

# 基于概率密度特性的高阶 UT 样点设计方法

谢 恺<sup>1</sup>, 杨争斌<sup>2</sup>, 许 丹<sup>2</sup>, 周一宇<sup>2</sup>

(1. 炮兵学院军用光电工程教研室, 安徽合肥 230031; 2. 国防科技大学电子科学与工程学院, 湖南长沙 410073)

**摘 要:** 针对 UT 变换通过非线性矩近似方程组获得样点的复杂性, 提出了一种基于概率密度特性的高阶 UT 样点设计方法. 该方法利用高斯概率密度函数导数的极值点与各种对称 Sigma 样点集分布相对应的特性, 采用高斯概率密度函数高阶导数的极值得到 Sigma 样点的分布来进行 Sigma 样点设计, 提高了估计精度. 理论分析推导和仿真实验证明了该方法的有效性.

**关键词:** 非线性; 无迹变换; 矩近似; 样点

**中图分类号:** TP273

**文献标识码:** A

**文章编号:** 0372-2112 (2008) 03-0473-04

## The Higher Order Unscented Filter Sigma Points Design Algorithm Based on Density Function

XIE Kai<sup>1</sup>, YANG Zheng-bin<sup>2</sup>, XU Dan<sup>2</sup>, ZHOU Yi-yu<sup>2</sup>

(1. Military Photoelectricity Engineering T&R Section, Artillery Academy of PLA, Hefei, Anhui 230031, China;

2. College of Electronic Science and Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha, Hunan 410073, China)

**Abstract:** Due to the complexity of the nonlinear moment approximation equations, a higher order sigma points design algorithm based on the characteristics of the probability density function is proposed. The correspondence of the extremum of higher order derivatives of the Gaussian density function and the location of the sigma points are exploited. Thus the extremum of higher order derivatives of the Gaussian density function are selected to be the location of the sigma points that can improve the estimation precision. It is corroborated in the theoretical analysis and the simulation that the proposed algorithm can easily derive higher order unscented filters with high efficiency.

**Key words:** nonlinear; unscented transformation; moment approximation; sigma points

## 1 引言

对非线性高斯系统进行估计具有重要的理论意义和广阔的应用前景. 由于非线性问题的复杂性, 其难度较大. 进行非线性估计的最优方案需要得到其条件后验概率的完整描述, 然而这需要太大的计算量而无法实际应用<sup>[1]</sup>, 为此人们提出了大量次优近似方法<sup>[2~7]</sup>.

近年来, 由于 UKF 的诸多优点, 它在非线性估计领域得到了广泛的应用<sup>[3~7]</sup>.

UKF 的基础是 UT 变换<sup>[4]</sup>, UT 变换中选择的 Sigma 样点集类型很多<sup>[2, 4, 5]</sup>, 这些样点集的设计方法首先假设样点集的大致分布形状, 再通过矩近似准则来得到 Sigma 样点集. 不同样点分布情况下矩近似方程组类型各异, 而且高阶非线性方程组的求解非常复杂, 因此传统的样点设计方法可扩展性不强, 所设计的样点能近似高阶矩的阶数有限, 需要引入更加灵活高效的样点设计方法.

根据高斯噪声概率密度函数低阶导数的极值点与各种对称 Sigma 样点集的分布相对应的特性, 本文提出了使用高斯概率密度函数高阶导数的极值点得到 Sigma 样点集的设计方法. 可以灵活的设计更高阶次的 UT 滤

波器, 有效提高强非线性高斯系统的估计精度.

## 2 UT 变换的样点设计方法

UT 变换是一种计算随机变量经过非线性变换后统计特性的方法, 它通过设置 Sigma 样点分布和权值来逼近样本非线性变换参数的矩<sup>[2, 4, 5]</sup>.

为了更好的近似随机变量经过非线性变换后的统计特性, 样点集应尽可能近似更高阶数的中心矩<sup>[2]</sup>. 为了近似随机变量的二阶以上矩, 许多文献假设随机变量为高斯分布<sup>[5~7]</sup>.

对称 Sigma 样点集设计方法所采用的约束包括 Sigma 样点集能够匹配任意维标准高斯随机变量的前四阶矩以及样点权重归一化等约束条件. 假设任意高斯变量  $x$  的概率密度函数为  $p_x(x)$ , 其 Sigma 样点集为  $\sigma$ , 任意一维标准高斯分布变量为  $z_j$ , 其约束方程如下<sup>[6]</sup>:

$$\begin{cases} W_0 + 2LW_1 = 1 \\ 2W_1S_1^2 = E(z_j^2) = 1 \\ 2W_1S_1^4 = E(z_j^4) = 3 \end{cases} \quad (1)$$

求解式(1)得到样点集参数为:

$$W_0 = 1 - L/3; \quad W_1 = 1/6; \quad S_1 = \sqrt{3}.$$

得到标准高斯分布的样点集以后,可以得到任意高斯随机变量  $x$  的样点集.

Tenne<sup>[6]</sup>提出了近似一维高斯变量 8 阶矩的约束方程组,对其稍加扩展可以得到多维标准高斯分布的 Sigma 样点集约束方程组.该设计方法假设存在三种样点:第一种样点是中心点,权重  $W_0$ ;第二种是对称分布在各坐标轴上到中心点距离  $S_1$  的  $2L$  个第一外层样点,权重为  $W_1$ ;第三种是对称分布在各坐标轴上到中心点距离  $S_2$  的  $2L$  个第二外层样点,权重为  $W_2$ ,  $S_2 > S_1$ . 其二维样点分布示意图如图 1 所示.

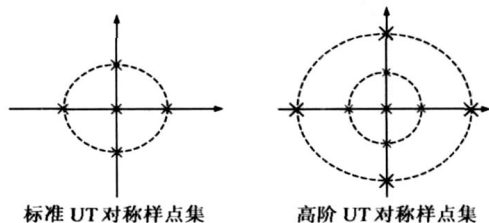


图 1 UT 变换对称样点分布示意图

同理,可以求得 8 阶矩近似方程组所得到的样点集参数为:

$$W_0 = 1 - 7L/15; W_1 = (7 + 2\sqrt{10})/60;$$

$$W_2 = (7 - 2\sqrt{10})/60; S_1 = \sqrt{5 - \sqrt{10}};$$

$$S_2 = \sqrt{5 + \sqrt{10}};$$

根据 Tenne 的多层对称样点分布假设,可以得到近似  $4k$  阶中心矩的非线性方程组<sup>[6]</sup>

$$\begin{cases} W_0 + 2L \sum_{i=1}^k W_i = 1 \\ 2 \sum_{i=1}^k W_i S_i^2 = 1 \\ 2 \sum_{i=1}^k W_i S_i^4 = 3 \\ \vdots \\ 2 \sum_{i=1}^k W_i S_i^{4k} = 1 \times 3 \times \dots \times (4k-1) \end{cases} \quad (2)$$

当  $k$  较大时,直接求解以  $W_i$  和  $S_i$  为未知数的非线性方程组非常困难.因此所能近似的矩阶数有限.目前最高精度的样点集是 Tenne 在一维高斯情况下得到的 12 阶矩近似的三层对称样点集,更高精度的通用样点集有待提出新方法进一步进行设计.

目前最高精度的样点集是 Tenne 在一维高斯情况下得到的 12 阶矩近似三层对称样点集,更高精度的通用样点集有待提出新方法进一步进行设计.

### 3 基于概率密度函数特性的样点选择方法

#### 3.1 高斯分布概率密度函数特性

由于高斯变量的问题都可以转化为多个独立一维

标准高斯分布的问题进行分析,因此考虑一维标准高斯变量的概率密度函数,忽略常数项:

$$f(x) = e^{-x^2/2} \quad (3)$$

求解极值点的过程如下

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x e^{-x^2/2} = 0 \Rightarrow x = 0 \quad (4)$$

类推,可以得到  $f(x)$  的 1 阶导数的极值点:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow (x^2 - 1) e^{-x^2/2} = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \quad (5)$$

2 阶导数的极值点:

$$f^{(3)}(x) = 0 \Rightarrow (x^3 - 3x) e^{-x^2/2} = 0 \Rightarrow x = 0, \pm\sqrt{3} \quad (6)$$

3 阶导数的极值点:

$$f^{(4)}(x) = 0 \Rightarrow (x^4 - 6x^2 + 3) e^{-x^2/2} = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3 \pm \sqrt{6}} \quad (7)$$

4 阶导数的极值点:

$$f^{(5)}(x) = 0 \Rightarrow x^5 - 10x^3 + 15x = 0 \Rightarrow x = 0, \pm\sqrt{5 \pm \sqrt{10}} \quad (8)$$

从式(4)~(8)可以看出:高斯分布概率密度函数 0 阶导数的极值点只有一个,这对应于 EKF 中只取一个样点,在均值附近进行线性展开的情况;高斯分布概率密度函数 1 阶导数的极值点对应于不含原点的近似高斯分布 2 阶矩的对称样点集,扩展到  $L$  维变量其样点数为  $2L$  个<sup>[2]</sup>;2 阶导数的极值点对应于包含原点的近似高斯分布 4 阶矩的对称样点集,扩展到  $L$  维变量其样点数为  $(2L+1)$  个<sup>[2]</sup>;3 阶导数的极值点对应于不含原点的近似高斯分布 6 阶矩的双层对称样点集,扩展到  $L$  维变量其样点数为  $4L$  个;4 阶导数的极值点对应于包含原点的近似高斯分布 8 阶矩的双层对称样点集,扩展到  $L$  维变量其样点数为  $(4L+1)$  个<sup>[6]</sup>.

由于包含原点的对称样点集只比不包含原点的样点集多一个样点,而矩近似的精度却高了两阶,因此多采用包含原点的对称样点集<sup>[2,5,6]</sup>.式(4)~(8)中,包含原点的对称样点集对应于高斯分布概率密度函数偶数阶导数的极值点.因此,容易产生猜想:高斯分布概率密度函数  $2k$  阶导数的极值点对应于近似  $4k$  阶高斯中心矩的 Sigma 样点的分布.

根据高斯分布的对称性容易知道:高斯分布概率密度函数的  $2k$  阶导数的极值点数目为  $(2k+1)$  个,这些极值点对称分布,包括原点和  $k$  组对称点.

Tenne 提出的高阶 UT 样点集的多层分布假设与高斯概率密度函数导数极值点的分布情况大体一致.如果猜想成立,将给 Tenne 的多层样点分布假设提供有力的理论支持.

#### 3.2 基于概率密度函数高阶导数极值点的样点设计方法

基于高斯分布概率密度函数  $2k$  阶导数的极值点对应于近似  $4k$  阶高斯中心矩的 Sigma 样点分布的猜想,本

文提出的样点设计方法如下:

- (1) 计算高斯分布概率密度函数的  $2k$  阶导数极值点  
求解下面的多项式方程

$$f^{2k+1}(x) = 0 \quad (9)$$

得到的极值点包括原点和距离原点  $S_1, \dots, S_k$  的  $k$  组对称点:  $\{x = 0, \pm S_1, \dots, \pm S_k\}$ . 将这些极值点作为标准高斯分布 Sigma 样点的位置, 可以得到与文献[6]相同的多层样点集.

- (2) 计算样点的权值

得到样点的位置分布以后, 假设各组对称点有各自的权值  $W_k$ . 通过权值归一化准则和矩近似准则可以得到 Sigma 样点的权值, 其约束方程如下

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} S_1^2 & S_2^2 & \dots & S_k^2 \\ S_1^4 & S_2^4 & \dots & S_k^4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_1^{2k} & S_2^{2k} & \dots & S_k^{2k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \dots \\ W_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ \dots \\ 1 \times 3 \times \dots \times (2k-1)/2 \end{bmatrix} \\ W_0 + 2L \sum_{i=1}^k W_k = 1 \end{cases} \quad (10)$$

由于已经从极值点得到了样点位置参数  $S_1, \dots, S_k$ , 因此式(10)中的权值计算只需求解一个线性方程组, 由此可以得到一维标准高斯分布的 Sigma 样点集

$$\sigma_1 = \left\{ (0, W_0), (\pm S_1, W_1), \dots, (\pm S_k, W_k) \right\} \quad (11)$$

- (3) 对标准高斯分布高阶样点集进行线性变换, 得到普通高斯分布的高阶对称样点集

$$\sigma = \left\{ (\bar{x}, W_0), \left[ \bar{x} \pm S_1 \left( \sqrt{P_x} \right)_i, W_1 \right], \dots, \left[ \bar{x} \pm S_k \left( \sqrt{P_x} \right)_i, W_k \right] \mid i = 1, \dots, L \right\} \quad (12)$$

和标准 UT 相同, 可以通过缩放处理保证高维情况下高阶样点集变换方差的正定性<sup>[2]</sup>.

由于本文的样点设计方法避免了直接求解非线性方程组(2), 而是通过求解式(9)的多项式方程直接得到样点的分布, 这大大简化了问题, 从而可以很容易的设计出更高阶 UT 样点集.

### 3.3 样点设计方法的有效性验证

根据本文猜想, 高斯分布概率密度函数  $2k$  阶导数的极值点包含了近似  $4k$  阶高斯中心矩的信息, 式(10)中使用的  $2k$  阶矩近似方程组只是为了获得样点的权值, 本文算法设计的样点能够满足  $4k$  阶矩近似方程组(2).

直接求解以  $W_i$  和  $S_i$  为未知数的非线性方程组(2)非常困难, 但将式(11)得到的样点集参数带入式(2)进行验证则相对简单.

本文提出的算法只需求解一个多项式方程(9)和一个线性方程组(10), 与直接求解非线性方程组(2)相比非常简单, 不会出现无法求解的情况, 可以轻松得到

近似更高阶矩(包括 12 阶矩以上)的 Sigma 样点集.

考虑到自然界中非线性系统近似的阶数有限<sup>[6]</sup>, 本文采用了一种相对简单的枚举法证明了在前 100 阶(还可以更高)矩近似的情况下, 使用本文方法设计的样点集与直接求解式(10)中非线性方程组得到的样点集是一致的.

证明过程使用了符号运算软件 Mathematica, 具体证明步骤如下:

首先, 设置标志变量为 1.

接下来进行循环判断:

\* FOR  $k = 1:25$

(1) 求解式(9), 得到样点位置参数  $S_1, \dots, S_k$ ;

(2) 将  $S_1, \dots, S_k$  带入式(10), 求得相应样点权值  $W_0, \dots, W_k$ ;

(3) 将  $S_1, \dots, S_k$  和  $W_0, \dots, W_k$  带入式(2)进行验证, 如果不满足方程则退出循环, 更改标志变量为 0.

\* END

最后, 通过判断标志变量确定本文方法设计的样点集是否能够近似  $4k$  阶中心矩.

实验结果证明, 本文提出的猜想成立.

## 4 仿真实验

为了验证本文算法所设计的高阶 UT 样点集具有更高的精度, 本文将对其与标准 UT 样点集进行比较, 仿真比较的实例采用一维粒子碰壁反弹模型<sup>[2,6,7]</sup>.

某粒子在初始位置  $x_0$  以速度  $v_0$  向位于原点的屏障运动, 碰撞到屏障后发生弹性形变, 以相反的速度运动, 该粒子与屏障的距离为  $y = |x_0 + v_0 t|$ .

假设初始时刻粒子距离屏障的距离  $x_0$  为标准正态高斯分布, 则可以通过理论分析得到

$$\begin{aligned} \bar{y} = E(y) &= \int_{-\infty}^{v_0 t} (v_0 t - z) \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz + \int_{v_0 t}^{\infty} (z - v_0 t) \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz \\ &= v_0 t \operatorname{erf}\left(\frac{v_0 t}{\sqrt{2}}\right) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-v_0^2 t^2/2} \end{aligned} \quad (13)$$

表 1 各种 UT 样点集参数

UT 样点集	样点位置参数	样点权重参数	样点总数
标准 UT	$S_1 = \sqrt{3}$	$W_0 = 2/3; W_1 = 1/6$	3
8 阶矩近似 UT	$S_1 = \sqrt{5 - \sqrt{10}};$ $S_2 = \sqrt{5 - \sqrt{10}};$	$W_0 = 8/15;$ $W_1 = (7 + 2\sqrt{10}/60);$ $W_2 = (7 - 2\sqrt{10}/60);$	5
20 阶矩近似 UT	$S_1 = 0.9289;$ $S_2 = 1.8760;$ $S_3 = 2.8651;$ $S_4 = 3.9362;$ $S_5 = 5.1880$	$W_0 = 0.3694;$ $W_1 = 0.2422;$ $W_2 = 0.0661;$ $W_3 = 0.0067;$ $W_4 = 1.9567e-4;$ $W_5 = 8.1218e-7$	11

$$P_y = E[(y - \bar{y})^2]$$

$$= 1 + v_0^2 t^2 - \bar{y}^2 \quad (14)$$

采用标准 UT 样点集和本文算法设计的 8 阶矩近似 UT 样点集、20 阶矩近似 UT 样点集分别进行 UT 变换滤波,得到的均值和方差估计的曲线以及估计误差曲线如图 2 所示。

各种 UT 样点集的参数如表 1 所示。

从图 2 可以看出:在非线性较强的区域,高阶 UT 样点集能够近似更高阶矩,因而对非线性变换后的距离均值和方差的估计与真实值更接近。这与文献[2, 6]的结论一致,但文献[6]的样点设计方法所设计的最高精度的样点集只能近似 12 阶中心矩,而本文方法可以轻松设计出近似 20 阶甚至更高阶中心矩的样点集。

## 5 结论

本文提出了一种基于概率密度函数高阶导数极值点的高阶样点设计方法。该方法只需要求解一个多项式方程和一个低阶线性方程组,比传统的矩近似方法简单许多,可以设计传统非线性矩近似方法难以设计的更高阶矩近似样点集。

本文算法所设计的高阶 UT 样点集精度更高,可以应用到强非线性高斯系统的估计领域。

## 参考文献:

- [1] F E Daum. Nonlinear filters: beyond the Kalman filter[J]. IEEE AES Systems Magazine, 2005, 20(8): 57-69.
- [2] S J Julier and J K Uhlmann. Unscented filtering and nonlinear estimation[J]. Proc IEEE, 2004, 92(3): 401-422.
- [3] J R Van Zandt. Boost Phase Tracking with an unscented filter [A]. Proc of the SPIE Vol. 4728[C]. Orlando, USA, 2002. 263-274.
- [4] S J Julier. A skewed approach to filtering[A]. Proc of

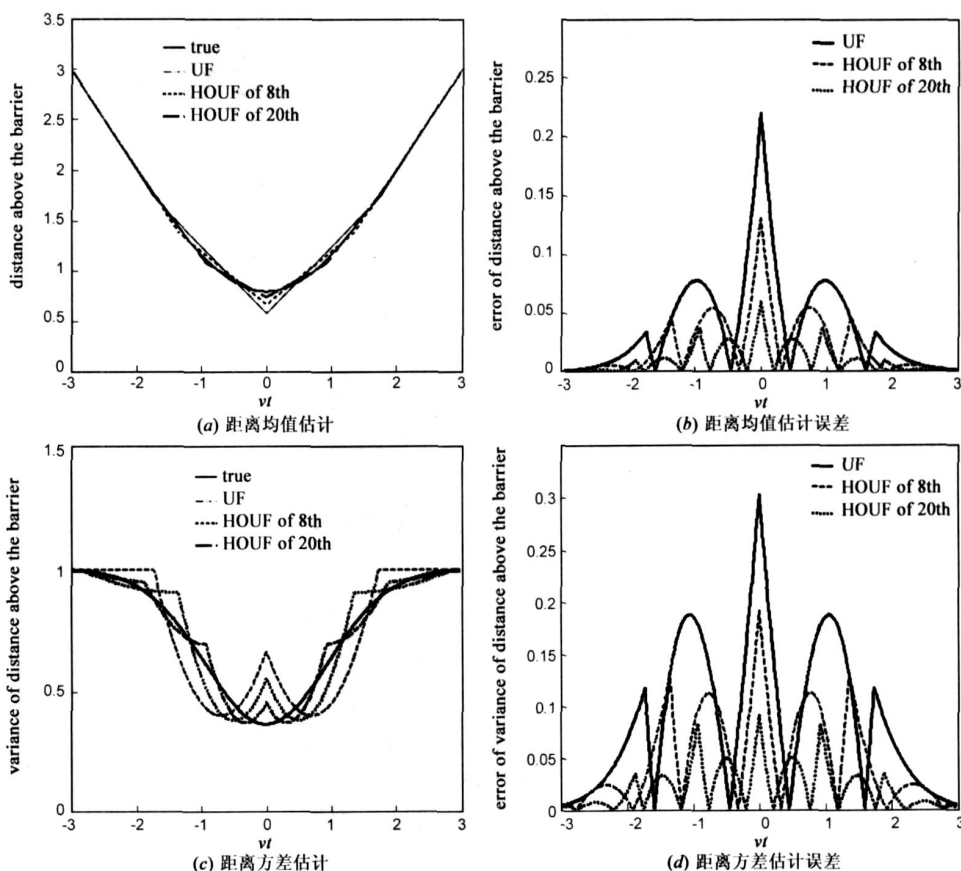


图 2 各种样点集估计结果曲线

the SPIE Vol. 3373 [C]. Orlando, USA, 1998. 271-282.

- [5] S J Julier and J K Uhlmann. A consistent, unbiased method for converting between polar and Cartesian coordinate systems [A]. Proc of the SPIE Vol. 3086[C]. Orlando, USA, 1997. 110-121.
- [6] D. Tenne and T. Singh. The higher order unscented filter [A]. in IEEE Proc Amer Control Conf [C]. Denver, USA, 2003. 2441-2446.
- [7] J R Van Zandt. A more robust unscented filter[OL]. <http://www.mit.edu/~jvz/>, 2001.

## 作者简介:



谢 恺 男, 1980 年 3 月出生于安徽省巢湖市。2006 年毕业于国防科技大学电子科学与工程学院, 获博士学位。现为解放军炮兵学院博士后。主要研究方向为综合电子战系统与应用, 空间信息处理, 光电信息处理。  
E-mail: xiekai80328@yahoo.com.cn

杨争兵 男, 1978 年 1 月出生于陕西省西安市。国防科技大学电子科学与工程学院博士生, 从事无源定位方面的研究工作。  
E-mail: zbyang@nudt.edu.cn