

# 外辐射源雷达模糊函数副峰抑制算法研究

唐 波,程水英,张 浩

(电子工程学院,安徽合肥 230037)

**摘 要:** 外辐射源雷达模糊函数副峰可能会导致检测虚警及弱小目标遮蔽.为抑制模糊函数副峰,提出了一种基于广义旁瓣对消结构的接收机滤波器设计方法,得到了广义旁瓣对消滤波器的闭式解,定量分析了该方法的信噪比损失,指出了副峰高度等因素与信噪比损失的关系.为避开滤波器设计中的高维矩阵求逆运算,提出了快速实现方法.理论分析及基于实测数据的数值计算结果表明,算法能将模糊函数副峰抑制到任意高度,且具有最小的信噪比损失.

**关键词:** 外辐射源雷达;模糊函数;副峰抑制;广义旁瓣对消

**中图分类号:** TN959.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2015)06-1058-08

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>

**DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2015.06.003

## Ambiguity Function Side Peaks Suppression for Passive Radar

TANG Bo, CHENG Shui-ying, ZHANG Hao

(Electronic Engineering Institute, Hefei, Anhui 230037, China)

**Abstract:** The side peaks of the ambiguity function of the passive radar will lead to false alarms in detection and the mask of weak targets. We proposed a method to suppress the side peaks of the ambiguity function based on generalized sidelobe canceller (GSC) and derived the closed form expression of the GSC-based filter. Moreover, we analyzed the signal to noise ratio (SNR) loss of the proposed filter as well as the relationship between the heights of the side peaks and the SNR loss. In order to avoid the inversion of high dimensional matrices, we also proposed a fast implementation of the proposed filter design. Both theoretical and numerical results based on real data show that, the proposed method can suppress the side peaks to arbitrary level with minimum SNR loss.

**Key words:** passive radar; ambiguity function; side peaks suppression; generalized sidelobe canceller

### 1 引言

外辐射源雷达是指利用第三方发射的电磁波信号获取目标信息的无源雷达系统.由于不主动辐射电磁波信号,因此外辐射源雷达系统隐蔽性强、难以摧毁并且造价低廉.又因采用双/多基地方式工作,因此在隐身飞机、巡航导弹等微弱目标探测方面具有显著的优势.截至目前,国内外学者已经利用不同的信号作为外辐射源研究了系统性能,其中包括广播电视信号<sup>[1,2]</sup>,移动通信信号<sup>[3]</sup>,预警雷达信号<sup>[4]</sup>,卫星信号<sup>[5]</sup>等.

模糊函数是研究外辐射源信号可用性的有力工具.模糊函数的特性决定了信号的时延和多普勒分辨率以及杂波抑制性能<sup>[6]</sup>.理想的模糊函数具有图钉结构.然而,对某实测信号的模糊函数分析表明,其模糊函数在零多普勒切面存在位置固定的副峰.副峰不仅会导致虚警,强目标的副峰可能还会遮蔽弱小目标的主峰.现有的副峰抑制算法大都基于信号的帧结构分析来对直达

波信号进行预滤波,从而达到副峰抑制的目的<sup>[7,8]</sup>.然而,对于某些非合作信号,难以获取其信号传输协议及内部帧结构,使用上述方法通常很难奏效.文献<sup>[9]</sup>建议使用失配滤波来抑制模拟电视信号模糊函数的副峰,然而该方法涉及到较高维矩阵的求逆,运算量很大,不利于工程实现.

为抑制某非合作外辐射源信号模糊函数的副峰,本文提出了一种基于广义旁瓣对消滤波器的副峰抑制算法.该算法不仅能将副峰抑制到任意高度,而且在相同的副峰抑制高度条件下,具有最小的信噪比损失.为避开高维矩阵求逆,提出了快速实现方法,所需运算量极低.此外,还定量地分析了算法的信噪比损失,指明了其与副峰高度等因素的关系.

### 2 问题建模

外辐射源雷达利用第三方信号作为机会照射源探测目标.为检测空中运动目标,外辐射源雷达系统至少

需要包含两个接收通道,其中参考通道(Reference Channel,又称为辅通道)波束指向外辐射源所在平台,接收的信号又被称为直达波信号或者参考信号,其数学模型可以写成

$$s_{\text{ref}}(t) = A_{\text{ref}}d(t) + n_{\text{ref}}(t) \quad (1)$$

其中  $A_{\text{ref}}$  为外辐射源信号的幅度,  $d(t)$  为外辐射源信号,  $n_{\text{ref}}(t)$  为接收机噪声。

监视通道(Surveillance Channel,又称为主通道)波束指向目标方位,接收的信号既包括外辐射源信号经过目标反射后的信号,也包括从天线旁瓣进入的直达波信号以及杂波信号,其数学模型可以写成

$$s_{\text{surv}}(t) = A_{\text{surv}}d(t) + \sum_{m=1}^{N_T} a_m d(t - \tau_m) e^{j2\pi f_{dm} t} + \sum_{i=1}^{N_c} c_i d(t - \tau_{ci}) + n_{\text{surv}}(t) \quad (2)$$

其中  $A_{\text{surv}}$  为监视通道中直达波信号的幅度,  $a_m$ ,  $\tau_m$ ,  $f_{dm}$  分别为第  $m$  个目标的幅度、延迟时间以及多普勒频率,  $N_T$  为目标数,  $c_i$ ,  $\tau_{ci}$  分别为第  $i$  个杂波块的幅度以及延迟时间,  $N_c$  为杂波(多径)的个数,  $n_{\text{surv}}(t)$  为监视通道接收机噪声信号。假设监视通道接收到的信号已经过直达波以及杂波抑制,则其数学表达式可以简化为

$$s_{\text{surv}}(t) = \sum_{m=1}^{N_T} a_m d(t - \tau_m) e^{j2\pi f_{dm} t} + n_{\text{surv}}(t) \quad (3)$$

外辐射源雷达系统为了检测目标,通常将  $s_{\text{surv}}(t)$  与  $s_{\text{ref}}(t)$  进行二维互相关处理,互相关后的结果为

$$\begin{aligned} cc(\tau, f_d) &= \int s_{\text{ref}}(t) s_{\text{surv}}^*(t + \tau) e^{j2\pi f_d t} dt \\ &= \sum_{m=1}^{N_T} A_{\text{ref}} a_m^* \int d(t) d^*(t + \tau - \tau_m) e^{j2\pi(f_d - f_{dm})t} dt \\ &\quad + \sum_{m=1}^{N_T} a_m^* \int n_{\text{ref}}(t) d^*(t + \tau - \tau_m) e^{j2\pi(f_d - f_{dm})t} dt \\ &\quad + \int s_{\text{ref}}(t) n_{\text{surv}}^*(t + \tau) e^{j2\pi f_d t} dt \end{aligned} \quad (4)$$

其中等号右边的后两项为与噪声相关的随机项,为方便起见将其记为  $n_{cc}(\tau, f_d)$ 。

定义该外辐射源雷达模糊函数为

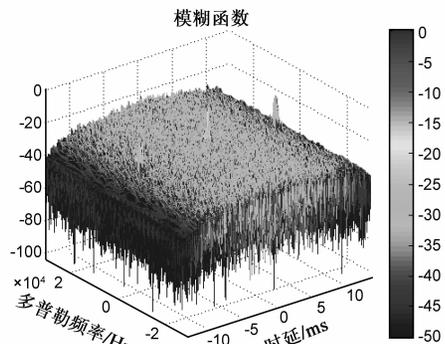
$$|\chi(\tau, f)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} d(t) d^*(t - \tau) \exp(j2\pi ft) dt \right|^2 \quad (5)$$

其中  $\tau$  是时延,  $f$  为多普勒频率。则  $cc(\tau, f_d)$  可写为

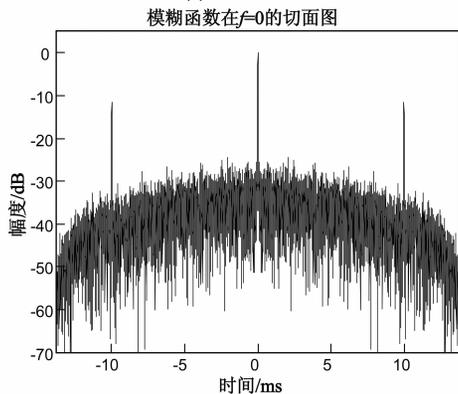
$$cc(\tau, f_d) = \sum_{m=1}^{N_T} A_{\text{ref}} a_m^* \chi(\tau - \tau_m, f_d - f_{dm}) + n_{cc}(\tau, f_d) \quad (6)$$

从式(6)可以看出,互相关后的结果与外辐射源雷达的模糊函数有着密切联系:当时域采样取值  $\tau = \tau_m$ , 多普勒频率取值  $f_d = f_{dm}$  时,利用模糊函数的性质,可发现  $cc(\tau, f_d)$  达到了局部峰值,从而检测到了目标。

由于外辐射源雷达模糊函数在目标检测以及后续参数估计扮演着举足轻重的角色,而且模糊函数的特性直接影响了外辐射源信号的可用性,因此围绕不同的外辐射源雷达信号模糊函数分析开展了大量的工作。图1给出了实测的某非合作外辐射源信号的模糊函数,可以发现模糊函数在零多普勒切面上出现了两个关于原点对称的副峰(如图1(b)所示),且高度要明显高于周围区域。副峰导致的不利因素主要有两点:一方面可能会导致虚警,另外一方面强目标的副峰可能会掩盖弱目标的主峰,从而使得弱目标难以检测。由于无法确知非合作外辐射源信号的内部结构,因此难以使用预处理等方法来抑制信号模糊函数的副峰。接下来考虑从信号处理的角度,通过设计接收机滤波器来抑制模糊函数副峰。



(a) 模糊函数图



(b) 模糊函数在零多普勒处的切面

图1 某非合作外辐射源信号的模糊函数

为便于后续分析及处理,将外辐射源信号  $s_{\text{ref}}(t)$  进行模数转换得到数字信号  $s_{\text{ref}}$ , 采样点数记为  $L$ :

$$s_{\text{ref}} = [s_{\text{ref}}(1), s_{\text{ref}}(2), \dots, s_{\text{ref}}(L)]^T$$

由于直达波信号  $s_{\text{ref}}$  的信噪比极高(通常在 60dB 甚至 80dB 以上),故  $s_{\text{ref}}$  满足

$$s_{\text{ref}} \approx A_{\text{ref}} \mathbf{d} \quad (7)$$

其中  $\mathbf{d}$  为经过采样之后的外辐射源信号,因此在工程实际中可以通过研究直达波信号  $s_{\text{ref}}$  的模糊函数来研究外辐射源雷达的模糊函数。

### 3 副峰抑制算法

当接收机使用互相关权值  $\mathbf{w} = \mathbf{s}_{\text{ref}}$  进行匹配滤波时,模糊函数两个副峰的取值可以写成

$$P_{s1} = \sum_{k=1}^{L-D_1} s_{\text{ref}}(k) s_{\text{ref}}^*(k+D_1) = \mathbf{s}_{\text{ref}}^H [\mathbf{0}; \mathbf{s}_{\text{ref}}(1:L-D_1)]$$

$$= \mathbf{s}_{\text{ref}}^H \mathbf{s}_1 \quad (8)$$

$$P_{s2} = \sum_{k=D_1+1}^L s_{\text{ref}}(k) s_{\text{ref}}^*(k-D_1) = \mathbf{s}_{\text{ref}}^H [\mathbf{s}_{\text{ref}}(D_1+1:L); \mathbf{0}]$$

$$= \mathbf{s}_{\text{ref}}^H \mathbf{s}_2 \quad (9)$$

其中  $D_1$  表示副峰距离原点的采样数,  $\mathbf{s}_{\text{ref}}(1:L-D_1)$  表示由  $\mathbf{s}_{\text{ref}}$  的第 1 到  $L-D_1$  个元素组成的列矢量,  $\mathbf{s}_1 = [\mathbf{0}; \mathbf{s}_{\text{ref}}(1:L-D_1)]$  及  $\mathbf{s}_2 = [\mathbf{s}_{\text{ref}}(D_1+1:L); \mathbf{0}]$  分别可以视作导致模糊函数副峰的信号。

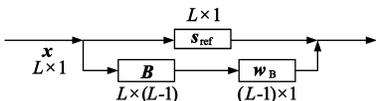


图2 基于广义旁瓣对消结构的副峰抑制算法

为抑制模糊函数副峰,从而降低副峰对于目标检测的不利影响,此处提出基于广义旁瓣对消结构的接收机滤波器设计方法,即用于处理目标信号  $\mathbf{x}$  的接收机权值  $\mathbf{w}$  分成两条支路来实现,如图 2 所示:第一条支路由直达波信号构成,第二条支路由阻塞矩阵  $\mathbf{B}$  以及待设计权值  $\mathbf{w}_B$  级联组成,其中阻塞矩阵  $\mathbf{B}$  满足<sup>[10]</sup>:

$$\mathbf{B}^H \mathbf{s}_{\text{ref}} = \mathbf{0} \quad (10)$$

且  $\mathbf{B}^H \mathbf{B} = \mathbf{I}$ ,即阻塞矩阵的每一列构成了  $\mathbf{s}_{\text{ref}}$  的正交子空间的标准基。

因此接收机滤波器权值  $\mathbf{w}$  可以写成

$$\mathbf{w} = \mathbf{s}_{\text{ref}} + \mathbf{B} \mathbf{w}_B \quad (11)$$

由于  $\mathbf{B}$  与  $\mathbf{s}_{\text{ref}}$  正交,故  $\mathbf{s}_{\text{ref}}$  通过广义旁瓣对消滤波器后的输出与匹配滤波相比不会发生变化,即

$$\mathbf{w}^H \mathbf{s}_{\text{ref}} = \mathbf{s}_{\text{ref}}^H \mathbf{s}_{\text{ref}} \quad (12)$$

为了抑制模糊函数副峰的高度,应该使得导致副峰的信号  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$  通过滤波器后的输出尽可能地小,即可以约束滤波输出功率之和满足

$$|\mathbf{w}^H \mathbf{s}_1|^2 + |\mathbf{w}^H \mathbf{s}_2|^2 \leq \gamma \quad (13)$$

从式(13)可以看出,  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$  通过满足该约束的滤波器  $\mathbf{w}$  的高度不会超过  $\sqrt{\gamma}$ 。

然而,使用广义旁瓣对消滤波器必然会导致信噪比损失,该损失的大小可以定义为使用滤波器  $\mathbf{w}$  的信噪比与使用匹配滤波器的信噪比之比,即

$$\text{Loss} = \frac{(\mathbf{w}^H \mathbf{s}_{\text{ref}})^2 / (\sigma^2 \cdot \mathbf{w}^H \mathbf{w})}{(\mathbf{s}_{\text{ref}}^H \mathbf{s}_{\text{ref}}) / \sigma^2} = \frac{\mathbf{s}_{\text{ref}}^H \mathbf{s}_{\text{ref}}}{\mathbf{w}^H \mathbf{w}} \quad (14)$$

其中  $\sigma^2$  为噪声功率。因此,滤波器设计时需要在尽量抑制副峰输出功率的同时,使得系统信噪比损失最

小。故而广义旁瓣对消滤波器的设计可以等价成如下的优化问题求解:

$$\min_{\mathbf{w}_B} \mathbf{w}^H \mathbf{w} \quad (15)$$

$$\text{s. t. } |\mathbf{w}^H \mathbf{s}_1|^2 + |\mathbf{w}^H \mathbf{s}_2|^2 \leq \gamma$$

利用式(11),式(15)的代价函数可简化为

$$\mathbf{w}^H \mathbf{w} = (\mathbf{s}_{\text{ref}} + \mathbf{B} \mathbf{w}_B)^H (\mathbf{s}_{\text{ref}} + \mathbf{B} \mathbf{w}_B) = \mathbf{s}_{\text{ref}}^H \mathbf{s}_{\text{ref}} + \mathbf{w}_B^H \mathbf{w}_B \quad (16)$$

另外,约束条件可以写成

$$|\mathbf{w}^H \mathbf{s}_1|^2 + |\mathbf{w}^H \mathbf{s}_2|^2 = \mathbf{w}^H (\mathbf{s}_1 \mathbf{s}_1^H + \mathbf{s}_2 \mathbf{s}_2^H) \mathbf{w} = \mathbf{w}^H \mathbf{P}_s \mathbf{w} \quad (17)$$

其中  $\mathbf{P}_s = \mathbf{S} \mathbf{S}^H$ ,  $\mathbf{S} = [\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2]$ 。故式(15)可重写为

$$\min_{\mathbf{w}_B} \mathbf{w}_B^H \mathbf{w}_B \quad (18)$$

$$\text{s. t. } (\mathbf{s}_{\text{ref}} + \mathbf{B} \mathbf{w}_B)^H \mathbf{P}_s (\mathbf{s}_{\text{ref}} + \mathbf{B} \mathbf{w}_B) \leq \gamma$$

为求解上述优化问题,定义拉格朗日乘子<sup>[11]</sup>

$$F(\lambda) = \mathbf{w}_B^H \mathbf{w}_B + \lambda ((\mathbf{s}_{\text{ref}} + \mathbf{B} \mathbf{w}_B)^H \mathbf{P}_s (\mathbf{s}_{\text{ref}} + \mathbf{B} \mathbf{w}_B) - \gamma) \quad (19)$$

其中要求  $\lambda \geq 0$ 。

将  $F(\lambda)$  对  $\mathbf{w}_B$  求导并令求导结果为 0,可得

$$\mathbf{w}_B + \lambda \mathbf{B}^H \mathbf{P}_s (\mathbf{s}_{\text{ref}} + \mathbf{B} \mathbf{w}_B) = \mathbf{0} \quad (20)$$

因此  $\mathbf{w}_B$  的最优解满足

$$\mathbf{w}_B(\lambda) = -\lambda (\mathbf{I} + \lambda \mathbf{B}^H \mathbf{P}_s \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H \mathbf{P}_s \mathbf{s}_{\text{ref}} \quad (21)$$

其中  $\lambda$  为以下方程的解:

$$(\mathbf{s}_{\text{ref}} + \mathbf{B} \mathbf{w}_B(\lambda))^H \mathbf{P}_s (\mathbf{s}_{\text{ref}} + \mathbf{B} \mathbf{w}_B(\lambda)) = \gamma \quad (22)$$

将式(21)代入式(22)并化简,可得  $\lambda$  满足

$$\lambda^2 \mathbf{r}^H (\mathbf{I} + \lambda \mathbf{R})^{-1} \mathbf{R} (\mathbf{I} + \lambda \mathbf{R})^{-1} \mathbf{r} - 2\lambda \mathbf{r}^H (\mathbf{I} + \lambda \mathbf{R})^{-1} \mathbf{r} + c = \gamma \quad (23)$$

其中  $\mathbf{R} = \mathbf{B}^H \mathbf{P}_s \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{r} = \mathbf{B}^H \mathbf{P}_s \mathbf{s}_{\text{ref}}$ ,  $c = \mathbf{s}_{\text{ref}}^H \mathbf{P}_s \mathbf{s}_{\text{ref}} = |P_{s1}|^2 + |P_{s2}|^2$  为副峰功率之和。

为计算  $\lambda$  及分析式(23)的可解性,接下来分析

$$h(\lambda) = \lambda^2 \mathbf{r}^H (\mathbf{I} + \lambda \mathbf{R})^{-1} \mathbf{R} (\mathbf{I} + \lambda \mathbf{R})^{-1} \mathbf{r} - 2\lambda \mathbf{r}^H (\mathbf{I} + \lambda \mathbf{R})^{-1} \mathbf{r} + c - \gamma \quad (24)$$

的单调性。记  $\beta = 1/\lambda$  以及  $g(\beta) = h(\lambda)$ ,则  $g(\beta)$  可写成

$$g(\beta) = \mathbf{r}^H (\beta \mathbf{I} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{R} (\beta \mathbf{I} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{r} - 2\mathbf{r}^H (\beta \mathbf{I} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{r} + c - \gamma \quad (25)$$

当得到  $g(\beta) = 0$  的根后,便能得到  $h(\lambda) = 0$  的根,即方程式(22)的解。由于  $\mathbf{R}$  半正定,且  $\beta = 1/\lambda > 0$ ,因此

$$g'(\beta) = 2\beta \mathbf{r}^H (\beta \mathbf{I} + \mathbf{R})^{-3} \mathbf{r} \geq 0 \quad (26)$$

故  $g(\beta)$  是定义在区间  $(0, \infty)$  的单调递增函数,且

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow 0} g(\beta) &= \lim_{\beta \rightarrow 0} c - \mathbf{r}^H (\beta \mathbf{I} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{r} - \gamma \\ &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \mathbf{s}_{\text{ref}}^H \mathbf{P}_s \mathbf{s}_{\text{ref}} - \mathbf{s}_{\text{ref}}^H \mathbf{P}_s \mathbf{B} (\beta \mathbf{I} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{B}^H \mathbf{P}_s \mathbf{s}_{\text{ref}} - \gamma \\ &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \mathbf{s}_{\text{ref}}^H \mathbf{S} (\mathbf{I} - \mathbf{S}^H \mathbf{B} (\beta \mathbf{I} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{B}^H \mathbf{S}) \mathbf{S}^H \mathbf{s}_{\text{ref}} - \gamma \end{aligned}$$

(27)

由于  $\mathbf{I} - \mathbf{S}^H \mathbf{B}(\beta \mathbf{I} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{B}^H \mathbf{S}$  与  $\mathbf{I} - (\beta \mathbf{I} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{B}^H \mathbf{S} \mathbf{S}^H \mathbf{B}$  具有相同的非零特征值<sup>[12]</sup>, 而

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \mathbf{I} - (\beta \mathbf{I} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{B}^H \mathbf{S} \mathbf{S}^H \mathbf{B} = \lim_{\beta \rightarrow 0} \mathbf{I} - (\beta \mathbf{I} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{R} = 0 \quad (28)$$

故  $\lim_{\beta \rightarrow 0} g(\beta) = -\gamma < 0$ . 另不难得出,  $\lim_{\beta \rightarrow \infty} g(\beta) = c - \gamma$ .

由于  $c - \gamma > 0$  以及  $g(\beta)$  单调连续, 因此方程  $g(\beta) = 0$  在区间  $(0, \infty)$  必然存在唯一解. 为了压缩求根区间、减少求根的运算量, 首先检验  $g(1)$  的符号位. 当  $g(1) > 0$  时, 表明方程  $g(\beta) = 0$  的根位于  $(0, 1)$  区间内, 否则意味着方程  $g(\beta) = 0$  的根位于  $[1, \infty)$  区间内. 注意到  $\beta = 1/\lambda$ , 这又等价于  $h(\lambda) = 0$  的根位于区间  $(0, 1)$  内. 因此通过检验  $g(1)$  的符号位, 总是能将求根范围压缩到  $(0, 1)$  区间. 基于函数的单调性, 可用二分法对方程  $h(\lambda) = 0$  或者  $g(\beta) = 0$  快速求根, 具体过程如算法 1 所示. 求解  $\lambda$  后将其代入到式(21)中可得

$$\mathbf{w} = \mathbf{s}_{\text{ref}} + \mathbf{B} \mathbf{w}_B(\lambda) \quad (29)$$

#### 算法 1 基于二分法的 $\lambda$ 求解

步骤 1 计算  $g(1)$ .

步骤 2

(1) 如果  $g(1) > 0$ , 则令  $\beta^l = 0, \beta^u = 1$ .

① 令  $\beta = (\beta^l + \beta^u)/2$ , 计算  $g(\beta)$ , 若  $g(\beta) > 0$ , 则令  $\beta^u = \beta$ ; 若  $g(\beta) < 0$ , 则令  $\beta^l = \beta$ ;

② 若  $\beta^u - \beta^l > \epsilon$ , 返回①, 否则求根过程停止, 其中  $\epsilon$  为二分法迭代停止门限; 求根过程停止后, 计算  $\lambda = 1/\beta$ .

(2) 如果  $g(1) < 0$ , 则令  $\lambda^l = 0, \lambda^u = 1$ .

① 令  $\lambda = (\lambda^l + \lambda^u)/2$ , 计算  $h(\lambda)$ , 若  $h(\lambda) > 0$ , 则令  $\lambda^u = \lambda$ ; 若  $h(\lambda) < 0$ , 则令  $\lambda^l = \lambda$ ;

② 若  $\lambda^u - \lambda^l > \epsilon$ , 返回①, 否则求根过程停止;

可以看出, 可以得到基于广义旁瓣对消结构的滤波器闭式解, 且该方法可将副峰控制到任意低的高度.

## 4 副峰抑制算法的快速实现

使用二分法进行方程求根时, 需要频繁计算  $g(\beta)$  以及  $h(\lambda)$  的值. 从式(24)及式(25)可以看出, 其中涉及到  $(L-1) \times (L-1)$  的矩阵求逆, 且每当  $\beta$  或  $\lambda$  变化时逆矩阵需要重新进行计算. 另外, 利用式(29)设计滤波器也面临矩阵求逆的问题. 通常, 外辐射源雷达系统为了能够检测目标, 积累时间(或观测时间)一般都很长, 即  $L$  的值很大, 从而导致高维矩阵求逆的代价极大, 且矩阵维数过高时, 矩阵求逆通常容易导致数值稳定性问题. 为减少计算  $g(\beta)$ 、 $h(\lambda)$  以及  $\mathbf{w}$  的复杂度, 首先假定矩阵  $\mathbf{R}$  的特征值分解为

$$\mathbf{R} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{U}^H \quad (30)$$

由于矩阵  $\mathbf{P}_s$  的秩为 2, 故  $\mathbf{R} = \mathbf{B}^H \mathbf{P}_s \mathbf{B}$  的秩不超过 2. 接下来给出低秩半正定矩阵  $\mathbf{R}$  的两个非 0 特征值以及对应的特征矢量计算方法.

记  $\mathbf{S}_B = \mathbf{B}^H \mathbf{S}$ , 则  $\mathbf{R}$  可以写成

$$\mathbf{R} = \mathbf{B}^H \mathbf{S} \mathbf{S}^H \mathbf{B} = \mathbf{S}_B \mathbf{S}_B^H \quad (31)$$

根据特征值以及特征向量的定义,  $\mathbf{R}$  的特征对  $(\sigma, \mathbf{u})$  满足  $\mathbf{R} \mathbf{u} = \sigma \mathbf{u}$ . 即

$$\mathbf{S}_B \mathbf{y} = \sigma \mathbf{u} \quad (32)$$

其中  $\mathbf{y} = \mathbf{S}_B^H \mathbf{u}$ .

将式(32)代入到  $\mathbf{y}$  的表达式中, 可得

$$\mathbf{S}_B^H \mathbf{S}_B \mathbf{y} = \sigma \mathbf{y} \quad (33)$$

故而  $(\sigma, \mathbf{y})$  构成了矩阵  $\mathbf{R}_B = \mathbf{S}_B^H \mathbf{S}_B$  的特征对, 即  $\mathbf{R}_B$  与  $\mathbf{R}$  具有相同的非零特征值. 由于矩阵  $\mathbf{R}_B$  的维数降到了  $2 \times 2$ , 因此很容易得到它的特征值以及特征向量, 将  $\mathbf{R}_B$  的特征对记作  $(\sigma_i, \mathbf{y}_i)$ ,  $i = 1, 2$ , 则  $\mathbf{R}$  的非零特征值及对应的特征向量可以写成

$$(\sigma_i, \mathbf{u}_i) = (\sigma_i, 1/\sqrt{\sigma_i} \cdot \mathbf{S}_B \mathbf{y}_i), i = 1, 2 \quad (34)$$

其中为后续分析的方便, 对  $\mathbf{u}_i$  进行了归一化处理.

另外, 可利用下式计算  $\mathbf{R}_B$  减少运算复杂度

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_B &= \mathbf{S}_B^H \mathbf{S}_B \\ &= \mathbf{S}^H (\mathbf{I} - \mathbf{s}_{\text{ref}} \mathbf{s}_{\text{ref}}^H / \mathbf{s}_{\text{ref}}^H \mathbf{s}_{\text{ref}}) \mathbf{S} \\ &= \mathbf{S}^H \mathbf{S} - \mathbf{S}^H \mathbf{s}_{\text{ref}} \mathbf{s}_{\text{ref}}^H \mathbf{S} / \mathbf{s}_{\text{ref}}^H \mathbf{s}_{\text{ref}} \end{aligned} \quad (35)$$

其中利用了阻塞矩阵的性质  $\mathbf{B} \mathbf{B}^H = \mathbf{I} - \mathbf{s}_{\text{ref}} \mathbf{s}_{\text{ref}}^H / \mathbf{s}_{\text{ref}}^H \mathbf{s}_{\text{ref}}$ .

利用  $\mathbf{R}$  的特征值分解结果, 可以将  $g(\beta)$  及  $h(\lambda)$  的计算过程简化为

$$g(\beta) = \sum_{l=1}^2 \frac{|q_l|^2 \sigma_l}{(\beta + \sigma_l)^2} - 2 \sum_{l=1}^L \frac{|q_l|^2}{\beta + \sigma_l} + c - \gamma \quad (36)$$

$$h(\lambda) = \sum_{l=1}^2 \frac{\lambda^2 |q_l|^2 \sigma_l}{(1 + \lambda \sigma_l)^2} - 2 \sum_{l=1}^L \frac{\lambda |q_l|^2}{1 + \lambda \sigma_l} + c - \gamma \quad (37)$$

其中  $q_i = \mathbf{u}_i^H \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{u}_i$  为  $\mathbf{U}$  矩阵的第  $i$  列,  $\sigma_i$  为  $\mathbf{R}$  的第  $i$  个特征值, 且利用了  $\mathbf{R}$  具有  $(L-2)$  个零特征值这一性质, 即  $\sigma_3 = \dots = \sigma_L = 0$ .

$q_i (i = 1, 2)$  可采用如下方法计算

$$\begin{aligned} q_i &= \mathbf{u}_i^H \mathbf{r} = 1/\sqrt{\sigma_i} \cdot \mathbf{y}_i^H \mathbf{S}_B^H \mathbf{r} = 1/\sqrt{\sigma_i} \cdot \mathbf{y}_i^H \mathbf{S}_B^H \mathbf{B}^H \mathbf{P}_s \mathbf{s}_{\text{ref}} \\ &= 1/\sqrt{\sigma_i} \cdot \mathbf{y}_i^H \mathbf{R}_B \mathbf{S}^H \mathbf{s}_{\text{ref}} = \sqrt{\sigma_i} \mathbf{y}_i^H \mathbf{S}^H \mathbf{s}_{\text{ref}} \end{aligned} \quad (38)$$

此处利用了  $\mathbf{R}_B \mathbf{y}_i = \sigma_i \mathbf{y}_i$  的性质.

此外,  $h(\lambda)$  的第二项可写成

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^L \frac{\lambda |q_l|^2}{1 + \lambda \sigma_l} &= \sum_{l=1}^2 \frac{\lambda |q_l|^2}{1 + \lambda \sigma_l} + \lambda \sum_{l=3}^L |q_l|^2 \\ &= \sum_{l=1}^2 \frac{\lambda |q_l|^2}{1 + \lambda \sigma_l} + \lambda \mathbf{r}^H (\mathbf{I} - \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^H - \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2^H) \mathbf{r} \end{aligned}$$

$$= \sum_{l=1}^2 \lambda |q_l|^2 / (1 + \lambda \sigma_l) + \lambda (\mathbf{r}^H \mathbf{r} - \sum_{l=1}^2 |q_l|^2) \quad (39)$$

利用  $\mathbf{r}$  的定义, 又可得

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^H \mathbf{r} &= \mathbf{s}_{\text{ref}}^H \mathbf{S} \mathbf{S}^H \mathbf{B} \mathbf{B}^H \mathbf{S} \mathbf{S}^H \mathbf{s}_{\text{ref}} = \mathbf{s}_{\text{ref}}^H \mathbf{S} \mathbf{R}_B \mathbf{S}^H \mathbf{s}_{\text{ref}} \\ &= \mathbf{s}_{\text{ref}}^H \mathbf{S} (\sigma_1 \mathbf{y}_1 \mathbf{y}_1^H + \sigma_2 \mathbf{y}_2 \mathbf{y}_2^H) \mathbf{S}^H \mathbf{s}_{\text{ref}} \\ &= |q_1|^2 + |q_2|^2 \end{aligned} \quad (40)$$

因此,

$$\sum_{l=1}^L \lambda |q_l|^2 / (1 + \lambda \sigma_l) = \sum_{l=1}^2 \lambda |q_l|^2 / (1 + \lambda \sigma_l) \quad (41)$$

可以看出, 采用以上方法计算  $g(\beta)$  以及  $h(\lambda)$  仅涉及到  $2 \times 2$  矩阵的特征值分解及一些矢量相乘运算, 完全避开了高维矩阵求逆. 由于  $h(\lambda) = g(1/\beta)$ , 为简洁起见, 算法 2 只总结了以  $h(\lambda)$  为例的快速计算方法及算法复杂度分析.

#### 算法 2 $h(\lambda)$ 的快速计算方法以及复杂度分析

**步骤 1** 计算  $\mathbf{S}^H \mathbf{s}_{\text{ref}} = [P_{s1} \ P_{s2}]^H$ , 并利用式(35)计算  $\mathbf{R}_B$  及其特征值分解, 得到  $\mathbf{R}_B$  的特征对  $(\sigma_i, \mathbf{y}_i)$ ,  $i = 1, 2$ . 计算复杂度为  $O(L + 2^3)$

**步骤 2** 利用式(38)计算  $q_i$ ,  $i = 1, 2$ . 计算复杂度为  $O(2)$

**步骤 3** 计算  $c = |P_{s1}|^2 + |P_{s2}|^2$ . 计算复杂度为  $O(2)$

**步骤 4** 利用式(37)以及(41)计算  $h(\lambda)$ . 计算复杂度为  $O(2^2)$ , 总复杂度为  $O(L)$

从算法 2 可以看出, 步骤 1 至 3 的计算与  $\lambda$  无关, 因此当变动  $\lambda$  时, 可以反复使用步骤 1 至 3 的计算结果, 仅需重新执行步骤 4. 故而相比于直接使用式(24)及式(25), 使用算法 2 方法可将计算复杂度从  $O(N_{\text{iter}} L^3)$  降低至  $O(L)$ , 大大减少了算法的运算量, 其中  $N_{\text{iter}} = \log_2(1/\epsilon)$  为二分法的执行次数.

最后, 为了得到广义旁瓣对消滤波器设计结果, 使用矩阵求逆引理<sup>[12]</sup>可得

$$(\mathbf{I} + \lambda \mathbf{B}^H \mathbf{P}_s \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{I} - \lambda \mathbf{B}^H \mathbf{S} (\mathbf{I} + \lambda \mathbf{R}_B)^{-1} \mathbf{S}^H \mathbf{B} \quad (42)$$

因此

$$\begin{aligned} &\mathbf{B} (\mathbf{I} + \lambda \mathbf{B}^H \mathbf{P}_s \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H \mathbf{P}_s \mathbf{s}_{\text{ref}} \\ &= \mathbf{B} \mathbf{B}^H \mathbf{S} [\mathbf{I} - \lambda (\mathbf{I} + \lambda \mathbf{R}_B)^{-1} \mathbf{R}_B] \mathbf{S}^H \mathbf{s}_{\text{ref}} \\ &= (\mathbf{S} - \mathbf{s}_{\text{ref}} \mathbf{s}_{\text{ref}}^H \mathbf{S} / \mathbf{s}_{\text{ref}}^H \mathbf{s}_{\text{ref}}) (\mathbf{I} + \lambda \mathbf{R}_B)^{-1} \mathbf{S}^H \mathbf{s}_{\text{ref}} \end{aligned} \quad (43)$$

最后,  $\mathbf{w}(\lambda)$  的快速计算方法为

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(\lambda) &= \mathbf{s}_{\text{ref}} + \mathbf{B} \mathbf{w}_B(\lambda) \\ &= \mathbf{s}_{\text{ref}} - \lambda \mathbf{B} (\mathbf{I} + \lambda \mathbf{B}^H \mathbf{P}_s \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H \mathbf{P}_s \mathbf{s}_{\text{ref}} \\ &= \mathbf{s}_{\text{ref}} - \lambda (\mathbf{S} - \mathbf{s}_{\text{ref}} \mathbf{s}_{\text{ref}}^H \mathbf{S} / \mathbf{s}_{\text{ref}}^H \mathbf{s}_{\text{ref}}) (\mathbf{I} + \lambda \mathbf{R}_B)^{-1} \mathbf{S}^H \mathbf{s}_{\text{ref}} \end{aligned} \quad (44)$$

其实现复杂度约为  $O(L)$ . 可以看出, 相比于匹配滤波方法, 本文所提的副峰抑制算法只增加了很少的运算量, 具有非常强的工程实用性.

## 5 信噪比损失分析

当使用式(44)抑制副峰时, 信噪比损失为:

$$\text{Loss}(\lambda) = \frac{\mathbf{s}_{\text{ref}}^H \mathbf{s}_{\text{ref}}}{\mathbf{w}^H(\lambda) \mathbf{w}(\lambda)} = \frac{\mathbf{s}_{\text{ref}}^H \mathbf{s}_{\text{ref}}}{\mathbf{s}_{\text{ref}}^H \mathbf{s}_{\text{ref}} + \mathbf{w}_B^H(\lambda) \mathbf{w}_B(\lambda)} \quad (45)$$

根据式(21),

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_B^H(\lambda) \mathbf{w}_B(\lambda) &= \lambda^2 \mathbf{r}^H (\mathbf{I} + \lambda \mathbf{R})^{-2} \mathbf{r} \\ &= \lambda^2 \sum_{l=1}^L \frac{|q_l|^2}{(1 + \lambda \sigma_l)^2} = \lambda^2 \sum_{l=1}^2 \frac{|q_l|^2}{(1 + \lambda \sigma_l)^2} \end{aligned} \quad (46)$$

从式(45)以及式(46)可以看出, 信噪比损失仅取决于  $\lambda$ 、 $q_l$  以及  $\sigma_l$ . 且  $\lambda$  取值越大, 信噪比损失越高, 且最大信噪比损失为

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \text{Loss}(\lambda) = \frac{\mathbf{s}_{\text{ref}}^H \mathbf{s}_{\text{ref}}}{\mathbf{s}_{\text{ref}}^H \mathbf{s}_{\text{ref}} + \sum_{l=1}^2 |q_l|^2 / \sigma_l^2} \quad (47)$$

利用式(38), 可得

$$\sum_{l=1}^2 |q_l|^2 / \sigma_l^2 = \sum_{l=1}^2 |\mathbf{y}_l^H \mathbf{S}^H \mathbf{s}_{\text{ref}}|^2 / \sigma_l \quad (48)$$

由于

$$\sum_{l=1}^2 |\mathbf{y}_l^H \mathbf{S}^H \mathbf{s}_{\text{ref}}|^2 = \mathbf{s}_{\text{ref}}^H \mathbf{S} \mathbf{S}^H \mathbf{s}_{\text{ref}} = P_{s1}^2 + P_{s2}^2 \quad (49)$$

因此

$$\frac{(P_{s1}^2 + P_{s2}^2)}{\max\{\sigma_1, \sigma_2\}} \leq \sum_{l=1}^2 |q_l|^2 / \sigma_l^2 \leq \frac{(P_{s1}^2 + P_{s2}^2)}{\min\{\sigma_1, \sigma_2\}} \quad (50)$$

不难看出, 信噪比损失的上界与旁瓣的高度密切相关, 旁瓣高度越高, 则信噪比损失越大.

## 6 数值仿真

为验证算法有效性并分析其性能, 首先考虑当副峰功率之和约束在  $-30\text{dB}$  ( $\gamma = 10^{-3}$ ) 以下的算法性能. 经计算, 对于图 1 中的实测外辐射源信号, 当  $\lambda = 85.25$  时, 经过广义旁瓣对消滤波器的副峰输出功率之和满足该约束条件. 图 3 给出了使用式(44)进行副峰抑制的互模糊函数, 其中互模糊函数的定义为

$$|\chi_{\text{cc}}(mT_s, nT_s)|^2 = \left| \sum_{l=1}^{L-m} w(l) s_{\text{ref}}^*(l+m) e^{j2\pi n l T_s} \right|^2 \quad (51)$$

$T_s$  为信号采样间隔.

从图 3 可以看出, 使用本文算法抑制副峰后, 互模糊函数已经不存在明显的副峰, 具有类似于图钉的形状. 此外, 互模糊函数在零多普勒切面取值表明副峰

(箭头指向位置)的高度得到了明显的抑制,降低到了  $-30\text{dB}$  以下。

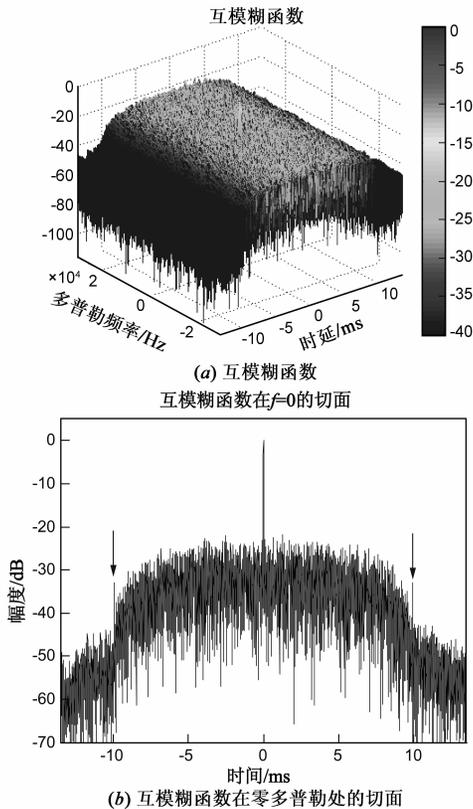


图3 滤波器与非合作外辐射源信号的互模糊函数

接下来分析使用副峰抑制算法的信噪比损失.图 4 给出了当副峰功率之和约束在  $-50\text{dB}$  至  $-20\text{dB}$  内时, $\lambda$  取值的变化曲线,图 5 给出了相应的信噪比损失.从图中结果可以看出,对副峰高度抑制得越厉害( $\gamma$  取值越小),则  $\lambda$  取值越大,相应的信噪比损失也越大.但对于本文所使用的实测信号,信噪比损失不超过  $3.23\text{dB}$ .

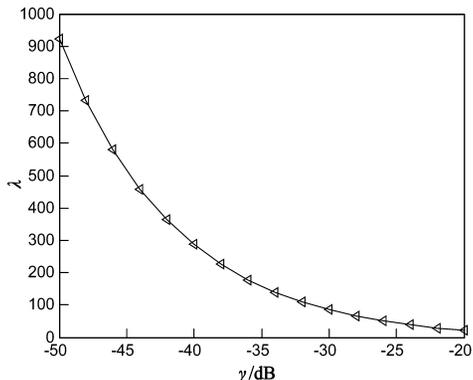


图4 副峰功率约束高度 $\gamma$ 与 $\lambda$ 的关系曲线

## 7 结论

为抑制非合作外辐射源信号模糊函数的副峰,提出了基于广义旁瓣对消滤波器的副峰抑制算法,得到

了广义旁瓣对消滤波器的闭式解.为减少滤波器设计的运算量,提出了快速实现算法.该快速算法避免了极高维矩阵的求逆运算,将滤波器设计的计算复杂度从  $O(N_{\text{iter}}L^3)$  降低到了  $O(L)$ ,具有很强的工程应用价值.此外,分析了算法的信噪比损失,推导了其于副峰高度等因素的关系.基于实测数据的处理结果表明,算法可有效抑制副峰高度.若对副峰功率之和抑制得很低,会造成一定的信噪比损失,但是信噪比损失不超过  $3.23\text{dB}$ .

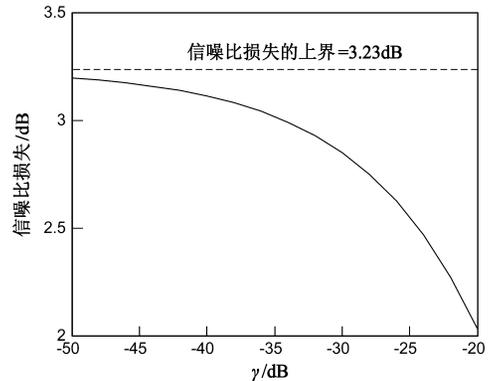


图5 副峰功率约束高度 $\gamma$ 与信噪比损失的关系

## 参考文献

- [1] Griffiths H. Television based bistatic radar[J]. IEE Proc F, Communication, Radar and Signal Processing, 1986, 133(7): 649 – 657.
- [2] Howland P E, Maksimiuk D, Reitsma G. FM radio based bistatic radar[J]. IEE Proc Radar Sonar Navigation, 2005, 152(3): 107 – 115.
- [3] Tan D K P, Sun H, Lu Y, et al. Passive radar using global system for mobile communication signal: theory, implementation and measurements[J]. IEE Proc Radar Sonar Navig, 2005, 152(3): 116 – 123.
- [4] 杨博.空基辐射源非合作探测系统关键技术研究[D].长沙:国防科技大学,2011.  
Yang Bo. Study on Key Techniques on Space Emitter Non-Cooperative Detection System[D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2011. (in Chinese)
- [5] Griffiths H D, Baker C J, Baubert J, et al. Bistatic radar using satellite-borne illuminators [A]. Proceedings of IEEE Radar Conference[C]. Edinburgh: IEEE, 2002. 1 – 5.
- [6] Baker C J, Griffiths H D, Papoutsis I. Passive coherent location radar systems. Part 2: waveform properties[J]. IEE Proc Radar Sonar Navig, 2005, 152(3): 160 – 168.
- [7] 高志文,陶然,单涛. DVB-T 辐射源雷达信号模糊函数的副峰分析与抑制[J]. 电子学报, 2008, 36(3): 505 – 509.  
Gao Zhi-wen, Tao Ran, Shan Tao. Side peaks analysis and suppression of DVB-T signal ambiguity function for passive radar

- [J]. Acta Electronica Sinica, 2008, 36(3): 505 – 509. (in Chinese)
- [8] 万显荣, 岑博, 程丰, 饶云华, 龚子平. 基于 CMMB 的外辐射源雷达信号模糊函数分析与处理[J]. 电子与信息学报, 2011, 33(10): 2489 – 2493.  
Wan Xian-rong, Cen Bo, Cheng Feng, et al. Ambiguity function analysis and processing of CMMB signal based passive radar [J]. Journal of Electronics and Information Technology, 2011, 33(10): 2489 – 2493. (in Chinese)
- [9] Wang H, Wang J, Zhong L. Mismatched filter for analogue TV-based passive bistatic radar[J]. IET Radar Sonar Navig, 2011, 5(5): 573 – 581.
- [10] Van Trees H L. 最优阵列处理技术[M]. 汤俊, 等, 译. 北京: 清华大学出版社, 2007.  
Van Trees H L. Optimum Array Processing[M]. Translated by Tang Jun, et al. Beijing: Tsinghua University Press, 2007. (in Chinese)
- [11] Boyd S P, Vandenberghe L. Convex Optimization[M]. New York: Cambridge University Press, 2004.
- [12] 张贤达. 矩阵分析与应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2006.

## 作者简介



进步三等奖 2 项.

E-mail: tangbo06@gmail.com

**唐波** 男, 1985 年 8 月出生于江西临川, 2006 年和 2011 年于清华大学电子工程系获工学学士和工学博士学位, 现为电子工程学院讲师. 研究兴趣主要包括自适应阵列信号处理、雷达波形设计等, 主持了国家自然科学基金、安徽省自然科学基金等多项科研项目, 在 IEEE Trans. signal processing 等国内外刊物发表论文 30 余篇, 其中被 SCI 检索 10 余篇, EI 检索 20 余篇, 并获省部级科技

**程水英** 男, 1974 年 10 月出生于安徽舒城, 2005 年毕业于电子工程学院获工学博士学位, 现为副教授, 主要研究方向为机动目标跟踪、无源雷达等.

**张浩** 男, 1986 年 7 月出生于湖北仙桃, 2012 年毕业于清华大学自动化系获工学硕士学位, 现为助教, 主要研究方向为信号处理.