

非线性递推控制 TORA 系统

郭卫平, 刘殿通, 李 帅

(烟台大学计算机学院, 山东烟台 264005)

摘 要: 针对欠驱动系统 TORA, 通过部分反馈线性化和全局坐标变换, 得到系统的非线性反馈级联模型. 为 TORA 系统提出了一种两步递推反步设计方法, 得到系统的非线性控制器. 设计过程中利用李雅普诺夫稳定理论保证了系统的稳定性. 仿真结果表明系统在任何初始状态下均能渐进稳定于其原点.

关键词: 欠驱动系统; TORA; 反步; 非线性控制; 递推

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2013) 11-2252-04

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2013.11.022

Nonlinear Recursive Control TORA System

GUO Wei-ping, LIU Dian-tong, LI Shuai

(Institute of Computer Science and Technology, Yantai University, Yantai, Shandong 264005, China)

Abstract: The TORA system model is transformed to a feedback cascade model with the partial feedback linearization and a global coordinate change. A two-steps recursive backstepping algorithm is proposed for the TORA system to obtain a nonlinear controller. During the design process, the system stability is guaranteed with the Lyapunov theory. The simulation results show the TORA system under any initial states is globally asymptotically stable to its origin.

Key words: underactuated system; TORA; backstepping; nonlinear control; recursive

1 引言

具有旋转激励的平移振荡器 (Translational oscillators with rotating actuator, TORA) 是典型的欠驱动机械系统, 由一个未驱动的平移振荡器和驱动的球摆组成, 源自双自旋航天器的简化模型^[1]. 现在学者将其作为研究对象的主要动因: 其一是研究如何利用旋转运动抑制平移振动; 其二是 TORA 已经成为了检验非线性系统控制器设计的基准模型. 目前文献中出现的控制器可以归结为智能设计方法和非线性设计方法: 智能设计方法中常见的有模糊控制^[2]和神经网络^[3], 模糊控制的问题在于模糊规则和参数需要提前设定并且难以证明系统的稳定性^[4]; 神经网络的问题在于需要学习过程^[5]. 非线性设计方法中常用的无源方法^[6,7]、反步设计方法^[7~9]和滑模控制方法^[10], 这三类方法设计过程都能够保证系统的稳定性, 但设计过程和得到的控制器均相对繁琐.

2 TORA 模型描述及模型处理

TORA 系统由电机驱动球摆和一个与弹簧连接的

移动车构成, 如图 1 所示, 其中 m_1 为移动车的等效质量, m_2 为球摆的等效质量, q_1 为车移动距离, q_2 为球摆转动角度, k 为弹簧弹性系数, τ 为电机输出转矩, r 为球摆等效转动半径, I 为球摆转动惯量. 移动车与弹簧连接, 在电机转动反作用力和弹簧弹性力的作用下在水平面内作一维运动. TORA 系统是一个由单输入 τ 和两自由度 (q_1, q_2) 构成的欠驱动系统, 其动态欧拉方程为:

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)\ddot{q}_1 + m_2 r \cos(q_2)\ddot{q}_2 - m_2 r \sin(q_2)\dot{q}_2^2 + kq_1 = 0 \\ m_2 r \cos(q_2)\ddot{q}_1 + (m_2 r^2 + I)\ddot{q}_2 + m_2 g r \sin(q_2) = \tau \end{cases} \quad (1)$$

通过配置部分反馈线性化^[11]

$$\begin{aligned} \tau = & \left((m_2 r^2 + I) - \frac{(m_2 r \cos(q_2))^2}{m_1 + m_2} \right) u \\ & + \frac{(m_2 r)^2 \sin(q_2) \cos(q_2)}{m_1 + m_2} \dot{q}_1^2 \\ & - k m_2 r q_1 \cos(q_2) + m_2 g r \sin(q_2) \end{aligned} \quad (2)$$

自由度 q_2 的动态可以简化为 $\ddot{q}_2 = u$

通过如下的可逆全局坐标变换^[12]

$$\begin{cases} x_1 = q_1 + \frac{m_2 r \sin(q_2)}{m_1 + m_2} \\ x_2 = q_2 \\ x_3 = (m_1 + m_2) \dot{q}_1 + m_2 r \cos(q_2) \dot{q}_2 \\ x_4 = \dot{q}_2 \end{cases} \quad (3)$$

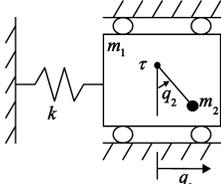


图1 TORA系统

把系统动态转换为如下的非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{x_3}{m_1 + m_2} \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = -kx_1 + \frac{km_2 r \sin x_2}{m_1 + m_2} \\ \dot{x}_4 = u \end{cases} \quad (4)$$

这样,TORA 系统动态模型可以表示为如下非线性反馈级联系统:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\frac{kx_1}{m_1 + m_2} + \frac{km_2 r}{(m_1 + m_2)^2} \sin x_2 \\ \ddot{x}_2 = u \end{cases} \quad (5)$$

3 递推反步非线性控制器设计

既然 TORA 系统能够通过部分反馈线性化和全局坐标变换转化为式(5)所示的非线性反馈级联系统,那么非线性控制器就能够通过递推反步技术进行设计.具体设计步骤如下:

步骤 1 从 TORA 数学模型(5)中的状态 x_1 的动态方程

$$\ddot{x}_1 = -\frac{k}{m_1 + m_2} x_1 + \frac{km_2 r}{(m_1 + m_2)^2} \sin x_2 \quad (6)$$

对于式(6),首先把状态 x_2 看做控制输入,定义 x_2 的参考轨迹 x_{2r} 为

$$x_{2r} = \frac{k}{m_1 + m_2} x_1 - \frac{km_2 r}{(m_1 + m_2)^2} \sin x_2 + x_2 - k_1 x_1 - k_2 \dot{x}_1$$

于是可以得到 x_2 的跟踪误差 e_2

$$\begin{aligned} e_2 &= x_2 - x_{2r} \\ &= -\frac{k}{m_1 + m_2} x_1 + \frac{km_2 r}{(m_1 + m_2)^2} \sin x_2 + k_1 x_1 + k_2 \dot{x}_1 \end{aligned} \quad (7)$$

其中 k_1 和 k_2 为正常数,数值的选择应使式 $\ddot{x}_1 + k_2 \dot{x}_1 + k_1 x_1 = 0$ 在状态 $(x_1, \dot{x}_1) = (0, 0)$ 处是渐进稳定的.

这样,状态 x_1 的动态方程(6)可以表达为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \ddot{x}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e_2 \quad (8)$$

定义: $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 于是式

(8)可以写作 $\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B e_2$

按照前面 k_1 和 k_2 的选择原则,能够保证存在一正定矩阵 P 和 Q 使得

$$A^T P + P A = -Q < 0$$

定义如下的标量正定李雅普诺夫函数

$$V_1 = \frac{1}{2} (\bar{x}^T P \bar{x} + e_2^2) \geq 0$$

则其时间微分 \dot{V}_1 为

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= -\frac{1}{2} \bar{x}^T Q \bar{x} + e_2 (\dot{e}_2 + \bar{x}^T P B) \\ &= -\frac{1}{2} \bar{x}^T Q \bar{x} + e_2 \left(-\frac{k}{m_1 + m_2} \dot{x}_1 + \frac{km_2 r \dot{x}_2}{(m_1 + m_2)^2} \cos x_2 \right. \\ &\quad \left. + k_1 \dot{x}_1 + k_2 \ddot{x}_1 + \bar{x}^T P B \right) \end{aligned} \quad (9)$$

注意到状态变量 \dot{x}_2 出现在了式(9)中.为了保证 \dot{V}_1 的负定,下一步将会把 \dot{x}_2 作为控制输入,并定义其参考轨迹 \dot{x}_{2r} ,以实现式(9)右侧第二项也应当小于或等于零.

步骤 2 在步骤 1 中,得到了李雅普诺夫函数 V_1 的时间微分式(9).为了使式(9)为负定,把 \dot{x}_2 作为等效控制输入,定义其参考轨迹 \dot{x}_{2r} 为

$$\begin{aligned} \dot{x}_{2r} &= \frac{k}{m_1 + m_2} \dot{x}_1 - \frac{km_2 r \dot{x}_2}{(m_1 + m_2)^2} \cos x_2 \\ &\quad - k_1 \dot{x}_1 - k_2 \ddot{x}_1 - \bar{x}^T P B + \dot{x}_2 - k_3 e_2 \end{aligned}$$

\dot{x}_2 的跟踪误差 \hat{e}_2 为

$$\begin{aligned} \hat{e}_2 &= \dot{x}_2 - \dot{x}_{2r} \\ &= -\frac{k}{m_1 + m_2} \dot{x}_1 + \frac{km_2 r \dot{x}_2}{(m_1 + m_2)^2} \cos x_2 \\ &\quad + k_1 \dot{x}_1 + k_2 \ddot{x}_1 + \bar{x}^T P B + k_3 e_2 \end{aligned} \quad (10)$$

这样

$$\dot{V}_1 = -\frac{1}{2} \bar{x}^T Q \bar{x} - k_3 e_2^2 + e_2 \hat{e}_2$$

现在改进标量正定李雅普诺夫函数 $V_1 \geq 0$ 为

$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} \hat{e}_2^2 \geq 0$, 则 V_2 的时间微分为

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= -\frac{1}{2} \bar{x}^T Q \bar{x} - k_3 e_2^2 + \hat{e}_2 (e_2 + \dot{\hat{e}}_2) \\ &= -\frac{1}{2} \bar{x}^T Q \bar{x} - k_3 e_2^2 + \hat{e}_2 \left(e_2 - \frac{k}{m_1 + m_2} \dot{x}_1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{km_2 r \dot{x}_2}{(m_1 + m_2)^2} \cos x_2 - \frac{km_2 r \dot{x}_2^2}{(m_1 + m_2)^2} \sin x_2 \right. \\ &\quad \left. + k_1 \ddot{x}_1 - \frac{kk_2}{m_1 + m_2} \dot{x}_1 + \frac{k_2 km_2 r \dot{x}_2}{(m_1 + m_2)^2} \cos x_2 \right. \\ &\quad \left. + \bar{x}^T P B + k_3 \dot{e}_2 \right) \end{aligned} \quad (11)$$

系统控制量 $u = \ddot{x}_2$ 已经出现在了式(11)的右侧第三项中.为了保证 \dot{V}_2 负定,选择适合的控制输入可以使下式成立:

$$\begin{aligned}
 e_2 - \frac{k}{m_1 + m_2} \ddot{x}_1 + \frac{km_2 \ddot{r}x_2}{(m_1 + m_2)^2} \cos x_2 + k_1 \ddot{x}_1 \\
 - \frac{km_2 \dot{r}x_2^2}{(m_1 + m_2)^2} \sin x_2 - \frac{kk_2}{m_1 + m_2} \dot{x}_1 + \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \\
 + \frac{k_2 km_2 \dot{r}x_2}{(m_1 + m_2)^2} \cos x_2 + k_3 \dot{e}_2 = -k_4 \hat{e}_2 \quad (12)
 \end{aligned}$$

这样

$$\dot{V}_2 = -\frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{Q} \dot{\mathbf{x}} - k_3 e_2^2 - k_4 \hat{e}_2^2 \leq 0 \quad (13)$$

由式(12)可以得到系统控制量为

$$\begin{aligned}
 u = -\frac{(m_1 + m_2)^2}{km_2 r \cos x_2} \left\{ e_2 - \frac{k}{m_1 + m_2} \ddot{x}_1 + k_1 \ddot{x}_1 - \frac{km_2 \dot{r}x_2^2}{(m_1 + m_2)^2} \sin x_2 \right. \\
 \left. + \frac{k_2 km_2 \dot{r}x_2}{(m_1 + m_2)^2} \cos x_2 - \frac{kk_2}{m_1 + m_2} \dot{x}_1 \right. \\
 \left. + \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{B} + k_3 \dot{e}_2 + k_4 \hat{e}_2 \right\} \quad (14)
 \end{aligned}$$

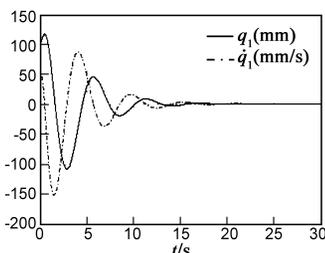
定理 1 由式(1)描述的 TORA 系统,通过部分反馈线性化(2)和全局坐标变换(3)得到系统模型(5),在控制器(14)的作用下,系统渐进稳定到原点。

证明:递推设计过程证明了:选取的正定的李雅普诺夫函数 V_2 ,其时间微分 \dot{V}_2 负定,即式(13)中右侧三项必然渐进趋近于 0,第一项 $-\frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{Q} \dot{\mathbf{x}}$ 渐进趋近于 0,意味着 (x_1, \dot{x}_1) 渐进趋近于 $(0, 0)$;第二项趋近于 0,由式(7)可知, x_2 渐进趋近于 0;第三项趋近于 0,由式(10)可知, \dot{x}_2 渐进趋近于 0.即式(5)描述的系统状态 $(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2)$ 渐进趋近于 $(0, 0, 0, 0)$ 。

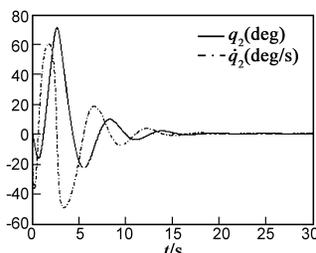
注 1:TORA 系统模型处理部分做过的部分反馈线性化变化和全局坐标变换均为可逆变换,其逆变换为

$$\begin{cases} q_1 = x_1 - \frac{m_2 r \sin x_2}{m_1 + m_2} \\ \dot{q}_1 = \dot{x}_1 - \frac{m_2 r \cos x_2}{m_1 + m_2} \dot{x}_2 \\ q_2 = x_2 \\ \dot{q}_2 = \dot{x}_2 \end{cases} \quad (15)$$

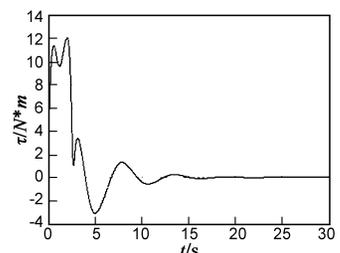
由式(15)可知: $(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2)$ 渐进趋近于 $(0, 0, 0, 0)$ 意味着 $(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2)$ 渐进趋近于 $(0, 0, 0, 0)$,此时实际系统控制输入 τ 可以通过式(2)和(14)以及全局坐标



(a) 车位置与速度



(b) 球摆角度与角速度



(c) 电机输出力矩

图2 系统状态为 $(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) = (100, 0, 0, 0)$ 时的控制结果

系变换矩阵(15)获得。

注 2:当 $x_2 = \pi/2$ 时控制器(14)存在奇异,处理方式是:对于非线性系统(4) $x_2 \in (\pi/2 - \Delta, \pi/2 + \Delta)$ 在邻域内线性化,然后按照线性系统的 LQR 方法设计出线性控制器:

$$u = -1.4142x_1 - 1.5525x_2 + 7.9775x_3 + 4.1176x_4 \quad (16)$$

实际控制采用根据状态 x_2 进行控制器(14)和控制器(16)的自动切换。

注 3:本文针对 TORA,采用递推反步技术只需两步就得到了稳定控制器,相对其他文献^[7-9]在设计过程和得到的控制器均简单了很多。

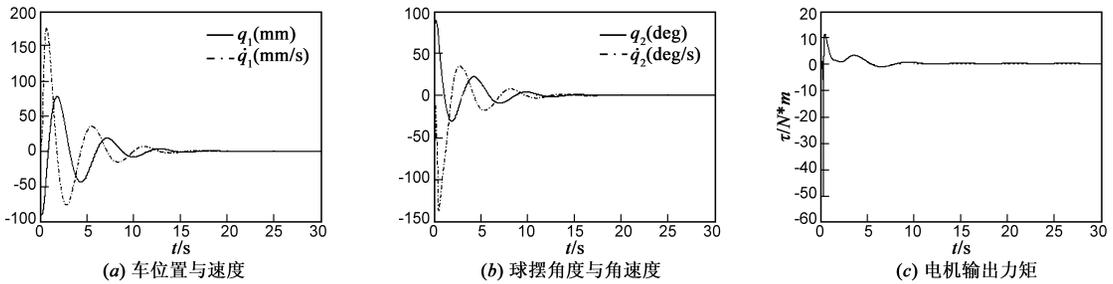
注 4:本文控制算法是针对非线性反馈级联系统(5)提出的,所有能够通过坐标变换转换为反馈级联模型的欠驱动系统均可以采用此设计方法,故本设计方法适用于一类欠驱动系统控制器设计。

4 仿真实验研究

为了检验提出的非线性控制算法,采用文献^[13]的系统参数 $m_1 = 10, m_2 = 1, k = 5, r = 1, l = 1$. 控制器参数选为 $\mathbf{P} = [5.5 \ 1; \ 1 \ 0.375], \mathbf{Q} = [8 \ 0; \ 0 \ 1], k_1 = 4, k_2 = 4, k_3 = 0.4, k_4 = 0.3, \Delta = 0.1$. 系统仿真结果如图 2 和图 3 所示. 图 2 是系统初始条件 $(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) = (100, 0, 0, 0)$ 即 $(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2) = (100, 0, 0, 0)$, 图 3 是在系统初始条件 $(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) = (-90.9, 0, 90, 0)$ 即 $(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2) = (0, 0, 90, 0)$ 情况下得到的仿真结果,仿真结果说明提出的控制器能够使系统在任何状态下渐进稳定,同时说明球摆的转动能够消除平面内的振动。

5 结论

本文针对 TORA,进行了部分反馈线性化和全局坐标变换,将其转换为一非线性反馈级联系统,然后采用递推设计-递推反步设计了系统的非线性控制算法.设计过程中以系统状态作为虚拟控制输入,为其设计了跟踪路径,控制算法实现了跟踪误差趋近于零的目标,最终实现了系统全部状态的控制. TORA 属于欠驱动机械系统,所提出的控制算法是针对非线性反馈级

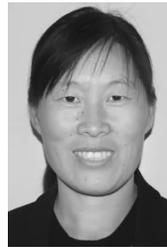
图3 系统状态为 $(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) = (-90.9, 0, 90, 0)$ 时的控制结果

联系统进行设计的。这样,对于所有能够通过部分反馈线性化和全局坐标变换转换为非线性反馈级联模型的欠驱动系统,均可以采用本文提出的控制器设计方案,从而推广为一类欠驱动系统控制器设计系统化方案。

参考文献

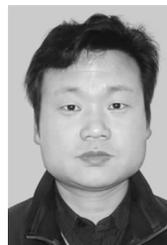
- [1] Robert T B, Bernstein D S, Coppola V T. A benchmark problem for nonlinear control design[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 1998, 8(4-5): 307-310.
- [2] Hung L C, Lin H P, Chung H Y. Design of self-tuning fuzzy sliding mode control for TORA system[J]. Expert Systems with Applications, 2007, 32(1): 201-212.
- [3] Lee C H, Yu T M, and Chien J C. Adaptive neural network controller design for a class of nonlinear systems using SPSA algorithm[A]. Proceedings of the International Multi-Conference on Engineers and Computer Scientists[C]. Hong Kong: Newswood Limited, 2011. 967-974.
- [4] 杜贞斌, 宋宜斌. 基于模糊逼近的非线性多时延系统的自适应跟踪控制[J]. 电子学报, 2012, 40(5): 897-900.
Du Zhen-bin, et al. Fuzzy approximation-based adaptive tracking control for nonlinear systems with multiple time delay[J]. Acta Electronica Sinica, 2012, 40(5): 897-900. (in Chinese)
- [5] 罗艳红, 张化光, 张庆灵. 执行器带未知不对称死区的一类仿射非线性系统的神经网络自适应控制器的设计[J]. 电子学报, 2008, 36(11): 2113-2119.
Luo Yan-hong, Zhang Hua-guang, et al. Neural network adaptive controller design for a class of affine nonlinear system with unknown nonsymmetric actuator dead-zone[J]. Acta Electronica Sinica, 2008, 36(11): 2113-2119. (in Chinese)
- [6] 高丙团. TORA 的动力学建模及基于能量的控制设计[J]. 自动化学报, 2008, 34(9): 1221-1224.
Gao Bing-tuan. Dynamical modeling and energy-based control design for TORA[J]. Acta Automatica Sinica, 2008, 34(9): 1221-1224. (in Chinese)
- [7] Jankovic M, Fontaine D, Kokotovic P V. TORA example: cascade and passivity based control designs[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 1996, 4(3): 292-297.
- [8] Bupp R, Bernstein D S, Coppola V T. Experimental implementation of integrator backstepping and passive nonlinear controllers on the RTAC testbed[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 1998, 8(4-5): 435-457.
- [9] Wang Y Q, Li S, Chen Q W. A recursive design method of controller for the stabilization of the translational oscillator with a rotational actuator system[A]. Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Science and Automation Engineering[C]. USA: IEEE press, 2011. 558-561.
- [10] Chen Y F, Huang A C. Controller design for a class of underactuated mechanical systems[J]. IET Control Theory Application, 2012, 6(1): 103-110.
- [11] Spong M W. Underactuated Mechanical Systems[M]. Control Problems in Robotics and Automation, Springer Verlag, London, 1997.
- [12] Olfati-Saber, R. Normal forms for underactuated mechanical systems with symmetry[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, 47(2): 305-308.
- [13] Olfati-Saber R. Nonlinear Control of Underactuated Mechanical Systems with Application to Robotics and aerospace Vehicles[D]. Massachusetts Institute of Technology, 2001.

作者简介



郭卫平 女, 1971 年生于山东潍坊. 烟台大学计算机学院讲师. 研究方向为非线性系统控制、欠驱动系统控制、混沌控制等。

E-mail: weiping.guo@163.com



刘殿通(通讯作者) 男, 1970 年生于山东德州. 烟台大学计算机学院教授. 研究方向为欠驱动系统控制、智能控制等。

Email: diantong.liu@163.com