

# 基于加权割的图像分割

李小斌<sup>1</sup>, 田 铮<sup>1,2</sup>, 刘密歌<sup>3</sup>, 徐海霞<sup>1</sup>

(1. 西北工业大学应用数学系, 陕西西安 710072; 2. 中国科学院遥感应用研究所遥感科学国家重点实验室, 北京 100101;  
3. 西安文理学院机械电子工程系, 陕西西安 710065)

**摘 要:** 提出了一个新的图分割模型——加权割模型, 设计了一个基于加权割的图像分割算法(Image segmentation Algorithm Based on Weighted Cut, 简记为 ISAWC). 加权割模型的特点是: (1) 整合了图像的局部和整体分割信息; (2) 在加权意义下最小化加权割能同时达到类间最大相异性和类内最大一致性. 本文证明可通过求解一个特征向量问题来优化加权割. 模拟点集和实际图像上的实验验证了 ISAWC 的有效性.

**关键词:** 图像分割; 图; 图的加权割

**中图分类号:** TP391 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2008) 01-0076-05

## Weighted Cut Based Image Segmentation

LI Xiao bin<sup>1</sup>, TIAN Zheng<sup>1,2</sup>, LIU Mi ge<sup>3</sup>, XU Hai-xia<sup>1</sup>

(1. Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an, Shaanxi 710072, China;  
2. The State Key Laboratory of Remote Sensing Science, Jointly Sponsored by Institute of Remote Sensing Applications, Chinese Academy of Sciences, and Beijing Normal University, Beijing 100101, China;  
3. Department of Mechanical and Electronic Engineering, Xi'an University of Arts and Science, Xi'an, Shaanxi 710065, China)

**Abstract:** A novel graph partitioning criterion, weighted cut, is presented, and its application to the image segmentation problem is demonstrated. An important characteristic of the criterion is that in the course of image segmentation the local and global image segmentation information is fused together. Moreover, optimizing weighted cut can ensure that the inter cluster similarity is minimized while intra cluster similarity is maximized. We show that an efficient computational technique based on an eigenvector problem can be used to optimize this criterion. The experimental results on a number of artificial point sets and real world images show the effectiveness of the new criterion.

**Key words:** image segmentation; graph; weighted cut

## 1 引言

图像分割的目的是将图像分成一些互不相交的具有某种特征相似性的连通子区域<sup>[1]</sup>. 以图像的像素为顶点构造赋权图, 利用图的分割对像素进行聚类, 进而实现图像的分割是一种自然的考虑. 然而, 尽管近年来出现了许多这方面的研究<sup>[2-5]</sup>, 且图论中也有许多相关的结论<sup>[6]</sup>, 但是利用图的分割进行图像分割并非易事, 其难点是如何进行图的分割. 文献[7]提出在图的最小支撑树中将具有最大边权的边去掉来得到图的分割, 文献[8]提出对每一点的局部变化进行度量, 然后根据度量的结果决定哪一条边应去掉来实现图的分割. 这两种方法在进行图的分割时只考虑了图像的局部特征, 其分割结果有时并不理想. 鉴于此, 文献[9]提出了 Minimum Cut 分割模型. 尽管 Minimum Cut 希望获得具有全局意义

的图的分割, 但是点集上的实验表明, 该模型可能会分割出一些人为的孤立点. 为了克服这个缺点, 文献[10]提出了 Normalized Cut 分割模型, 该模型通过在整个图上最小化图的割与类内相似度之商来进行图的分割, 尽管这避免了从图中分割出小的孤立点集, 但是最小化 Normalized Cut 倾向于分割出的类具有相同的类内相似度却影响了该模型的应用. 其它分割模型, 如 Average Cut<sup>[11]</sup>, Mirrmax Cut<sup>[12]</sup>等, 具有类似的问题.

本文提出了一个新的图分割模型——加权割模型. 该模型通过在图的割中结合图像的整体特征来避免从图中分割出人为的孤立点集, 对它的理论分析表明在加权意义下最小化加权割可以同时达到类间最大相异性和类内最大一致性. 本文讨论了加权割的优化问题, 证明可通过求解一个特征向量问题来优化最小化加权割. 为了验证加权割的性能, 将其应用于图像分割, 并设

计了一个基于加权割的图像分割算法 (Image Segmentation Algorithm Based on Weighted Cut, ISAWC), 通过模拟点集和真实图像上的实验验证了加权割的有效性.

## 2 图的加权割

### 2.1 加权割的定义

设  $I$  是一幅图像,  $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$  是  $I$  的像素点的集合, 其中  $v_i$  表示  $I$  的第  $i$  个像素点. 以  $V$  为顶点集构造赋权图  $G(V, E)$ , 其中边集  $E = V \times V$ , 边  $(v_i, v_j)$  上的权记为  $w_{ij}$ , 表示  $v_i$  和  $v_j$  之间的相似程度,  $w_{ij}$  越大,  $v_i$  和  $v_j$  之间越相似, 即  $v_i$  和  $v_j$  越有可能属于同一类. 本文中  $w_{ij} \in [0, 1]$ , 特别当  $i = j$  时,  $w_{ii} = 1, i = 1, 2, \dots, n$ . 构造矩阵  $W = (w_{ij})_{n \times n}$ , 并将赋权图  $G(V, E)$  表示为  $G(V, E, W)$ .

由于图的每一个顶点都是图像  $I$  的一个像素点, 因此, 对图像  $I$  的分割就是将顶点集  $V$  分成不相交子集的并, 即

$$V = \bigcup_{i=1}^k V_i, V_i \cap V_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, k,$$

称  $(V_1, V_2, \dots, V_k)$  为  $V$  的一个分割,  $k$  为分类数.

定义 1 (相似度)<sup>[10, 12]</sup> 设  $V_1, V_2 \subset V$ , 定义集合函数

$$A(V_1, V_2) = \sum_{\substack{v_i \in V_1 \\ v_j \in V_2}} w_{i,j},$$

称函数  $A(V_1, V_2)$  是  $V_1$  和  $V_2$  之间的相似度.

若  $V_1 = V_2$ , 则称  $A(V_1, V_2)$  为  $V_1$  的类内相似度, 若  $V_1 \neq V_2$ , 则称  $A(V_1, V_2)$  为  $V_1$  和  $V_2$  的类间相似度, 类间相似度实际上就是图的割<sup>[10]</sup>, 即

$$A(V_1, V_2) = \text{Cut}(V_1, V_2)$$

显然类内相似度  $A(V_1, V_1)$  刻化了  $V_1$  中元素的相似程度,  $A(V_1, V_1)$  越大,  $V_1$  中的元素越相似,  $V_1$  越紧, 而类间相似度  $A(V_1, V_2)$  刻化了  $V_1$  和  $V_2$  的相似程度,  $A(V_1, V_2)$  越小,  $V_1$  和  $V_2$  之间的相似程度越小. 若  $(V_1, V_2)$  是顶点集  $V$  的一个分割, 则使得  $A(V_1, V_1)$  和  $A(V_2, V_2)$  越大,  $A(V_1, V_2)$  越小的分割越好.

定义 2 (分割向量) 设  $(V_1, V_2)$  是顶点集  $V$  的一个分割, 定义

$$x_i = \begin{cases} 1, & v_i \in V_1, \\ -1, & v_i \in V_2, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

称列向量  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  为  $V$  的分割向量.

显然求顶点集  $V$  的分割  $(V_1, V_2)$  等价于求分割向量  $x$ .

定义 3 (加权割) 设一元函数  $f: R^+ \rightarrow R^+, (V_1, V_2)$  是顶点集  $V$  的一个分割, 称

$$\text{Cut}(V_1, V_2, f) = \sum_{\substack{v_i \in V_1 \\ v_j \in V_2}} f(A(v_i, V)) w_{ij} f(A(v_j, V)) \quad (1)$$

为图  $G(V, E, W)$  的加权割.

注:

i  $A(v, V)$  反映了  $V$  中各点和点  $v$  的相似程度,  $A(v, V)$  越大,  $V$  中各点和点  $v$  的相似程度越大,  $v$  越有可能是一个类的内点; 反之,  $A(v, V)$  越小,  $v$  越有可能是一个类的边界点或是一个孤立点. 本文称一个点是类的内点, 类的边界点或是孤立点为点的类别信息. 显然点的类别信息是图像的整体特征, 而  $A(v, V)$  的大小则刻化了点  $v$  的类别信息. 加权割整合了图像的局部信息  $w_{ij}$  和图像的整体特征  $f(A(v_i, V))$  和  $f(A(v_j, V))$ , 利用加权割进行图像分割可以提高图像的分割精度, 避免分割出人为的孤立点集. 今后将  $f(A(v, V))$  简记为  $f(v)$ , 于是图的加权割可以表示为

$$\text{Cut}(V_1, V_2, f) = \sum_{\substack{v_i \in V_1 \\ v_j \in V_2}} f(v_i) w_{ij} f(v_j) \quad (2)$$

ii 因为

$$A(V_1, V_1, f) + A(V_2, V_2, f) + 2\text{Cut}(V_1, V_2, f) = \sum_{i,j=1}^n f(v_i) w_{ij} f(v_j)$$

所以

$$\text{Cut}(V_1, V_2, f) =$$

$$\left( \sum_{i,j=1}^n f(v_i) w_{ij} f(v_j) - (A(V_1, V_1, f) + A(V_2, V_2, f)) \right) / 2$$

又因为对固定的一元函数  $f(\cdot)$ ,  $\sum_{i,j=1}^n f(v_i) w_{ij} f(v_j)$  是一个常数, 所以最小化  $\text{Cut}(V_1, V_2, f)$  等价于最大化  $A(V_1, V_1, f) + A(V_2, V_2, f)$ , 注意到  $A(V_1, V_1, f)$  和  $A(V_2, V_2, f)$  分别表示  $V_1$  和  $V_2$  的类内加权相似度, 显然类内相似度越大, 类的一致性越好, 所以最小化加权割在保证类间最大相异性的同时获得了类内的最大一致性.

### 2.2 加权割与其它图的分割模型之间的关系

Minimum cut 可以表示为

$$\text{Cut}(V_1, V_2) = \sum_{\substack{v_i \in V_1 \\ v_j \in V_2}} w_{ij}$$

对比式 (2) 可以看到, Minimum cut 实际上就是  $f(v) \equiv 1$  ( $\forall v \in V$ ) 的加权割. 显然 Minimum cut 未对点进行区分, 在分割时没有利用点的类别信息.

类似的 Normalized Cut 可以表示为

$$\frac{\text{Cut}(V_1, V_2)}{A(V_1, V)} + \frac{\text{Cut}(V_2, V_1)}{A(V_2, V)} = \left[ \frac{1}{A(V_1, V)} + \frac{1}{A(V_2, V)} \right] \cdot \text{Cut}(V_1, V_2)$$

显然若取

$$f(v) = \left[ \frac{A(V_1, V) + A(V_2, V)}{A(V_1, V)A(V_2, V)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

那么, Normalized Cut 也可以看作一种特殊的图的加权割.

但是和 Minimum Cut 相同, Normalized Cut 也未对点进行区分, 同样在进行图像分割时也未利用点的类别信息.

其他分割模型, 如 Average Cut 和 Mirrmax Cut, 也有类似的结论.

### 2.3 加权割的求解

因为

$$A(V_1, V_2) = \sum_{\substack{v_i \in V_1 \\ v_j \in V_2}} w_{ij} = \left( \frac{e+x}{2} \right)^T W \left( \frac{e-x}{2} \right)$$

其中  $e = (1, 1, \dots, 1)^T$ ,

所以

$$\text{Cut}(V_1, V_2, f) = (\text{diag}(f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)) \left( \frac{e+x}{2} \right)^T W (\text{diag}(f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)) \left( \frac{e-x}{2} \right))$$

令

$$W_1 = \text{diag}(f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)) W$$

$$\text{diag}(f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n))$$

则

$$\text{Cut}(V_1, V_2, f) = \left( \frac{e+x}{2} \right)^T W_1 \left( \frac{e-x}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{4} x^T (D_1 - W_1) x$$

其中  $D_1 = \text{diag}(W_1 e)$ .

于是最小化加权割就等价于二次整数优化问题

$$\min \frac{1}{4} x^T (D_1 - W_1) x \quad \text{s.t. } x \in \{-1, 1\}^n$$

$$\exists (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, n\}, \text{ 使得 } x_i x_j < 0, \quad (3)$$

上述整数优化问题的一般解难以计算, 下面考虑用松弛方法来求其次优解.

注意到  $x^T x = n$ , 于是

$$\frac{1}{4} x^T (D_1 - W_1) x = \frac{n}{4} \frac{x^T (D_1 - W_1) x}{x^T x}$$

$$= \frac{n}{4} (x \| x \|_2^{-1/2})^T (D_1 - W_1) (x \| x \|_2^{-1/2})$$

所以整数优化问题(3)就等价于

$$\min (x \| x \|_2^{-1/2})^T (D_1 - W_1) (x \| x \|_2^{-1/2})$$

$$\text{s.t. } x \in \{-1, 1\}^n$$

$$\exists (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, n\}, \text{ 得出 } x_i x_j < 0.$$

现放松对  $x$  的各个分量的整数约束, 将其视为一个连续量, 于是上述的整数优化问题就变为一个连续的约束二次优化问题

$$\min x^T (D_1 - W_1) x$$

$$\text{s.t. } x^T x = 1$$

$$\exists (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, n\}, \text{ 使得 } x_i x_j < 0 \quad (4)$$

构造 Lagrange 函数

$$f(x, \lambda) = x^T (D_1 - W_1) x - \lambda (x^T x - 1)$$

上式分别对  $x$  和  $\lambda$  求导并令其等于零, 得

$$\begin{cases} (D_1 - W_1) x = \lambda x, \\ x^T x = 1, \end{cases} \quad (5)$$

由式(5)知  $x$  是矩阵  $D_1 - W_1$  相应于特征值  $\lambda$  的特征向量, 结合式(6)知  $\lambda$  是所求的最小值. 注意到矩阵  $D_1 - W_1$  是一个半正定阵,  $e$  为  $D_1 - W_1$  特征值为 0 的特征向量, 考虑到约束条件  $\exists (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, n\}$ , 使得  $x_i x_j < 0$ , 显然  $e$  不为所求, 因此  $D_1 - W_1$  的第二个最小特征值对应的特征向量是连续约束优化问题的最优解, 第二个最小特征值为满足约束条件的最小值.

根据以上的讨论, 本文将以  $D_1 - W_1$  的第二个最小特征值对应的特征向量作为最小化加权割的次优解.

### 3 基于加权割的图像分割算法

#### 3.1 分割算法

第一步, 以图像  $I$  的像素点为顶点构造赋权图  $G(V, E, W)$ ;

第二步, 对给定的一元函数  $f$ , 计算  $W_1$  和  $D_1$ ;

第三步, 计算矩阵  $D_1 - W_1$  的第二个最小特征值对应的特征向量  $x$ ;

第四步, 将  $x$  的每一个分量与所给定的阈值  $T$  进行比较, 按如下规则给出分割

$$\text{if } x_i \geq T \quad v_i \in V_1 \quad \text{else } v_i \in V_2$$

#### 3.2 参数的确定

在利用图进行图像分割时边权的取值对分割结果有明显的影响, 鉴于负指数型边权在实际问题中的良好表现, 本文采用文献[10]中边权的定义方式, 即

$$w_{ij} = e^{-\frac{\|F(v_i) - F(v_j)\|_2^2}{\sigma_f}} \cdot e^{-\frac{\|X(v_i) - X(v_j)\|_2^2}{\sigma_x}}$$

这里  $X(v_i)$  表示像素点  $v_i$  的空间位置,  $F(v_i)$  是点  $v_i$  关于亮度、色彩和纹理等特征的特征向量, 例如对点集而言  $F(v_i) = 1$ , 而对灰度图像而言  $F(v_i)$  就是点  $i$  的灰度值.

阈值  $T$  的选择有多种方法<sup>[10]</sup>, 本文采用基于学习的搜索方法来选择合适的阈值  $T$ .

一元函数  $f(A(v, V))$  是对图像整体信息  $A(v, V)$  的调制, 其大小对加权割起着修正作用, 本文通过实验选取:

$$f(A(v, V)) = (A(v, V))^{1/2}$$

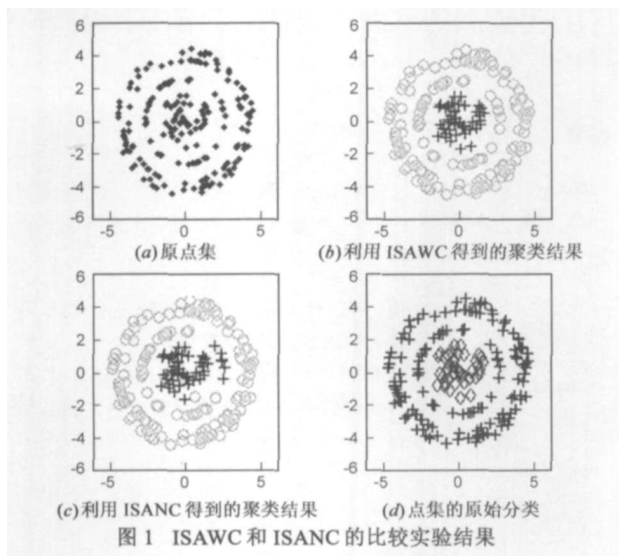
### 4 实验结果

为了验证 ISAWC 的分割效果, 本文分别在点集和实际图像上进行了实验, 以下是实验结果.

#### 4.1 点集上的试验

文献[10]提出了基于 Normalized Cut 的图分割算法 (ISANC), 该算法通过计算一个广义特征值问题来进行图的分割, 本文通过点集上的实验对 ISAWC 和 ISANC

的分割效果进行了比较,图 1 是两种算法在一个空间点集上的聚类结果,其中,图 1(a)是待聚类的空间点集.该空间点集由两类构成,一类是圆环状的点集,另一类是包含在圆环内云状的点集(参看图 1(d)).由图可见,圆环状点集中的点相对比较稀疏,两类点集之间的区别不明显.图 1(b)和图 1(c)分别是利用 ISAWC 和 ISANC 得到的聚类结果,图 1(d)是点集的原始分类.将图 1(b)和图 1(c)与图 1(d)进行对比可见,此时 ISAWC 将两类点集完全分开了,而 ISANC 却出现了许多误分点.仔细观察图 1(c)可见,ISANC 的误分点全部出现在两类点集相邻的点上,即误分点全部是边界点,这表明 ISANC 在处理边界点时存在明显的不足,分析其原因,主要是 ISANC 在进行点的聚类时没有利用点的类别信息,这正如本文在 2.2 节的分析所示.



## 4.2 真实图像上的分割结果

为了检验 ISAWC 的图像分割效果,本文将 ISAWC 应用于一些真实的图像,图 2 是 ISAWC 应用于一幅 SAR 图像和一幅光学图像的分割结果.由图可见 ISAWC 具有较好的图像分割能力.

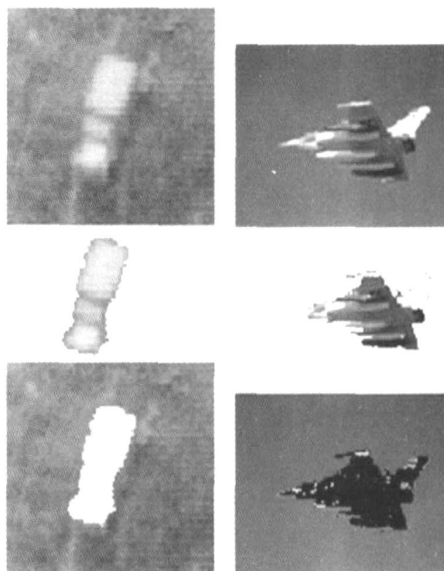


图 2 ISAWC 应用于一幅 SAR 图像和一幅光学图像的分割结果,其中第一列是 ISAWC 应用于一幅 SAR 图像上的分割结果,第二列是 ISAWC 应用于一幅光学图像上的分割结果

在进行图像分割时有时需要将图像分割成多个不同的区域,利用 ISAWC 对图像进行递归分割即可实现图像的多分.由于对图像进行递归二分将得到一个二叉树形式的分割结果,因此本文将图像的递归二分称为图像的二叉树分割.图 3 是利用 ISAWC 对一幅光学图像进行二叉树分割的结果,其中图 3(h)是示例说明.

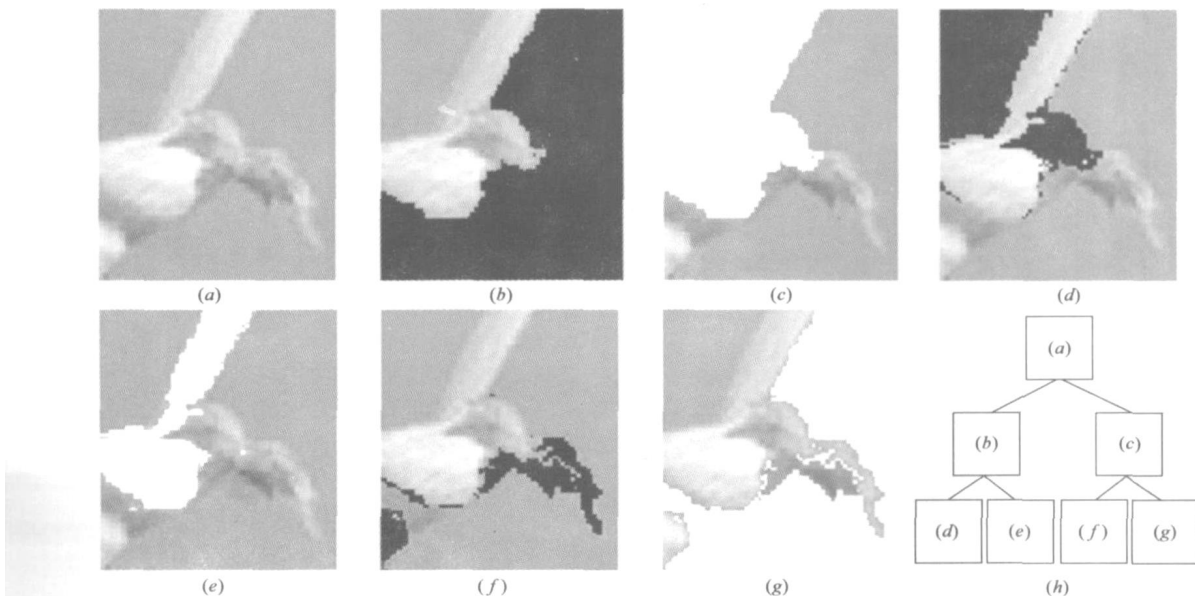


图 3 图像二叉树分割示例.(a)原图像,(h)对(a)进行二叉树分割的示例

## 5 结论

本文提出了一个新的图分割模型, 加权割模型. 该模型通过利用点的类别信息来提高分割的精确性, 在加权意义下最小化加权割可以保证类间最大相异性和类内最大一致性. 为了优化加权割, 本文将其转化为一个特征向量问题. 基于加权割本文设计了一个图像分割算法 (ISAWC), 模拟点集和真实图像上的实验结果证明了 ISAWC 的有效性.

### 参考文献:

- [1] K R Castleman. Digital Image Processing [M]. 2nd Edition, Prentice Hall, 2002.
- [2] T Zheng, L Xiaobin, J Yanwen. Spectral clustering based on matrix perturbation theory [J]. Science in China Series F Information Science, 2007, 50(1): 63–81.
- [3] L Xiaobin, T Zheng. Multiscale stochastic hierarchical image segmentation by spectral clustering [J]. Science in China Series F Information Science, 2007, 50(2): 198–211.
- [4] C Fowlkes, S Belongie, F Chung, et al. Spectral grouping using the Nystm method [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2004, 26(2): 214–225.
- [5] S X Yu, J Shi. Segmentation given partial grouping constraints [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2004, 26(2): 173–183.
- [6] F R K Chung. Spectral Graph Theory [M]. Amer. Math. Society, 1997.
- [7] C T Zhan. Graph theoretic methods for detecting and describing gestalt clusters [J]. IEEE Transactions on Computer, 1971, 20(1): 68–86.
- [8] R Uraquhart. Graph theoretical clustering based on limited

neighborhood sets [J]. Pattern Recognition, 1982, 15(3): 173–187.

- [9] Zhenyu Wu and Richard Leahy. An optimal graph theoretic approach to data clustering: theory and its application to image segmentation [J]. IEEE Trans Pattern Anal Mach Intell. 1993, 15(11): 1101–1113.
- [10] Shi J, Malik J. Normalized cuts and image segmentation [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2000, 22(8): 888–905.
- [11] S. Sarkar and P. Soundararajan. Supervised learning of large perceptual organization: graph spectral and learning automata [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence 2000, 22(5): 504–525.
- [12] C H Q Ding, X He, H Zha, et al. A min max cut algorithm for graph partitioning and data clustering [A]. ICDM 2001 [C]. Los Alamitos, California: IEEE Computer Society, 2001. 107–114.

### 作者简介:

李小斌 男, 1972 年生于陕西汉中, 西北工业大学应用数学系博士, 讲师, 研究方向: 计算机视觉与图像信息处理、图像处理与模式识别等. E-mail: xiaobin\_li2004@163.com



田 铮 女, 1948 年生于陕西西安, 教授, 西北工业大学理学院应用数学系博士生导师. 研究方向: 非线性时间序列分析与信息处理、计算机视觉与图像信息处理、遥感图像处理与模式识别. E-mail: zhtian@nwpu.edu.cn