含有纹理块的图像, 如图 1(b). 尽管是非光滑的, 但对应该类变换也是稀疏区域.

如何衡量图像变换后系数的稀疏性是一个关键问题. 本文采用一种函数来评价分解系数的衰减程度, 即稀疏集中索引概念 (SCI: Sparsity Concentration Index). 它是由 Wright^[14] 等人提出的, 用于面部识别的分类.

SCI 的定义如下: 设 $C \in 1R^M$ 为一个向量

$$SCI(C) = (M \cdot \max_i |c_i| / C_1 - 1) / (M - 1) \in [0, 1]$$

c_i 为 C 向量的元素. 当该向量只有一个非零元素时, $SCI(C) = 1$, 达到最大值, 表示 C 向量的数据稀疏度达到最大值, 其值为 1. 当所有元素相同时, $SCI(C) = 0$, 对应的数据稀疏度达到最小值, 其值也为最小.

为了描述分解系数幅值的衰减程度, 我们对其进行了修改. 修改的稀疏集中度索引定义 MSCSI (Modified

Sparsity Concentration Index):

设 $C \in \mathbb{R}^M$ 为一个向量

$$MSCI(C) = ((M |c_1| / \|C\|_1 - 1) / (M - 1))^m \in [0, 1] \quad (12)$$

其中 C 为某变换后的系数向量,用 MSCI 值表示对应的衰减程度,也对应图像融合时的权值. 幂次 m 的取值范围 $[0, \infty)$,用于调节权数的比重. $M = 0$: MSCI 值表示平均加权,如式(5); $m = 1$: MSCI 值表示稀疏度; $M > 1$: 表示加大稀疏集中度高的权重比例,即高的幂次加大稀疏度权高的,降低稀疏度低的权. 如对于较大 m ,可用于含有较大的稀疏区域的图像. c_1 表示 DCT 类变换分解系数 C 的 DC 分量,对以较大图像,因其含有较多的图像块,此项修改可以减少算法的运算量,图像去噪效果佳.

对于每一个变换,其权取 MSCI(C)值,当所有变换计算完后,需要归一化处理. 当用在图像块时,若块的分解系数是稀疏的,则权值大,对去噪后的图像融合贡献就大. 否则,权值小,对图像融合的贡献就小. 基于稀疏集中度的图像去噪算法的伪代码如下:

MSCI 算法:基于稀疏度的加权平均图像去噪算法

```

输入: NoisyImage( $N_1, N_2$ ); // 噪声图像;
 $T > 0$  // 定的阈值;
[ $B \times B$ ] // DCT 块变换的空间支撑集.
初始化: NormalWeight( $N_1, N_2$ ); // 用于存放每个像素对应的权值和;初始化为 0
DenoisedImage( $N_1, N_2$ ); // 用于存放去噪后的图像,初始化为 0
 $M = B \times B$ ;
 $m = 1$ ; // 对于奇异特征突出的图像,取幂次  $m > 1$ 
过程:
While 顺序提取第  $i$  块图像  $bb$  // 提取块图像
     $uu = \text{dct\_block\_ransform}(bb)$ ; // dct 块变换后的系数  $uu$ 
     $uu1 = \text{hard\_hreshold}(uu, T)$ ; // 硬阈值截断后的系数  $uu1$ 
     $\text{weight} = ((M * uu1(1) / \text{sum}(uu1) - 1) / (m - 1))^m$ ; // 计算该块的稀疏集中度
     $\text{de\_bb} = \text{idct\_block\_transform}(uu1)$ ; // dct 块逆变换后的图像块估计
    
```

$$\text{DenoisedImage}(i) = \sum_k \text{weight} * \text{de_bb}(k);$$

NormalWeight(i); // 权归一统计

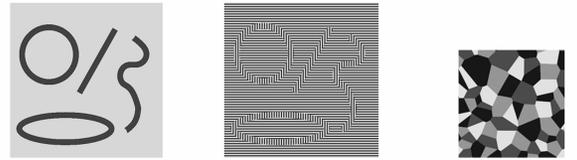
End

对所有块: DenoisedImage(i) / = NormalWeight(i);

End

4 MSCI 算法的性能和性质

为了说明算法的性质和性能,我们给出了三幅具有几何奇异特征的图像,如图 1 所示. 尤其是图 1(a)和(b)的奇异特征比较突出. 这些图像的奇异特征对图像去噪结果影响较大.



(a) Graphics(512×512) (b) Criss-Cross(512×512) (c) Voronoi(256×256)
图1 测试图像

假设图像被白高斯噪声污染. 对测试图像去噪采用一组过完备集合块 DCT(8×8)变换,如 $D_i, i = 1, \dots, 64$,表示一个 8×8 块 DCT 完全平移的结果. 硬阈值使用一个均匀的单一阈值 τ (DCT-DC 量不用阈值化). 同时我们对算法的图像去噪结果与具有较高去噪性能的算法 BLS-GSM^[5]进行了比较.

PSNR 性能:我们分别绘制了三个图像在噪声方差为 $\sigma = 5$ 的不同硬阈值的去噪结果,幂次取 1,则去噪结果显示在图 2. 从图中得出,本文算法对于含有奇异特征的图像去噪结果是有效的,去噪性能优于 BLS-GSM 算法,而且有些图像的去噪结果高出 BLS-GSM 算法 7 个 dB. 由于这些图像几乎被奇异几何特征所描述,因此本文算法对于逐块相同部分的图像有非常高的去噪性能. 图像去噪后的结果与图像奇异部分非常接近. 对于任何去噪算法,图像的奇异几何特征都是 PSNR 性能改进的主要瓶颈.

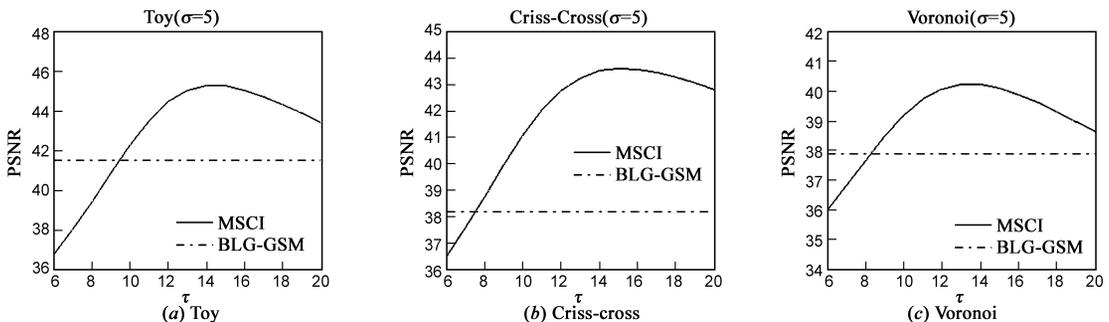


图2 测试图像的PSNR与阈值的去噪结果曲线(高斯噪声的方差为5, $m=1$)

我们注意到,如果幂次取得不同,会影响到图像去噪结

果. 如图 3 所示,其中图 3(a)、(b)的幂次取 10,而图 2

(c)的幂次取 3,得到非常好的结果.其中 Toy 和 Criss-cross 算法的去噪性能非常高. BLS-GSM 算法的去噪结果高于 BLS-GSM 算法 10 个 dB 以上,

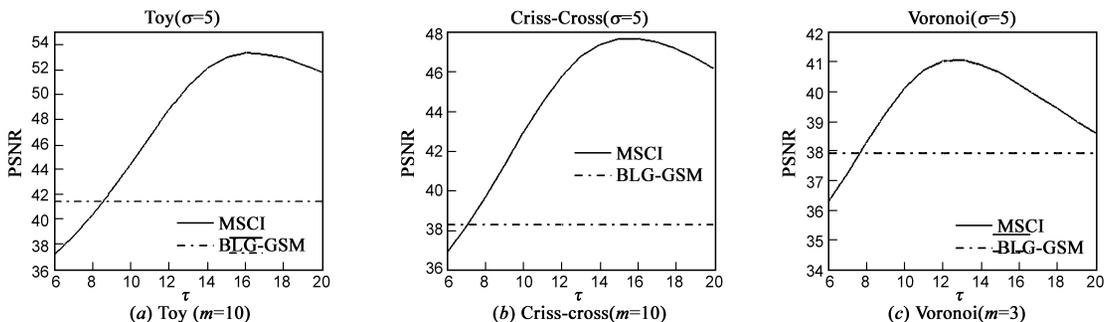


图3 测试图像的PSNR与阈值的去噪结果曲线(高斯噪声的方差为5)

对奇异特征的鲁棒性:我们以图 4 为例,该图是截取图 1(a)的一部分.为了计算 I_3 框中的像素灰度,需要计算 I_1 和 I_2 块,然后融合重叠部分以生成最终 I_3 中的像素.由公式(12)计算出与 I_1 和 I_2 块对应的 MSCI 值分别为 0.1871、0.4107,融合时的权比例分别为:0.313 和 0.687.显然 I_1 块包含图像的奇异特征,因而其权是低的,而 I_2 块是稀疏区域,因而其权是高的.如要加强稀疏区域的权重,如幂次为 10,则融合时的权比例为 0.0004、0.9996,因而 DCT 变换后系数分解越稀疏,该块图像在融合中的比例就越高,反之则低.因此图 3 的去噪结果远高于图 2 的结果.

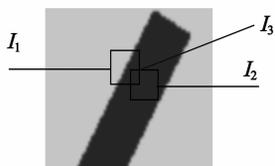


图4 MSCI算法加权平均去噪示意图

图 2(a)、(b)中逐块相同部分具有许多相似奇异几何特征,但也显示出不一样的地方,因而几何奇异性也是有差异的.如图 5 所示,图 5(a)中的边是简单的边,而图 5(b)的边就复杂得多.相比而言,为图 5(a)中边的奇异特征设计变换系数的模型是容易的,而对 Criss-cross 图中的边设计模型就非常困难.而本文设计的算法因只依赖图像的稀疏性,因此对上述奇异特征是鲁棒的.这也是该算法性能优于 BLS-GSM 算法的原因.



图5 部分Toy 和 Criss-cross图,显示了不同的奇异特征

5 实验

为了验证上述算法的性能,本文给出了实验验证,使用的工具是 Matlab R2010a.直到目前我们所使用的阈值技术都是非常简单的硬阈值技术.在算法实现过程中,我们采用了更巧妙的系数截断规则:

$$\hat{c}_i = \begin{cases} 0 & |d_i(k)| \leq |c_i(k) - d_i(k)| \\ c_i(k) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (13)$$

其中 $d_i(k)$ 表示理想原图像经第 i 个变换的第 k 个系数.该式表示如果保持噪声图像分解系数不变所引起的图像变形小于设置其为零所引起的变形,则保持系数不变;否则将其系数设置为零.但 $d_i(k)$ 是未知的,因此我们设置一个近似量 $a_i(k)$ 来近似.其取值如下:首先用硬阈值方式结合 MSCI 来去除图像噪声,得到一个图像 y_1 ,然后再应用第 i 个变换到新图像 y_1 ,即得第 k 个系数 $a_i(k)$.我们采用 Guleryuz 的启发式去噪规则^[13]:

$$\hat{c}_i = \begin{cases} 0 & c_i(k) \geq 0, a_i(k) \leq \phi \\ 0 & c_i(k) \leq 0, a_i(k) \geq -\phi \\ 0 & |c_i(k)| \leq \tau, |a_i(k)| \leq \tau/2 \\ c_i(k) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (14)$$

其含义是若 $a_i(k)$ 的绝对值小于一个较小阈值,则变换后的系数设置为零;然后结合(13)式构成启发式去噪规则(14).其中 τ 和 ϕ 被看作为噪声标准方差的函数,该函数由一组图像训练学习而来(不是本文的模拟测试图像).完整的图像去噪算应用两次 MSCI 算法,第一次采用统一的硬阈值 τ ,得到一个图像 y_1 ,然后再使用启发式去噪规则(14)式获得最终的去噪结果.

测试图像为图像处理中常用的标准图像如图 6 所示.每幅图像叠加了不同标准方差的高斯噪声,图像尺寸为 512×512 或 256×256 .我们使用了一组过完备集合块 DCT(8×8)变换,它们是一组移不变变换,如 $D_i, i = 1, \dots, 64$,表示一个 8×8 块 DCT 完全平移的结果.其中幂次取 1.为了验证算法的性能,我们使用了具有较

高去噪性能的算法 BLS-GSM^[5]进行了比较.表 1 列出了各种噪音下不同方法的 PSNR 值.由表可知在各种噪声强度下,在低于 30dB 噪音情况下,对于有较高对比度和奇异特征突出的图像,如 Peppers 和 Barbara 图像,本文方法有较强的去噪能力.而 BLS-GSM 算法对类似 Lena 图像和较高噪音情况下有比较高的去噪性能,而这类图像拥有较大光滑块.对于图像中含有奇异特征

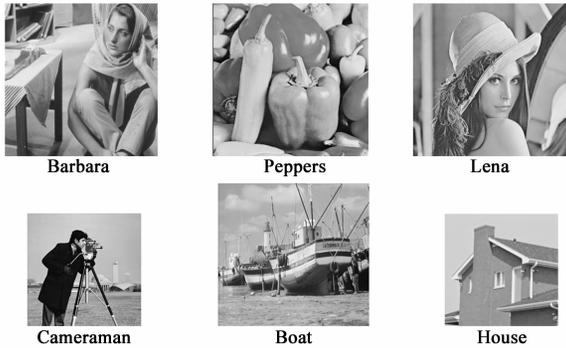


图6 测试图像,Barbra、Peppers、Lena、Boat的尺寸 512×512, Cameraman和House是256×256.

表 1 不同去噪方法性能比较

方差 σ_w	去噪方法	Barbara	Peppers	Lena	Cameraman	Boat	House
$\sigma_w = 5$ (34.12dB)	本文算法	38.51	39.26	38.48	38.36	37.19	39.07
	BLS-GSM	37.79	37.12	38.49	37.41	36.97	38.65
$\sigma_w = 10$ (28.12dB)	本文算法	34.39	36.21	35.36	33.89	33.61	35.63
	BLS-GSM	34.03	34.57	35.61	33.04	33.58	35.35
$\sigma_w = 15$ (24.60dB)	本文算法	32.07	34.41	33.56	31.36	31.71	33.81
	BLS-GSM	31.86	33.13	33.90	30.73	31.70	33.64
$\sigma_w = 20$ (22.10dB)	本文算法	30.40	33.04	32.25	29.67	30.32	32.44
	BLS-GSM	30.32	32.08	32.66	29.29	30.38	32.39
$\sigma_w = 25$ (20.14dB)	本文算法	29.20	31.95	31.24	28.25	29.28	31.52
	BLS-GSM	29.13	31.21	31.69	28.22	29.37	31.40
$\sigma_w = 30$ (18.57dB)	本文算法	28.15	30.78	30.40	27.19	28.34	30.44
	BLS-GSM	28.15	30.45	30.85	27.38	28.55	30.55



图7 去噪图像示例.上行三幅图像被叠加了方差为20的白高斯噪音.下行是去噪后的图像

图像,本文的方法提供较佳的可视效果,如图 7 所示.其中三幅图像了叠加方差为 20 的白高斯噪音,结果显示含有较少的残余噪音和“振铃”现象.

6 结论

本文提出一种基于过完备变换集合的图像去噪算法,采用加权平均来融合每一种变换所计算的去噪估计.权是依据变换系数的稀疏集中度来计算.权重依赖变换的稀疏分解程度,图像区域越稀疏,其权重就越大.该方法不需要图像的统计属性,而其它很多方法需要设计巧妙变换系数的统计模型以描述图像奇异特征.本文提出的方法允许盲奇异变换,如次优化 DCT 块变换,变换集合是由 DCT 块经空间移不变产生.我们的方法与使用复杂的有向变换和图像统计模型方法相比,具有较高的去噪性能,尤其是对包含奇异特征的图像得到了较好的去噪结果.实验结果证实了本文的结论.如何依据图像稀疏程度来自动选择稀疏集中度的幂次是未来的研究课题.

参考文献

- [1] D L Donoho, M Johnstone. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage[J]. Biometrika, 1994, 81: 425 - 455.
- [2] Y Hel-Or, D Shaked. A discriminative approach for wavelet denoising[J]. IEEE Transactions on Image Processing. 2008, 4 (17): 443 - 457.
- [3] S G Chang, Bin Yu, M Vetterli. Spatially adaptive wavelet thresholding with context modeling for image denoising[J]. IEEE Transactions on Image Processing. 2000, 9(9): 1522 - 1531.
- [4] Z Shan and S Aviyente. Image denoising based on the wavelet co-occurrence matrix [A]. Proc. IEEE ICASSP, Vol. 3 [C], Philadelphia, USA. 2005. 645 - 648.
- [5] J. Portilla, V. Strela, M. Wainwright, and E. P. Simoncelli. Image denoising using scale mixtures of gaussians in the wavelet domain[J]. IEEE Transactions on Image Processing. 2003, 12 (11): 1338 - 1351.
- [6] Z. Shan and S. Aviyente. Image denoising based on the wavelet co-occurrence matrix [A]. In Proc. IEEE ICASSP, Vol. 3 [C], Philadelphia, USA. 2005. 645 - 648.
- [7] Kreutz K, Murray Y J F. Dictionary learning algorithms for sparse representation [J]. Neural Computation, 2003, 15 (2): 349 - 396.
- [8] Aharon M, Elad M, Bruckstein A M. The K-SVD: An algorithm for designing of overcomplete dictionaries for sparse representation [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54(11): 4311 - 4322.
- [9] 肖泉, 丁兴号, 王守觉等. 基于自适应超完备稀疏表示的图像

- 去噪方法 [J]. 仪器仪表学报, 2009, 30(9): 1886 – 1890.
- Xiao Quan, Ding Xinghao, Wang Shoujue, et al. Image denoising based on adaptive over-complete sparse representation [J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2009, 30(9): 1886 – 1890 (in Chinese).
- [10] 蔡泽民, 赖剑煌. 一种基于超完备字典学习的图像去噪方法 [J]. 电子学报, 2009, 37(2): 347 – 350.
- CAI Zemin, LAI Jianhuang. An over-complete learned dictionary-based image de-noising method [J]. Acta Electronica Sinica. 2009, 37(2): 347 – 350 (in Chinese).
- [11] R R Coifman, D L Donoho. Translation invariant denoising [A]. in Wavelets and Statistics, Springer Lecture Notes in Statistics 103 [C]. New York Springer-Verlag. 1994. 125 – 150.
- [12] A Cohen, I Daubechies, O G Guleryuz, and M T Orchard. On the importance of combining wavelet-based nonlinear approximation with coding strategies [J]. IEEE Trans. Info. Theory, 2002, 48(7): 1895 – 1921.
- [13] Onur G Guleryuz. Weighted averaging for denoising with overcomplete dictionaries [J]. 2007, 16(12): 3020 – 3030.
- [14] J Wright, A Y Yang, A Ganesh, S S Sastry, Y Ma. Robust face recognition via sparse representation [J]. IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2009, 31(2): 210 – 227.

作者简介



解 凯 男, 1962 年出生, 工学博士, 北京印刷学院信息工程学院教授, CCF 会员. 主要研究方向为图像复原、超分辨率图像重建, 信号稀疏表示.

E-mail: kaixiek@126.com



张 芬 女, 1988 年出生, 工学硕士, 北京印刷学院信息工程学院研究生, 主要研究方向为图像复原, 信号稀疏表示.