

# 数据缺失情况下的空气流动速度估计算法

陈 诚,陶建武,曾 宾

(空军航空大学飞行器控制系,吉林长春 130022)

**摘 要:** 本文研究了在输出数据缺失的情况下空气流动速度(简称空速)估计问题.根据声波在气流中传播原理,给出了声矢量传感器线性阵列的输出模型.基于各个传感器输出信号幅值的差异,提出了两种空速估计算法,并给出了随机扰动补偿方法.在此基础上,针对阵列输出数据缺失的情况,提出了输出数据相关矩阵重构方法.此方法能够减少数据缺失对估计算法性能的影响,使得在某些传感器失效的情况下,估计算法仍能正常工作.仿真实验表明:在系统存在随机扰动时,两种算法具有较好的估计性能;在输出数据缺失情况下,经过对输出数据相关矩阵的重新构造,两种算法仍能保持较好的估计性能.

**关键词:** 阵列信号处理;空气流动速度估计;数据缺失;声矢量传感器

**中图分类号:** TH06; V219 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2014)03-0491-07

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>

**DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2014.03.011

## Estimation of Airspeed in Case of Missing Data

CHEN Cheng, TAO Jian-wu, ZENG Bin

(Flight Vehicle Control Department, Air Force Aviation University, Changchun, Jilin 130022, China)

**Abstract:** The airspeed estimate problem in case of missing data is researched in this paper. According to the propagation principle of acoustic wave in air current, the output model of an acoustic vector array is given. Two airspeed estimate algorithms are proposed based on the difference of output signal in amplitude of each sensor, and a method compensating random perturbation is given. In case of missing array's output data, a new method for reconstructing correlation matrix of output data is proposed. Using this method, the effect of missing data on the performance of airspeed estimate algorithms can be reduced. Thus, the airspeed estimate algorithms are still valid in case that some sensors fail. Simulation results show two airspeed estimate algorithms have better performance in the presence of random perturbation. By reconstructing correlation matrix of output data, two airspeed estimate algorithms can hold better performance in case of missing data.

**Key words:** array signal processing; airspeed estimation; data missing; acoustic vector sensor

## 1 引言

随着航天航空技术的飞速发展,大气数据测量系统越来越受重视;而以空速管形式实现的传统大气数据测量系统已经不适用于大马赫数,大攻角飞行条件的要求,而且一般存在安装、维护困难等问题.在这种背景下产生了嵌入式大气数据传感系统(Flush AirData Sensing System, FADS)<sup>[1,2]</sup>.与传统的大气数据测量系统相比,它在精度、可靠性上都有更大的优势.由于没有突出的空速管,飞机的隐身性能变得更好.目前在 FADS 系统中,采用静压和动压测量模型测量大气数据,使用的空速估计算法有三点迭代法、加权最小二乘法、BP 神经网络法等<sup>[3~5]</sup>.三点迭代法最为常用,精度较高,但其完全依赖

于系统的空气动力学模型,运算复杂;且测压孔的选择对计算结果会产生很大的影响,甚至导致系统病态.加权最小二乘法较为简单,算法性能与测压孔的位置无关且失效处理也比较简单,但存在迭代发散问题.BP 神经网络法,虽然实现了压力与大气参数的非线性映射,但需要大量的前期数据对网络进行训练.FADS 系统在计算飞机的空速时,需要的动压数据是由迭代算法得到的,而动压测量模型是非线性的,且计算过程中的校正参数需要通过风洞试验来标定.

声传感器或超声传感器作为常用的测量器件,广泛地应用于各种运动物体的速度测量<sup>[6~8]</sup>.文献[6]利用声传感器提出了一个测量低空飞行飞机的速度和高度方法.文献[7]研究了测量流体速度的声相关测速理

论.文献[8]使用被动声传感器的声波模式来估计运动车辆的速度.但是,这些方法使用的声传感器仅能感受声场的声压信息,其获得的信息量较少.而声矢量传感器是由一个声压传感器和三个相互垂直放置的质点振速传感器组成的新型传感器,它可以同步测量声场同一点处声压和质点振速矢量,能够获得更多信息量.因而,它得到了广泛的应用<sup>[9~12]</sup>.由于在连续流体介质声场中,任何一点附近的运动状态可用声压、密度以及介质运动速度唯一表示,那么声场中某一点的振速矢量就包含了该声场中的流体介质运动速度信息.基于此原理,文献[11,12]将声矢量传感器应用于 FADS 系统中,在飞机上通过声源产生声波,用声矢量传感器测得某点的质点振速,通过一定的算法进而得到飞机的空速.但这些算法未考虑随机扰动和数据缺失的影响,故其抗干扰性和容错性较差.为此,本文基于声矢量传感器阵列,提出了一种数据缺失情况下的空速估计算法.此算法具有较强的抗干扰性和容错性.

## 2 阵列测量模型

假设测量装置为圆柱型管路(直径为  $D$ ),声源和矢量传感器阵列安装于内管壁,示意图如图 1(a)所示,不考虑声波的反射与折射.假定阵列由  $M$  个矢量传感器(阵元)构成,每个矢量传感器由三个相互垂直放置的质点振速传感器组成,阵元间隔为  $d$ ,声源  $S$  为单极子声源,如图 1(b)所示,其中  $\theta_m$ 、 $\varphi_m$  和  $r_m$  分别为声源  $S$  到第  $m$  个阵元的二维方向角和径向矢量( $m=0,1,\dots,M-1$ ),且是已知的.

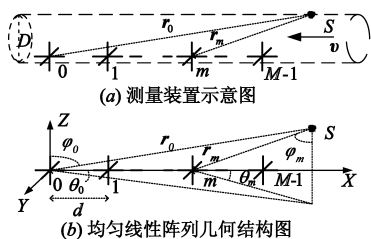


图1 测量原理示意图

若声波波前为球面波,且在均匀,恒温,无粘性的流动空气中传播(不计重力), $\mathbf{v}$  为声场中空气流动速度.为简化模型,假设理想气流从  $x$  轴吹来,即  $\mathbf{v}$  的方向为  $-x$  轴方向.则在第  $m$  个阵元输出质点振速矢量  $\mathbf{V}_m(t)$  为<sup>[12]</sup>

$$\mathbf{V}_m(t) = \frac{Ac_{r_m}}{\omega \rho r_m^2 c^2} \sqrt{c_{r_m}^2 + (\omega r_m)^2} \cdot \exp \left\{ j \left[ \omega t - \frac{\omega}{c_{r_m}} r_m - \arccot \left( \frac{\omega}{c_{r_m}} r_m \right) \right] \right\} \mathbf{h}_m + \mathbf{n}_m(t) \quad (1)$$

其中,  $r_m$  为声源  $S$  到第  $m$  个阵元的距离,即  $r_m =$

$\|\mathbf{r}_m\|$ ;  $\mathbf{h}_m$  为  $\mathbf{r}_m$  方向上的单位向量,即  $\mathbf{h}_m = [\cos\theta_m \sin\varphi_m \quad \sin\theta_m \sin\varphi_m \quad \cos\varphi_m]^T$ ;  $c_{r_m}$  为  $\mathbf{r}_m$  方向上的有效声速,即  $c_{r_m} = c + v \cos\theta_m \sin\varphi_m$ ,这里  $c$  为声波在均匀,恒温,无粘性,静止的空气中传播的速度,且  $v = \|\mathbf{v}\|$ .  $\mathbf{n}_m(t) = [n_{x_m}(t) \quad n_{y_m}(t) \quad n_{z_m}(t)]^T$  为第  $m$  个阵元的测量噪声矢量,假设  $n_{x_m}(t)$ ,  $n_{y_m}(t)$ ,  $n_{z_m}(t)$  为相互独立的零均值高斯白噪声,且与信源不相关.进一步,式(1)可简写成:

$$\mathbf{V}_m(t) = s(t) a_m \exp[-j(\tau_m + \arccot\tau_m)] \mathbf{h}_m + \mathbf{n}_m(t) \quad (2)$$

其中,  $s(t) = \frac{A_0 \omega}{\rho c_0^2} \exp(j\omega t)$ ,  $a_m = \frac{\sqrt{1 + \tau_m^2}}{\tau_m^2}$ ,  $\tau_m = \frac{\omega}{c_{r_m}} r_m$ . 最后整个阵列输出信号可表示为向量形式,即

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{H}\mathbf{S}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (3)$$

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{A}s(t)$$

式中:

$$\mathbf{V}(t) = [\mathbf{V}_0(t)^T, \mathbf{V}_1(t)^T, \dots, \mathbf{V}_{M-1}(t)^T]^T_{3M \times 1} \quad (4)$$

$$\mathbf{n}(t) = [\mathbf{n}_0(t)^T, \mathbf{n}_1(t)^T, \dots, \mathbf{n}_{M-1}(t)^T]^T_{3M \times 1} \quad (5)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathbf{h}_M \end{bmatrix}_{3M \times M} \quad (6)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 \exp[-j(\tau_0 + \arccot\tau_0)] \\ \vdots \\ a_{M-1} \exp[-j(\tau_{M-1} + \arccot\tau_{M-1})] \end{bmatrix}_{M \times 1} \quad (7)$$

其中,  $[\cdot]^T$  表示转置运算.

令阵列输出信号相关矩阵为  $\mathbf{R}_v = E(\mathbf{V}(t)\mathbf{V}^H(t))$ , 其中  $[\cdot]^H$  表示共轭转置运算.进一步,  $\mathbf{R}_v$  可以表示为

$$\mathbf{R}_v = \mathbf{R}_s \mathbf{H} \mathbf{R}_A \mathbf{H}^H + \sigma^2 \mathbf{I}_{3M} \quad (8)$$

其中  $\sigma^2 \mathbf{I}_{3M} = E(\mathbf{n}(t)\mathbf{n}^H(t))$ ,  $\mathbf{R}_s = E(s(t)s(t)^*)$ ,  $\mathbf{R}_A = E(\mathbf{A}\mathbf{A}^H)$ ,  $\mathbf{I}_{3M}$  表示  $3M$  阶单位阵,  $[\cdot]^*$  表示共轭运算.

## 3 基于幅值的空气流动速度估计算法

### 3.1 算法推导

从阵列输出信号模型来看,阵列中每个阵元接受到的信号幅值反应了空气流动速度变化,故通过阵列输出信号的幅值可以估计空气流动速度.

为简化书写,以下推导省略了时间变量  $t$ .若假设  $\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{G}^H \mathbf{V}$ , 其中  $\mathbf{G}^H$  为线性估计矩阵,且  $\hat{\mathbf{S}}$  为  $\mathbf{S}$  的最优线性无偏估计.由于  $\hat{\mathbf{S}}$  为无偏估计,因此

$$E(\hat{\mathbf{S}}) = E(\mathbf{G}^H \mathbf{V}) = E\{\mathbf{G}^H(\mathbf{H}\mathbf{S} + \mathbf{n})\} = \mathbf{G}^H \mathbf{H}\mathbf{S} = \mathbf{S} \quad (9)$$

由式(9)可得:

$$\mathbf{G}^H \mathbf{H} = \mathbf{I}_M \quad (10)$$

其中  $\mathbf{I}_M$  为  $M$  阶单位阵. 估计的均方误差矩阵可表示为:

$$\text{MSE}(\hat{\mathbf{S}}) = \text{E}\{(\hat{\mathbf{S}} - \mathbf{S})(\hat{\mathbf{S}} - \mathbf{S})^H\} = \mathbf{G}^H \mathbf{R}_V \mathbf{G} - \mathbf{R}_s \quad (11)$$

其中  $\mathbf{R}_s = \text{E}(\mathbf{S}\mathbf{S}^H) = \mathbf{R}_s \mathbf{A}_A$

由于  $\hat{\mathbf{S}}$  为  $\mathbf{S}$  的最优估计, 即  $\hat{\mathbf{S}}$  应使得  $\text{MSE}(\hat{\mathbf{S}})$  取得最小值. 故估计的优化准则可由下式表示:

$$\min \mathbf{G}^H \mathbf{R}_V \mathbf{G} \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{G}^H \mathbf{H} = \mathbf{I}_M \quad (12)$$

由于  $\mathbf{R}_V$  为 Hermitian 正定矩阵, 且  $\mathbf{H}$  为列满秩, 上述估计准则存在唯一解<sup>[13,14]</sup>:

$$\mathbf{G} = \mathbf{R}_V^{-1} \mathbf{H} (\mathbf{H}^H \mathbf{R}_V^{-1} \mathbf{H})^{-1} \quad (13)$$

于是,  $\mathbf{S}$  的最优线性估计可表示为:

$$\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{G}^H \mathbf{V} = \{\mathbf{R}_V^{-1} \mathbf{H} (\mathbf{H}^H \mathbf{R}_V^{-1} \mathbf{H})^{-1}\}^H \quad (14)$$

$$\mathbf{V} = (\mathbf{H}^H \mathbf{R}_V^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H \mathbf{R}_V^{-1} \mathbf{V}$$

由式(14)和  $\mathbf{S} = \mathbf{A}\mathbf{s}$  可以得到:

$$\hat{\mathbf{A}} = \frac{\hat{\mathbf{S}}\mathbf{s}^H}{\mathbf{s}\mathbf{s}^H} = \frac{(\mathbf{H}^H \mathbf{R}_V^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H \mathbf{R}_V^{-1} \mathbf{V} \mathbf{s}^H}{\mathbf{s}\mathbf{s}^H} \quad (15)$$

故得:

$$\hat{\mathbf{A}} = \text{abs}(\hat{\mathbf{A}}) = \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_M \end{bmatrix}_{M \times 1} \quad (16)$$

其中  $\text{abs}(\cdot)$  表示为对向量中每个元素取模值.

由  $\hat{\mathbf{A}}$  中的元素  $\hat{a}_m^2 (m=0,1,\dots,M-1)$  可解得  $\hat{\tau}_m$ , 即

$$\hat{\tau}_m = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + 4\hat{a}_m^2}}{2\hat{a}_m^2}} \quad (17)$$

进而, 从  $\hat{\tau}_m$  可解得

$$\hat{v}_m = \frac{\omega r_m - \hat{c}\hat{\tau}_m}{\hat{\tau}_m \sin \varphi_m \cos \varphi_m} \quad (18)$$

其中,  $\hat{v}_m$  为利用第  $m$  个阵元输出信号而得到的  $v$  的估计值. 最后, 将所有  $M$  个估计值取平均后, 可得  $v$  的最终估计值:

$$\hat{v} = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \hat{v}_m \quad (19)$$

由于实际接受数据长度有限, 故  $\mathbf{R}_v$  可由其最大似

然估计  $\hat{\mathbf{R}}_v = \frac{1}{L} \mathbf{V}\mathbf{V}^H$  代替, 其中  $\mathbf{V} = [\mathbf{V}(1) \quad \mathbf{V}(2) \quad \dots \quad \mathbf{V}(L)]_{3M \times L}$ ,  $L$  为快拍数. 由于此算法是基于阵列输出信号幅值估计空气流动速度, 它被简称为 AES (Amplitude EStimation) 算法.

由于利用式(15)估计  $\mathbf{A}$ , 需要矩阵的逆运算, 计算量较大. 为进一步减少计算量, 我们提出另一种计算量较小的估计算法. 首先定义第  $m$  阵元输出信号相关矩阵为  $\mathbf{R}_m = \text{E}[\mathbf{V}_m(t) \mathbf{V}_m^H(t)]$ , 即

$$\mathbf{R}_m = \frac{1 + \tau_m^2}{\tau_m^4} \mathbf{R}_s \mathbf{h}_{r_m} \mathbf{h}_{r_m}^H + \sigma^2 \mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} R_{xx_m} & R_{xy_m} & R_{xz_m} \\ R_{yx_m} & R_{yy_m} & R_{yz_m} \\ R_{zx_m} & R_{zy_m} & R_{zz_m} \end{bmatrix} \quad (20)$$

其中,  $\mathbf{R}_s = \left(\frac{A_0 \omega}{\rho c_0^2}\right)^2$ ,  $\sigma^2 \mathbf{I}_3 = \text{E}(\mathbf{n}_m(t) \mathbf{n}_m^H(t))$ . 由式(20)可知, 噪声项只包含于  $\mathbf{R}_m$  的主对角线上元素中, 故  $\mathbf{R}_m$  的非对角线上元素为:

$$\begin{bmatrix} R_{xy_m} \\ R_{yz_m} \\ R_{xz_m} \end{bmatrix} = \frac{1 + \tau_m^2}{\tau_m^4} \mathbf{R}_s \begin{bmatrix} \cos \theta_m \sin \theta_m \sin^2 \varphi_m \\ \sin \theta_m \sin \varphi_m \cos \varphi_m \\ \cos \theta_m \sin \varphi_m \cos \varphi_m \end{bmatrix} \quad (21)$$

求解式(21), 可得

$$\hat{\tau}_m = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + 4\kappa_m}}{2\kappa_m}} \quad (22)$$

其中

$$\kappa_m = \frac{1}{3R_s} \left( \frac{R_{xy_m}}{\cos \theta_m \sin \theta_m \sin^2 \varphi_m} + \frac{R_{yz_m}}{\sin \theta_m \sin \varphi_m \cos \varphi_m} + \frac{R_{xz_m}}{\cos \theta_m \sin \varphi_m \cos \varphi_m} \right) \quad (23)$$

最后, 利用式(18)和(19), 可从  $\hat{\tau}_m$  解出  $\hat{v}$ .

在实际应用中, 相关矩阵  $\mathbf{R}_m$  可由采样相关矩阵  $\hat{\mathbf{R}}_m$  代替. 由于此算法利用每个阵元的输出信号直接估计空气流动速度, 故它被简称为 DA (Direct Approach) 算法.

### 3.2 扰动补偿

由于噪声项仅存在于  $\mathbf{R}_m$  主对角线上的元素中, 而 DA 算法并未使用  $\mathbf{R}_m$  主对角线上的元素. 从理论上说, 在 DA 算法中,  $v$  的估计基本上不受测量噪声的干扰, 其误差主要来源于各种随机扰动造成的模型误差. 当存在随机角度 ( $\delta_{\theta_m}, \delta_{\varphi_m}$ ) 和距离  $\delta_{r_m}$  扰动时, 这里假定 ( $\delta_{\theta_m}, \delta_{\varphi_m}$ ) 和  $\delta_{r_m}$  是相互独立的零均值随机变量, 且方差很小, 则有:

$$\check{\mathbf{h}}_{r_m} = \begin{bmatrix} \cos \check{\theta}_m \sin \check{\varphi}_m \\ \sin \check{\theta}_m \sin \check{\varphi}_m \\ \cos \check{\varphi}_m \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\check{\tau}_m = \frac{\omega r_m}{c_0 + v \cos \check{\theta}_m \sin \check{\varphi}_m}$$

其中,  $\check{\theta}_m = \theta_m + \delta_{\theta_m}$ ,  $\check{\varphi}_m = \varphi_m + \delta_{\varphi_m}$ ,  $r_m = r_m + \delta_{r_m}$ . 此时第  $m$  阵元输出信号相关矩阵为  $\mathbf{R}_m$ , 利用  $\mathbf{R}_m$  的非对角线上元素, 由式(21)可得:

$$\hat{\theta}_m = \tan^{-1} \left( \frac{\check{R}_{yz_m}}{\check{R}_{xz_m}} \right)$$

$$\hat{\varphi}_m = \tan^{-1} \left( \frac{\check{R}_{xy_m}}{\check{R}_{yz_m} \cos \hat{\theta}_m} \right) \quad (25)$$

其中  $\hat{\theta}_m$  和  $\hat{\varphi}_m$  分别为  $\check{\theta}_m$  和  $\check{\varphi}_m$  的估计值.

利用由图 1 显示的几何关系,可得到下式:

$$\check{h}_{r_m} = \begin{bmatrix} \cos \check{\theta}_m \sin \check{\varphi}_m \\ \sin \check{\theta}_m \sin \check{\varphi}_m \\ \cos \check{\varphi}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (r_0 \cos \check{\theta}_0 \sin \check{\varphi}_0 - ld) / r_m \\ r_0 \sin \check{\theta}_0 \sin \check{\varphi}_0 / r_m \\ r_0 \cos \check{\varphi}_0 / r_m \end{bmatrix} \quad (26)$$

那么将  $(\hat{\theta}_{0m}, \hat{\varphi}_{0m})$  代入式 (26), 可解得:

$$\hat{r}_{0m} = \frac{1}{2(M-1)} \cdot \sum_{m=1}^{M-1} \left( \frac{md \sin \hat{\theta}_m}{\sin(\hat{\theta}_m - \hat{\theta}_0) \sin \hat{\varphi}_0} + \frac{md}{\cos \hat{\theta}_0 \sin \hat{\varphi}_0 - \cos \hat{\theta}_m \tan \hat{\varphi}_m \cos \hat{\varphi}_0} \right) \quad (27)$$

进而又可以得到:

$$\hat{r}_m = \frac{1}{3} \left( \frac{(r_0 \cos \hat{\theta}_0 \sin \hat{\varphi}_0 - md)}{\cos \hat{\theta}_m \sin \hat{\varphi}_m} + \frac{r_0 \sin \hat{\theta}_0 \sin \hat{\varphi}_0}{\sin \hat{\theta}_m \sin \hat{\varphi}_m} + \frac{r_0 \cos \hat{\varphi}_0}{\cos \hat{\varphi}_m} \right) \quad (28)$$

将  $(\hat{\theta}_m, \hat{\varphi}_m)$  和  $\hat{r}_m$  代入 DA 和 AES 算法, 解得  $\hat{v}$ . 通过补偿处理后, 可减少随机扰动对估计性能的影响.

#### 4 数据缺失情形下的相关矩阵重构方法

在数据缺失的情形下, 利用  $\hat{\mathbf{R}}_v = \frac{1}{L} \mathbf{V} \mathbf{V}^H$  代替  $\mathbf{R}_v$  必然会产生较大的误差. 故我们提出一种新的  $\mathbf{R}_v$  重构方法, 对阵列输出数据进行预处理, 从而减小数据缺失对估计算法性能的影响.

假设某一时刻  $L_1$  开始, 阵列中某些阵元失效, 输出为零, 此时正常工作的阵元个数为  $m_1$ ; 到  $L_1 + L_2$  时刻, 正常工作的阵元个数减少为  $m_2$ , 依此类推, 到  $L_1 + \dots + L_k + \dots + L_K$  时刻, 正常工作的阵元个数减少为  $m_K$  ( $m_K \geq 1$ ). 可见,  $L \geq L_1 + \dots + L_k + \dots + L_K$ ,  $M > m_1 > \dots > m_k > \dots > m_K$ . 在实际应用中, 对于有人机的一次连续飞行来说, 阵元失效的几率很小, 因此, 阵元失效的次数  $K$  一般很小, 甚至为零. 但对于长航时无人机的连续侦察飞行来说, 阵元失效的几率会增大. 尤其是在恶劣复杂气候条件下, 由于气流的剧烈变化, 造成传感器接收不到声源信号, 其输出变为零. 这时, 阵元失效的次数  $K$  可能较大. 由以上假设可知, 在  $L_1 + \dots + L_{k-1}$  时刻到  $L_1 + \dots + L_k$  时刻区间内, 正常工作的阵元个数为  $m_k$ , 因此, 阵列输出矢量  $\mathbf{V}(t)$  中, 必有  $3(M - m_k)$  个元

素为零. 通过矢量初等行变换, 将矢量  $\mathbf{V}(t)$  中所有零元素变换到第 1 至  $3(M - m_k)$  行, 这时, 阵列输出数据可表示为:  $\mathbf{X}_k(t) = [\mathbf{0}_{3m_k \times 3(M - m_k)} \quad \mathbf{I}_{3m_k}] \mathbf{V}(t)$ , 其中,  $\mathbf{0}_{3m_k \times 3(M - m_k)}$  为  $3m_k \times 3(M - m_k)$  阶零矩阵,  $\mathbf{I}_{3m_k}$  为  $3m_k$  阶单位阵. 因此, 阵列输出数据的相关矩阵为  $\mathbf{R}_k$  可写为

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_k &= E(\mathbf{X}_k(t) \mathbf{X}_k(t)^H) \\ &= [\mathbf{0}_{3m_k \times 3(M - m_k)} \quad \mathbf{I}_{3m_k}] \mathbf{R}_v [\mathbf{0}_{3m_k \times 3(M - m_k)} \quad \mathbf{I}_{3m_k}]^H \end{aligned} \quad (29)$$

由于  $\mathbf{R}_v$  为 Hermitian 正定矩阵, 则  $\mathbf{R}_v^{-1}$  的 Cholesky 分解有<sup>[15]</sup>:

$$\mathbf{R}_v^{-1} = \mathbf{Q} \mathbf{W} \mathbf{Q}^H \quad (30)$$

其中:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \mathbf{q}_{3M} & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \mathbf{q}_{3M-1} & \ddots & 0 & \vdots \\ & & \ddots & 1 & 0 \\ & & & \mathbf{q}_2 & 1 \end{bmatrix}_{3M \times 3M} \quad (31)$$

$$\mathbf{W} = \text{diag}\{w_{3M}, w_{3M-1}, \dots, w_1\} \quad (32)$$

因此,  $\mathbf{R}_k^{-1}$  的 Cholesky 分解为<sup>[13]</sup>:

$$\mathbf{R}_k^{-1} = \mathbf{Q}_{3m_k \times 3m_k} \mathbf{W}_{3m_k} \mathbf{Q}_{3m_k \times 3m_k}^H \quad (33)$$

其中,  $\mathbf{Q}_{3m_k \times 3m_k}$

$$\begin{aligned} &= [\mathbf{0}_{3m_k \times 3(M - m_k)} \quad \mathbf{I}_{3m_k}] \mathbf{Q} [\mathbf{0}_{3m_k \times 3(M - m_k)} \quad \mathbf{I}_{3m_k}]^H \\ \mathbf{W}_{3m_k} &= [\mathbf{0}_{3m_k \times 3(M - m_k)} \quad \mathbf{I}_{3m_k}] \mathbf{W} [\mathbf{0}_{3m_k \times 3(M - m_k)} \quad \mathbf{I}_{3m_k}]^H \\ &= \text{diag}\{w_{3m_k}, w_{3m_k-1}, \dots, w_1\} \end{aligned} \quad (34)$$

由文献[13]可知, 观测数据的最大似然函数  $f$  为:

$$\begin{aligned} f &= \sum_{k=1}^K \left( L_k \ln |\mathbf{R}_k| + \sum_{t=1+L_1+\dots+L_{k-1}}^{L_1+\dots+L_k} \mathbf{X}_k(t)^H \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{X}_k(t) \right) \\ &= \sum_{k=1}^K L_k (\ln |\mathbf{R}_k| + \text{tr}\{\mathbf{R}_k^{-1} \hat{\mathbf{R}}_k\}) \end{aligned} \quad (35)$$

其中,  $|\cdot|$  为矩阵的行列式,  $\text{tr}\{\cdot\}$  表示矩阵的迹.  $\hat{\mathbf{R}}_k$  是  $\mathbf{R}_k$  的最大似然估计, 即

$$\hat{\mathbf{R}}_k = \frac{1}{L_k} \sum_{t=1+L_1+\dots+L_{k-1}}^{L_1+\dots+L_k} \mathbf{X}_k(t) \mathbf{X}_k(t)^H \quad (36)$$

由式(33)可得

$$\ln |\mathbf{R}_k| = -2 \ln |\mathbf{Q}_{3m_k \times 3m_k}| - \ln |\mathbf{W}_{3m_k}| = - \sum_{i=1}^{3m_k} \ln(w_i) \quad (37)$$

这里, 由于  $\mathbf{Q}_{3m_k \times 3m_k}$  与  $\mathbf{Q}$  结构相似, 均为下三角阵, 且对角线上的元素都为 1, 从而可得  $\ln |\mathbf{Q}_{3m_k \times 3m_k}| = 0$ . 根据矩阵迹的相似不变性质, 并令  $\mathbf{g}_i = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{q}_i \end{bmatrix}$ , 则可得:

$$\text{tr}\{\mathbf{R}_k^{-1} \hat{\mathbf{R}}_k\} = \sum_{i=1}^{3m_k} w_i \mathbf{g}_i^H \mathbf{\Gamma}_{i,k} \mathbf{g}_i \quad (38)$$

其中

$$\mathbf{\Gamma}_{i,k} = [\mathbf{0} \quad \mathbf{I}_i]_{i \times 3m_k} \hat{\mathbf{R}}_k [\mathbf{0} \quad \mathbf{I}_i]_{i \times 3m_k}^H \quad (39)$$

那么,将式(37)和(38)带入式(35),最大似然函数  $f$  化简为:

$$f = \sum_{k=1}^K L_k \left[ \sum_{i=1}^{3m_k} (w_i \mathbf{g}_i^H \mathbf{\Gamma}_{i,k} \mathbf{g}_i - \ln(w_i)) \right] \quad (40)$$

为了求出使得  $f$  取最小值的  $\hat{w}_i$ ,我们对函数  $f$  求导,可得

$$\frac{df}{dw_i} = \mathbf{g}_i^H \left( \sum_{k=1}^K L_k \mathbf{\Gamma}_{i,k} \right) \mathbf{g}_i - \frac{1}{w_i} \sum_{k=1}^K L_k \quad (41)$$

令  $df/dw_i$  为零,可得:

$$\hat{w}_i^{-1} = \frac{\mathbf{g}_i^H \mathbf{T}_i \mathbf{g}_i}{\sum_{k=1}^K L_k} \quad (42)$$

其中:

$$\mathbf{T}_i = \left( \sum_{k=1}^K L_k \mathbf{\Gamma}_{i,k} \right) \quad (43)$$

令  $\mathbf{u}_i = [1 \quad 0]^T_{i \times 1}$ ,由  $\mathbf{g}_i$  容易得到:  $\mathbf{g}_i^T \mathbf{u}_i = 1$ .故  $\mathbf{g}_i$  的估计准则为:

$$\min \mathbf{g}_i^H \mathbf{T}_i \mathbf{g}_i \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{g}_i^T \mathbf{u}_i = 1 \quad (44)$$

由式(44),可求得  $\mathbf{g}_i$  的估计值,即

$$\hat{\mathbf{g}}_i = \frac{\mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{u}_i}{\mathbf{u}_i^H \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{u}_i} \quad (45)$$

进而由  $\hat{w}_i^{-1}$  和  $\hat{\mathbf{g}}_i$ ,可求得  $\hat{\mathbf{Q}}$  和  $\hat{\mathbf{W}}$ .因此,  $\mathbf{R}_V^{-1}$  的估计为

$$\hat{\mathbf{R}}_V^{-1} = \hat{\mathbf{Q}}^H \hat{\mathbf{W}} \hat{\mathbf{Q}} \quad (46)$$

总结上述推导过程,  $\hat{\mathbf{Q}}$  和  $\hat{\mathbf{W}}$  可按以下步骤求得:

步骤 1 由式(36)计算得到  $\hat{\mathbf{R}}_k, k=1,2,\dots,K$ .

步骤 2 由式(39)和式(43)计算得到  $\mathbf{T}_i, k=1,2,\dots,K; i=1,2,\dots,3M$ .

步骤 3 由式(45)计算得到  $\hat{\mathbf{g}}_i, k=1,2,\dots,K; i=1,2,\dots,3M$ .

步骤 4 由式(42)计算得到  $\hat{w}_i^{-1}, k=1,2,\dots,K, i=1,2,\dots,3M$ .

步骤 5  $\hat{\mathbf{W}} = \text{diag}\{\hat{w}_{3M}, \hat{w}_{3M-1}, \dots, \hat{w}_1\}$ .

步骤 6 由  $\hat{\mathbf{g}}_i$  得到  $\hat{\mathbf{q}}_i$ ,从而按式(31)构造  $\hat{\mathbf{Q}}$ .

利用式(46)计算得到  $\hat{\mathbf{R}}_V^{-1}$  后,代入 ASE 算法中,可得到数据缺失情形下的空气速度估计算法(简称 R-AES 算法).由于在 DA 算法中,  $\mathbf{R}_m$  均由 AES 算法中的  $\mathbf{R}_V$  对角线和次对角线上元素构成,故在数据缺失时,该重构方法也可用于 DA 算法(简称 R-DA 算法).

## 5 算法仿真

在均匀恒温稳定气流中有一个单频声源入射到由声矢量传感器构成的 ULA 阵列,如图 1 所示.声源信号频率为 3400Hz,即  $\omega = 6800\pi$  rad/s,声波的波长  $\lambda =$

0.1m;声源到第 0 个阵元的方位参数  $(\theta_0, \varphi_0)$  和距离参数  $r_0$  分别为  $(2^\circ, 88^\circ)$  和  $12\lambda$ ;声波在无风时的传播速度  $c$  为 340m/s;传感器个数  $M = 10$ ,阵元间距  $d = \lambda/4$ ;测量噪声均为加性高斯白噪声,无特殊说明时,信噪比(SNR)为 20,快拍数  $L$  为 1024.

**实验 1** 算法性能对比实验.在不考虑系统随机扰动和阵列输出数据缺失的情况下,空气流动速度  $v$  为 300m/s,估计结果为 100 次 Monte-Carlo 实验的平均值.图 2 为 AES 算法与 DA 算法、鲁棒  $H_\infty$  算法<sup>[12]</sup>、多重信号分类(Music)算法<sup>[16]</sup>(搜索步长为 0.5m/s)的均方根误差(RMSE)随信噪比(SNR)变化曲线.图 3 为均方根误差(RMSE)随快拍数( $L$ )变化曲线.从图 2 和图 3 中可以看出, AES 算法与 DA 算法的估计精度均要高于 Music 算法.由于 AES 算法与 DA 算法均为多快拍统计算法,在多快拍的情形下 AES 算法与 DA 算法的估计精度均要高于单快拍的鲁棒  $H_\infty$  算法,但计算量要大于鲁棒  $H_\infty$  算法.在低信噪比( $\text{SNR} \leq -9\text{dB}$ )、少快拍的情形下, DA 算法的估计精度要高于 AES 算法.

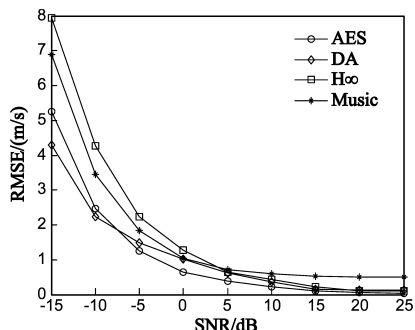


图2 RMSE随SNR变化曲线( $L=1024$ )

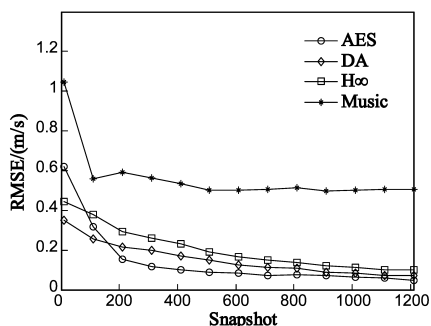


图3 RMSE随快拍数 $L$ 变化曲线( $\text{SNR}=20$ )

**实验 2** 存在随机扰动时空气流动速度估计实验.当系统存在的随机扰动时,假设  $\delta_{\theta_i} = \delta_{\varphi_i} = 1^\circ$ ,  $\delta_{r_i} = 0.01\lambda$ ,利用每个阵元输出数据估计的空气流动速度值  $\hat{v}_m (m=0,1,\dots,9)$  如图 4 所示.图中实线表示经过扰动补偿的估计值  $\hat{v}_m$ ;图中虚线表示未经过扰动补偿的估计值  $\hat{v}_m$ .各估计值的均值和方差如表 1 所示.由图 4 和

表 1 可以看出,在存在系统随机扰动时,AES 和 DA 算法性能严重下降,其估计值的方差较大,但经过扰动补偿后,两种算法仍能保持良好的估计性能。

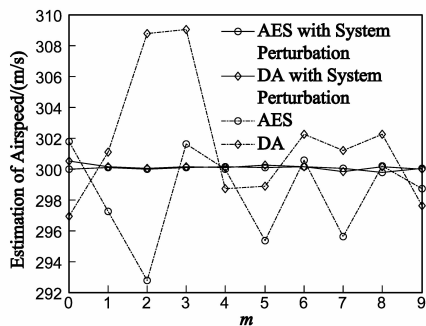


图4 空气流动速度 $\hat{v}_m$ 估计

表 1 存在随机扰动时空速估计实验结果

	经过扰动补偿		未经过扰动补偿	
	均值	方差	均值	方差
AES 算法	299.8581	0.1288	298.7143	9.9437
DA 算法	299.7749	0.1405	301.6669	17.8804

**实验 3** 数据缺失时空速估计实验. 信噪比(SNR)为 0dB, 快拍数  $L$  为 1024, 考虑阵列输出数据缺失的情况, 每 200 次快拍后都有一个阵元失效, 其输出为零. 图 5 给出了由 R-AES 算法、R-DA 算法、AES 算法和 DA 算法所得到的空气流动速度估计值  $\hat{v}_m$ . 各估计值的均值和方差如表 2 所示. 从图 5 和表 2 中, 可以看出在阵列输出数据缺失的情形下, AES 算法, DA 算法的性能严重下降, 但 R-AES 算法和 R-DA 算法仍具有较好的估计性能, 可见数据缺失预处理方法能够减少数据缺失对算法估计性能的影响. 图 6 给出了 R-AES 算法、R-DA 算法与鲁棒  $H_\infty$  算法<sup>[12]</sup>的均方根误差(RMSE)随信噪比(SNR)变化曲线, 这里, 估计结果为 100 次 Monte-Carlo 实验的平均值. 从图 6 中可以看出, 在信号数据缺失情况下, R-AES 算法和 R-DA 算法的估计性能均优于鲁棒  $H_\infty$  算法的估计性能。

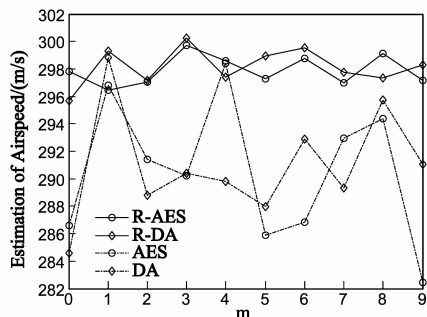


图5 空气流动速度 $\hat{v}_m$ 估计

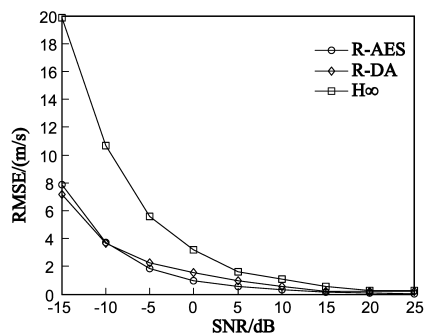


图6 RMSE随SNR变化曲线( $L=1024$ )

表 2 数据缺失时空速估计实验结果

	R-AES 算法	R-DA 算法	AES 算法	DA 算法
均值	297.8995	298.1594	288.5893	290.9463
方差	1.1812	1.8689	19.5281	16.3761

## 6 结论

本文基于稳定流动空气场内的声矢量传感器阵列输出模型, 提出了两种空气流动速度估计算法, 并给出了随机扰动补偿方法. 在此基础上, 针对阵列输出数据缺失的情况, 提出了输出数据相关矩阵重构方法. 此方法能够减少数据缺失对估计算法性能的影响, 从而提高了算法的容错性能. 理论分析和仿真实验表明: 同 AES 算法相比, DA 算法简单且运算量小, 实时性好; 在系统存在随机扰动时, 两种算法具有较好的估计性能. 在输出数据缺失情况下, 经过对输出数据相关矩阵的重新构造, 两种算法仍能保持较好的估计性能。

## 参考文献

- [1] Whitmore S A, Cobleigh B R, Haering E A. Design and Calibration of the X-33 Flush Airdata Sensing (FADS) System [R]. Maryland: NASA, 1998.
- [2] Baumann E, Pahle J W, Davis M C, et al. X-43A Flush airdata sensing system flight-test results[J]. Journal of Spacecraft and Rockets, 2010, 47(1): 48 - 61.
- [3] Weiss S. Comparing three algorithms for modeling flush airdata system[A]. 40th Aerospace Sciences Meeting & Exhibit[C]. Reno: AIAA, 2002.
- [4] 张斌, 于盛林. 嵌入式飞行参数传感系统的神经网络算法[J]. 航空学报, 2006, 27(2): 294 - 298.  
Zhang B, Yu S L. Network algorithm for flush airdata sensing system[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2006, 27(2): 294 - 298. (in Chinese)
- [5] Zheng C J, Lu Y P, He Z. Improved algorithms for Flush airdata sensing system[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2006, 19(4): 334 - 339.
- [6] Lo K W, Ferguson B G, Gao Y, Maguer A. Aircraft flight parameter estimation using acoustic multipath delays[J]. IEEE

- Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2003, 39(1):259 – 268.
- [7] 朱维庆,冯雷,王长红,等.声相关流体速度测量理论和信号处理方法[J].声学学报,2007,32(2):44 – 150.  
Zhu W-Q, Feng L, Wang C-H, et al. Theory and signal processing of acoustic correlation techniques for current velocity measurement[J]. Acta Acustica, 2007, 32(2):144 – 150. (in Chinese)
- [8] Cevher V, Chellappa R, McClellan J H. Vehicle speed estimation using acoustic wave patterns[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2009, 57(1):30 – 47.
- [9] 孙贵青,李启虎.声矢量传感器研究进展[J].声学学报, 2004, 29(6):481 – 490.  
Sun G P, Li Q H. Progress of study on acoustic vector sensor [J]. Acta Acustica, 2004, 29(6):481 – 490. (in Chinese)
- [10] 刘兆霆,潘张鑫.速度传感器阵列近场声源定位的孔径扩展算法[J].电子学报,2013,41(5):848 – 851.  
Liu Z-T, Pan Z-X. Extended aperture near field acoustic source localization algorithm with a velocity sensor[J]. Acta Electronica Sinica, 2013, 41(5):848 – 851. (in Chinese)
- [11] 王立新,陶建武.一种新型的大气数据测量方法[J].计量学报,2011,32(1):31 – 35.  
Wang L X, Tao J-W. A new measuring airdata algorithm[J]. Acta Metrologica Sinica, 2011, 32(1):31 – 35. (in Chinese)
- [12] 陈诚,陶建武.基于声矢量传感器阵列的鲁棒  $H_\infty$  空气速度估计算法[J].航空学报,2013,34(2):361 – 370.  
Chen C, Tao J-W. Robust  $H_\infty$  estimation of airspeed based on acoustic vector sensor array[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2013, 34(2):361 – 370. (in Chinese)
- [13] Larsson E G, Stoica P. High-resolution direction finding: The missing data case[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2001, 49(5):950 – 958.
- [14] Yardibi T, Li J, Stoica P, et al. Source localization and sensing: A nonparametric iterative adaptive approach based on weighted least squares[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic System, 2010, 46(1):425 – 443.
- [15] Liu C. Efficient ML estimation of the multivariate normal distribution from incomplete data[J]. J Multivariate Analysis, 1999, 69(2):206 – 217.
- [16] 陈志菲,孙进才,侯宏.宽带 DOA 估计的类 MUSIC 波束形成算法[J].电子学报,2011,9(6):1257 – 1260.  
Chen Z-F, Sun J-C, Hou H. MUSIC-like beamforming method for wideband DOA estimation[J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(6):1257 – 1260. (in Chinese)

#### 作者简介

**陈 诚** 男,1988 年出生于江西九江,硕士.主要研究方向:阵列信号处理.

E-mail: wscandy@gmail.com

**陶建武** 男,1959 年出生于吉林省吉林市,教授,博士生导师.主要研究方向:阵列信号处理,矢量传感器信号处理等.

E-mail: jianwu.tao@gmail.com

**曾 宾** 男,1988 年出生于江西赣州,硕士生.主要研究方向:阵列信号处理.