

任意稀疏结构的多量测向量快速稀疏重构算法研究

李少东¹, 陈文峰¹, 杨 军², 马晓岩²

(1. 空军预警学院研究生队, 湖北武汉 430019; 2. 空军预警学院空天预警装备系, 湖北武汉 430019)

摘 要: 目前的稀疏重构算法求解多量测向量时存在两个问题: 一是计算复杂度高; 二是不能实现任意稀疏结构的多量测向量重构. 为此, 本文提出一种多量测向量快速重构算法. 该算法首先构建矩阵平滑零范数法, 实现对具有任意稀疏结构的多量测向量的重构, 并获得多量测向量的初始支撑集; 其次根据稀疏度与量测维度的关系, 对初始支撑集进行筛选获得预选支撑集; 然后采用贝叶斯组检验方式得到信号重构所需的最终支撑集; 最后通过最终支撑集实现信号的重构. 该算法充分利用了矩阵平滑零范数法的高效性以及贝叶斯组检验对冗余支撑集的剔除功能, 不但实现了稀疏位置随机变化的多量测向量的高效重构, 而且保证了算法的精度, 并对噪声具有一定的鲁棒性, 基于实测数据的 ISAR 成像实验验证了所提算法的有效性.

关键词: 稀疏重构; 任意稀疏结构; 多量测向量; 贝叶斯组检验; 矩阵平滑零范数法;

中图分类号: TN911.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2015)04-0708-08

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.3969/j.issn.0372-2112.2015.04.012

Study on the Fast Sparse Recovery Algorithm via Multiple Measurement Vectors of Arbitrary Sparse Structure

LI Shao-dong¹, CHEN Wen-feng¹, YANG Jun², MA Xiao-yan²

(1. Department of Graduate Management, Air Force Early Warning Academy, Wuhan, Hubei 430019, China;

2. Department of Air/Space Early Warning Equipment, Air Force Early Warning Academy, Wuhan, Hubei 430019, China)

Abstract: The traditional Sparse Recovery (SR) algorithms are unsuitable for signal reconstruction of Multiple Measurement Vectors (MMV) for the following two reasons, one is the high computing burden, and the other is that the presented algorithms are not used to the case when MMV are arbitrary sparse structure. To solve the problems, a novel fast sparse recovery algorithm is proposed. Firstly, the Matrix Smoothed L0-norm (MSL0) algorithm is adopted to reconstruct the MMV of arbitrary sparse structure and estimate the initial support. Secondly, using the relationship between the sparse level and measurement number, the pre-selection support is obtained from choosing the initial support. Thirdly, the final support is gotten with Bayesian Group Testing (BGT) method. And finally, the MMV is reconstructed precisely via the final support. The proposed algorithm makes full use of high efficiency of the MSL0 and redundancy support elimination ability of the BGT. The algorithm can not only reconstruct MMV of arbitrary sparse structure more efficiently, but also has higher reconstructed accuracy and better robustness. ISAR imaging experiments based on real data show the validity of the proposed algorithm.

Key words: sparse recovery; arbitrary sparse structure; multiple measurement vectors; Bayesian group testing; matrix smoothed L0-norm;

1 引言

从有限的信号中获得信号的稀疏表示一直吸引着众多学者的研究兴趣^[1~3], 近年来提出的压缩感知 (Compressive Sensing, CS) 理论^[4~6]也是在稀疏表示理论的基础上, 为减少测量数据量而提出的. 虽然众多学者致力于稀疏重构 (Sparse Recovery, SR) 算法的研究, 但是

目前大部分新的 SR 算法重点研究单量测向量 (Single Measurement Vector, SMV) 的重构, 虽然算法在抗噪性和重构精度方面有了很大进步, 但是在实际应用中存在大量的多量测向量 (Multiple Measurement Vectors, MMV) 情形^[7], 如脑磁图 (MEG) 数据处理^[7]、阵列信号处理^[7]、SAR/ISAR 成像^[8,9]等问题. 传统方法处理 MMV 的思路是将 MMV 分为多个 SMV, 然后利用相应的稀疏重构算

法进行逐个向量重构后组合得到最终解^[8,9]. 这种处理模式虽然也能获得良好的重构结果,但由于每个 SMV 都需要执行一次重构,将产生大量的冗余计算,增加了不必要的计算负担.

为解决求解 MMV 时存在的计算复杂度高的问题,文献[7]率先提出基于 MMV 的稀疏重构思路,并将其用于脑磁图成像处理中;文献[10]将 SMV 的理论结果拓展到 MMV 中,提出了 OMPMMV 算法,并给出了该算法在一定条件下能够以更高的效率重构 MMV 的理论证明;文献[11]从理论上证明了基于 MMV 的算法重构概率高于基于 SMV 的算法. 文献[12]对目前基于 MMV 的重构算法进行了综述,并分析了下一步的发展方向.

然而目前基于 MMV 的 SR 算法对原始稀疏数据有一个约束:要求信号具有相同的稀疏结构,即信号支撑集与不同的量测列独立. 例如若信号的第 m 个支撑集非零,幅度为 a_m ,那么在向量数为 D 的长度内,需保证 $x_m^{(d)} = a_m, d = 1, 2, \dots, D^{[7]}$. 这在实际应用场景中是很难保证的,因为信号的稀疏位置往往是时变甚至是任意变化的^[12,13]. 此时若仍然采用常规的 OMPMMV^[11]、M-FOCUSS 等算法^[7]进行重构,误差将非常大甚至算法失效. 因此,如何快速重构具有任意稀疏结构的 MMV 是一个值得研究的问题.

文献[14]为提高贪婪类算法的重构精度,提出一种贝叶斯假设检验匹配追踪算法(BTMP),用于在噪声污染下对支撑集进行二次选择. 但是由于该算法利用匹配追踪算法的输出下标集作为候选集,且只针对 SMV 问题有效,虽然支撑集估计精度得到提高,但算法的粗重构耗时长;同时没有对算法参数设置的合理性进行解释.

针对目前的 SR 算法求解 MMV 问题时将 MMV 分为多个 SMV,造成计算复杂度高以及具有任意稀疏结构的 MMV 重构困难等问题,本文提出了一种多量测向量快速稀疏重构(Multiple Measurement Vectors Fast sparse Recovery, MMVFR)算法. 该算法首先利用 SLO 算法^[15]重构时无须收敛到最优,只需找到最优值附近的特点,构建矩阵平滑零范数法(Matrix Smoothed L0, MSLO),由于 MSLO 在统一的参数框架下并行重构 MMV,将大大降低重构计算量;然后根据稀疏度与量测维度的关系,对初始支撑集进行筛选获得预选支撑集,再采用贝叶斯组检验(Bayesian Group Testing, BGT)方式得到信号重构所需的最终支撑集,可在提高支撑集的估计精度的同时,缩短检验时间. 理论分析和仿真结果表明,所提算法不但能够适用于求解任意稀疏结构的 MMV 问题,而且具有重构精度高、速度快以及对噪声有一定的鲁棒性等优势.

2 任意稀疏结构的 MMV 信号模型

为便于研究,本文首先对信号进行建模,MMV 统一模型可表示如下:

$$\mathbf{Y} = \Phi \mathbf{X} + \mathbf{E} \quad (1)$$

其中 $\mathbf{Y} = [y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(D)}]$ 为多量测向量, $\mathbf{X} = [x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(D)}]$ 为待重构的多稀疏向量. 实际上式(1)是由 D 个 SMV 模型构成,即:

$$\mathbf{y}^{(d)} = \Phi \mathbf{x}^{(d)} + \mathbf{e}^{(d)}, d = 1, \dots, D \quad (2)$$

其中 $\mathbf{y}^{(d)}$ 为第 d 列单量测向量, D 为量测向量的总列数; $\Phi \in C^{M \times N}$ 为量测矩阵, $M < N$, $\mathbf{x}^{(d)} \in C^N$ 为待重构的第 d 列稀疏向量, $\mathbf{e}^{(d)}$ 为噪声序列.

在实际应用场景中,由于信号的稀疏结构具有时变性,一般 MMV 模型的联合稀疏性假设只针对少量量测向量有效. 为更加符合实际应用,本文假设 MMV 模型具有任意稀疏结构,其任意性含义包括两个方面:一是稀疏向量的支撑集可随时间随机变化;二是对于同一个稀疏信号不同支撑集的稀疏值,假设其幅度服从伯努利高斯模型(Bernoulli Gaussian, BG),图 1 给出了传统和任意稀疏结构的 MMV 模型示意图.

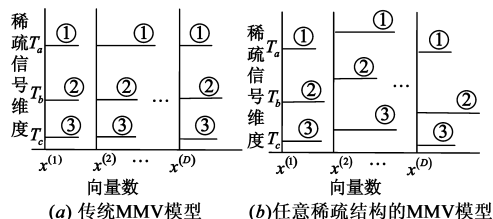


图1 不同MMV模型示意图

图 1 假设信号具有①、②、③三个稀疏点,其初始支撑集位置分别为 T_a 、 T_b 、 T_c . 传统的 MMV 模型对稀疏点的约束是其支撑集位置不随时间发生变化,但对稀疏点的幅度不加约束,如图 1(a)所示,但是在实际应用中一般是无法保证信号的支撑集是长时间不发生变化的,因而传统 MMV 一般设定 $D \ll M^{[7]}$;从图 1(b)中可以看出,具有任意稀疏结构的 MMV 模型放松对稀疏点支撑集的约束,可任意变化,因而也就放松了对向量个数 D 的约束,其可以为可求解范围内的任意维度. 下面以某一列 $x^{(d)}$ 为例,对其服从的 BG 模型进行介绍,为下文的贝叶斯组检验做铺垫.

伯努利模型是指 $x^{(d)}$ 中信号分量取非零值的概率服从伯努利分布,若第 i 号元素 $x^{(d)}(i)$ 取零值概率为 p ,那么相应的取非零概率为 $1 - p$,由稀疏性驱动可知 $p > 0.5$. 高斯模型的概念是指非零值的取值服从高斯分布 $r_i \sim N(0, \sigma_r^2)$,那么 BG 模型即为 $x^{(d)}(i) = q_i r_i, r_i \sim N(0, \sigma_r^2)$,其中当 $x^{(d)}(i) \neq 0$ 时, $q_i = 1$,否则 $q_i = 0$. BG 模型矩阵形式为:

$$\mathbf{x}^{(d)} = \mathbf{Q}\mathbf{r}, \mathbf{Q} = \text{diag}(\mathbf{q}) \quad (3)$$

在对信号取非零值的概率和大小约束之后,下一步就是对其支撑集约束. 为体现随机性,这里假设信号的支撑集在不同列向量间是随机变化的. 令 $\text{Sup}^{(d)}, d = 1, 2, \dots, D$ 为不同列向量的支撑集,用 $\text{Rsd}^{(d)}, d = 1, 2, \dots, D$ 表示每列大小为 N 的随机数,则支撑集需满足:

$$\text{Sup}^{(d)} = \text{Rsd}^{(d)}(1; K), d = 1, 2, \dots, D \quad (4)$$

其中 K 为信号的稀疏度. 至此完成了具有任意稀疏结构的 MMV 模型构建,下面针对此信号模型进行重构算法介绍.

3 MMVFR 算法

具有任意稀疏结构的 MMV 信号模型并行重构的难点在于目前大部分 SR 算法都需要对每一列向量进行特定的参数设置,无法在统一框架下进行整体重构. 研究时发现 SLO^[15]算法重构时无须收敛到最优,只需保证收敛到最优值附近,这就为多向量的并行解决提供了一种思路:该算法可以在统一的参数条件下并行重构,并获取初始支撑集. 下面首先详细分析具有任意稀疏结构的 MMV 快速重构算法.

3.1 MMV 快速稀疏重构算法

首先对 SLO 算法进行简单介绍,为快速算法的构建奠定基础. CS 理论指出,当感知矩阵 Φ 满足约束等距性(Restricted Isometry Property, RIP)条件时,信号可以通过求解一个欠定方程从量测值中精确地重构,即

$$\min \|\mathbf{x}^{(d)}\|_0, \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{y}^{(d)} = \Phi \mathbf{x}^{(d)} + \mathbf{e}^{(d)} \quad (5)$$

制约零-范数最小化问题的根源在于矢量的零-范数不是连续函数,无法利用常规的最优化算法. SLO 算法的求解思路是用高斯函数对零-范数进行平滑近似^[15],令: $f_\lambda(\mathbf{x}^{(d)}) = e^{-1/\lambda \|\mathbf{x}^{(d)}\|_0^2}$, 那么 $\mathbf{x}^{(d)}$ 的零-范数与 $f_\lambda(\mathbf{x}^{(d)})$ 关系为:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} F_\lambda(\mathbf{x}^{(d)}) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N f_\lambda(\mathbf{x}^{(d)}(i)) = N - \|\mathbf{x}^{(d)}\|_0 \quad (6)$$

最大化式(6)的目标函数是连续可导函数,可以用最速下降法求解. 这样一个 NP 难的问题(5)就可以转换为求解式(6)得到. 其中参数 λ 控制着算法精度与最优值的寻找,在 SLO 算法中采用变 λ 值的思想.

快速算法的设计思路是:在初始化算法时,选择 λ 值足够大,以保证 $F_\lambda(\mathbf{x}^{(d)})$ 避开局部极大值点的限制而落入最大值的区间,但是此处无须收敛到 $F_\lambda(\mathbf{x})$ 的最优值,只需保证在最优值的区间即可通过降低 λ 值的值进行下一次循环. 基于此思想,为利用 SLO 算法求解 MMV 问题,取 $I = \lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ 为 λ 的调整区间, $\mathbf{S}_0 = \Phi^H (\Phi \Phi^H)^{-1} \mathbf{Y}$ 为初始的稀疏向量估计值,令 $\lambda_{\max} = \max$

$[\max(\mathbf{S}_0)]$, 即可保证 MMV 中每一列所对应的目标函数都可以在初始估计时落入最优值区间,对 $F_\lambda(\mathbf{x}^{(d)})$ 的最大化采用最速下降法进行,快速算法核心主要包括:梯度计算、最速下降以及可行域投影三个步骤,三种算子分别如下所示:

$$\Delta = \mathbf{S} \odot \exp(-\mathbf{S}^2/(2\lambda^2)) \quad (7)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{S} - \mu \times \Delta \quad (8)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{S} - \Phi^+ (\Phi \mathbf{S} - \mathbf{Y}) \quad (9)$$

其中 μ 为梯度下降步长. 经过有限次迭代即可实现多向量重构. 得到矩阵重构结果 $\hat{\mathbf{X}}$ 后,由于噪声的影响, $\hat{\mathbf{X}}$ 中不可避免的会存在噪声重构点,为提高算法在噪声条件下的重构精度,一种有效的思路就是建立基于噪声估计条件下的支撑集检验门限,依此进行冗余重构支撑集剔除,下面进行具体分析.

3.2 贝叶斯组检验方法

本文采用贝叶斯组检验的思想,对重构结果 $\hat{\mathbf{X}}$ 进行分组检验,以提高支撑集的估计精度. 具体分析如下:

首先对重构结果 $\hat{\mathbf{X}}$ 进行支撑集预选以减少计算量. 文献[16]通过理论分析给出了信号稀疏度满足 RIP 性质的 3K 条件,本文在对信号的支撑集进行预选时,采用 $K_0 = M/3$ 的准则,以保证信号的真实支撑集完全落入到预选集中,令 Supp 为预选支撑集,其满足:

$$\text{Supp} = \{j | \text{abs}(\hat{\mathbf{X}}) > \text{Thr}\} \quad (10)$$

Thr 为保证 $\hat{\mathbf{X}}_i, i = 1, \dots, D$ 每一列包含 K_0 个最大信号值的门限,用 $\hat{\mathbf{X}}$ 表示经过支撑集预选后的信号. 下一步就是采取贝叶斯组检验的方式来剔出 Supp 中的冗余分量.

为实现复数条件下的支撑集剔除,首先将式(1)对应的复数模型进行转换,变为实数模型:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \text{Re}(\mathbf{Y}) \\ \text{Im}(\mathbf{Y}) \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \text{Re}(\Phi) - \text{Im}(\Phi) \\ \text{Im}(\Phi) \text{Re}(\Phi) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z} = [\text{Re}(\hat{\mathbf{X}}) \quad \text{Im}(\hat{\mathbf{X}})]^T, \mathbf{E}_1 = [\text{Re}(\mathbf{E}) \quad \text{Im}(\mathbf{E})]^T \quad (11)$$

经过等效转换后,复数模型(1)可转换为:

$$\mathbf{B} = \mathbf{AZ} + \mathbf{E}_1 \quad (12)$$

之所以能使用此方法成功地实现复信号的贝叶斯检验,是因为通常复信号的实部和虚部具有相同的稀疏特性(即稀疏度相同,稀疏点的位置相同),因此在恢复成复信号时,需注意针对同一个稀疏点,其实部和虚部相差 N ,这样就可以准确重构出复信号. 下面以单一向量的支撑集检验为例说明问题.

文献[14]给出了实数域条件下的支撑集贝叶斯检验门限以及相关的参数估计方法,推导出参数 p 、信号非零值方差 σ_r^2 、噪声方差 σ_e^2 的估计值分别为:

$$\hat{p} = (N' - \|\mathbf{q}\|_0)/N' \quad (13)$$

$$\hat{\sigma}_r^2 = \| \mathbf{Qr} \|_2 / \| \mathbf{q} \|_0 \quad (14)$$

$$\hat{\sigma}_e^2 = \| \mathbf{B}^{(d)} - \mathbf{AQR} \|_2 / M' \quad (15)$$

其中 $N' = 2N$, $M' = 2M$. 对参数 p 、 σ_r^2 而言, 这里的处理思路是假设其服从均匀分布, 通过最大似然估计得到; 意味着对于参数 p 和 σ_r^2 的先验信息是无法掌握的. 这样的设置是符合实际的, 以雷达探测目标为例, 我们事先无法预知目标出现的概率以及目标回波的幅度方差大小.

为剔除预选支撑集中所含的冗余下标, 根据贝叶斯假设检验模型构造似然比函数:

$$\gamma(Z^{(d)}(i)) = \frac{p(Z^{(d)}(i) | H_1)}{p(Z^{(d)}(i) | H_0)} = \eta \quad (16)$$

当似然比函数 $\gamma(Z^{(d)}(i))$ 大于检测门限 η 时, 假设 H_1 成立, 则保留第 i 号元素的支撑集; 反之 H_0 成立, 剔除第 i 号元素的支撑集. 直接利用检验公式结论有:

$$MZ_j > Th_j \quad (17)$$

Th_j 为检验门限, 计算公式为^[14]:

$$Th_j = \frac{2\sigma_{\gamma_j}^2 e_{ij}}{d_{ij}} \ln \left(\frac{p}{1 - p\sqrt{\frac{e_{ij}}{\sigma_{\gamma_j}^2}}} \right) \quad (18)$$

其中 $d_{ij} = \langle A_j, A_j \rangle^2 \hat{\sigma}_r^2$, $e_{ij} = d_{ij} + \hat{\sigma}_{ij}^2$, $\hat{\sigma}_{ij}^2$ 为估计误差的方差, 为:

$$\hat{\sigma}_{ij}^2 = \sum_{i \neq j} \langle A_i, A_j \rangle^2 \hat{\sigma}_{ex}^2 + \langle A_j, A_j \rangle \hat{\sigma}_e^2 \quad (19)$$

MZ 为似然函数, 其计算公式为:

$$MZ_j = (\mathbf{Z}^T \mathbf{G} - \mathbf{A}^T \mathbf{G} \odot \mathbf{Z} - \text{diag}(\mathbf{G}^T \mathbf{G}) \odot \mathbf{Z})^2 \quad (20)$$

其中 \mathbf{G} 为从感知矩阵抽取的子矩阵. \odot 为 Hadamard 积.

得到单元元素的判决门限之后, 将算法拓展为组的形式, 即重构时, 将 D 重向量的每一行划为一组, 每次循环计算一组的检验门限, 最后进行一次矩阵形式的判决即可完成所有支撑集的检验.

MMVFR 算法实现流程为算法 1 所示.

算法 1 MMVFR 算法

输入: Φ, \mathbf{Y}

初始化: $\mathbf{S} = \Phi^+ \mathbf{Y}$, $\Phi^+ = \Phi^H (\Phi \Phi^H)^{-1}$, 内循环次数 L , $\lambda = \lambda_{\max}$, 梯度下降步长 μ

第一步: 初始重构

判断 $\lambda > \lambda_{\min}$ 是否成立, 若成立则结束初始重构, 否则执行如下循环:

内循环 L 次

利用式(7)、(8)、(9)分别进行梯度、最速下降以及可行域投影三个步骤.

结束内循环

递减 λ , 直到初始重构结束

第二步: 利用式(10)进行支撑集预选得到预选支撑集 Supp , 及预选后

的信号 $\hat{\mathbf{X}}$

第三步: 进行贝叶斯组检验

对 (a)、(b) 内循环 K_0 次:

(a) 选择支撑集的第 i 组, 令 $j = \text{Supp}(i, :)$, 并获得抽取矩阵 $\mathbf{G} = \mathbf{A}(:, j)$.

(b) 利用式(13)、(14)、(15)计算参数 \hat{p} 、 $\hat{\sigma}_r^2$ 、 $\hat{\sigma}_e^2$; 利用式(18)、(20)计算检测门限 Th_i 及似然函数 MZ_i ;

(c) 内循环结束, 得到总的检验门限 TH 以及 MZ , 进行矩阵贝叶斯判决 $OUT = MZ > TH$;

输出: 最终支撑集为 $\text{Finaset} = OUT \odot \text{Supp}$, 多稀疏向量最终估计为

$\hat{\mathbf{X}}_{\text{Finaset}} = \mathbf{B}_{\text{Finaset}}^+ \mathbf{Z}$, 转换为复数形式即可得到最终结果 $\mathbf{Re} _ \mathbf{X}$.

4 MMVFR 算法性能分析

4.1 参数估计性能

MMVFR 算法具有抗噪性能的原因在于进行支撑集贝叶斯检验时, 对噪声方差进行估计, 并将其纳入到最终的支撑集门限当中, 使得门限的设定具备良好的抗噪性能, 下面分析噪声方差估计量的性质. 由于 $\hat{\sigma}_e^2$ 是在量测值 $\mathbf{B}^{(d)}$ 和均值已知条件下对噪声方差的最大似然计, 重点考察其以下两个性质:

(1) 无偏性

由 $\hat{\sigma}_e^2 = \frac{\| \mathbf{B}^{(d)} - \mathbf{AQR} \|_2^2}{M}$ 可知,

$$\begin{aligned} E[\hat{\sigma}_e^2] &= E \left[\frac{\| \mathbf{B}^{(d)} - \mathbf{AQR} \|_2^2}{M} \right] \\ &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M E[(\mathbf{B}^{(d)} - \mathbf{AQR})^2] \\ &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M E[(\mathbf{B}^{(d)} - \mu)^2] = \sigma_e^2 \end{aligned}$$

因此, $\hat{\sigma}_e^2$ 是噪声方差的无偏估计量.

(2) 有效性

对 $p(\mathbf{B}^{(d)} | \sigma_e^2, \mathbf{Q}, \mathbf{r})$ 取对数后求偏导, 有:

$$\begin{aligned} \ln p(\mathbf{B}^{(d)} | \sigma_e^2, \mathbf{Q}, \mathbf{r}) &= -\frac{M}{2} \cdot \frac{1}{2\pi\sigma_e^2} \cdot 2\pi - \frac{\| \mathbf{B}^{(d)} - \mathbf{AQR} \|_2^2}{2\sigma_e^2} \\ &= -\frac{M}{2\sigma_e^4} \left[\sigma_e^2 - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (\mathbf{B}^{(d)} - \mathbf{AQR})^2 \right] \\ &= k(\sigma_e^2 - \hat{\sigma}_e^2) \end{aligned}$$

式中, $k = -M/2\sigma_e^4$, 可见 σ_e^2 是无偏、有效估计量, 所以对 σ_e^2 的估计是最小均方误差无偏估计量, 其克拉美罗界为 $2\sigma_e^4/M$. 由于门限中噪声水平估计的引入, 算法具有抗噪性能.

4.2 支撑集检验性能分析

信号重构过程中由于噪声的影响, 使得重构模型将少量噪声作为信号进行重构. 目前大部分算法没有考虑对这一部分虚假重构的噪声信号进行剔除, 因此

本文利用贝叶斯方法进行支撑集检验,下面进行支撑集检验的性能分析.

本文在文献[14]基础上改进的贝叶斯组检验算法本质上仍然是一种高斯二元检测模型,因此其检测性能完全由偏移系数确定^[17].通过计算检验的偏移系数即可判定对每一个支撑集的检测性能,偏移系数公式为:

$$d = \frac{[E(l|H_1) - E(l|H_0)]^2}{\text{Var}(l|H_0)} \quad (21)$$

式中, $l = MZ_i - TH_i$ 为检验统计量, $E(l|H_1) = r_j \|A_j\|^2$, $E(l|H_0) = 0$, 将 $\text{Var}(l|H_0) = \sigma_{yj}^2 = \sigma_{ex}^2 \sum_{i \neq j} \langle A_i, A_j \rangle + \sigma_e^2 \|A_j\|^2$ 代入得到:

$$d = \frac{[E(l|H_1) - E(l|H_0)]^2}{\text{Var}(l|H_0)} = \frac{r_j^2 \|A_j\|^2}{\sigma_{yj}^2} = \frac{r_j^2 \|A_j\|^2}{\sigma_{ex}^2 \sum_{i \neq j} \langle A_i, A_j \rangle + \sigma_e^2 \|A_j\|^2} \propto \frac{r_j^2}{\sigma_e^2} \quad (22)$$

可见检测器性能与信噪比有关,信噪比越大检测性能越好,支撑集的有效剔除程度越高.

4.3 计算复杂度分析

下面通过计算量分析来说明本文算法的快速性.以一次乘法或者是加法的运算量为一个单位运算量.为说明本算法的计算量优势,将逐列运行重构的算法分别命名为 SMV-SLO 和 SMV-OMP,分别计算 MMVFR、MSLO、SMV-SLO、SMV-OMP 四种方法的复杂度.

首先计算 MMVFR 的计算量.将 MMVFR 算法分成两部分分别计算,即支撑集初始重构部分和贝叶斯组检验部分.支撑集初始重构部分中,MSLO 算法计算量是主体,由算法一流程可以看出其计算量主要集中于式(7~9)三步以及初始的一次求伪逆运算中,第 k 次迭代时式(7)、(8)、(9)计算量为: $4DMN + (M+N)D$, 初始伪逆计算量为: $O[(2M^2N + M^3) + DN(2M-1)]$, 故经过 I 次迭代后 MSLO 算法总的计算量约为: $O(MNDI + M^3)$. 贝叶斯组检验的计算量为: $O[M(2MD + 2MND + ND + D)/3]$, 忽略影响不大的步骤,总的计算量约为:

$$O(MNDI + M^3 + M^2ND) \quad (23)$$

其次,若使用 SMV-SLO 算法逐列求解 MMV,则计算出运行一次 SLO 算法的计算量之后,其 D 倍即为总的计算量,约为:

$$O(MNDI + D(M^3 + M^2N)) \quad (24)$$

最后若使用 OMP 算法,其计算量主要集中于求逆运算,那么 SMV-OMP 逐列求解 MMV 模型的计算量约为:

$$O(M^2ND + DM^3) \quad (25)$$

对比 MMVFR、MSLO、SMV-SLO 和 SMVOMP 四种算法的计算复杂度可知,本文算法在计算量方面确实有很

大的提高,其主要原因在于通过多向量的并行处理,避免了矩阵的循环求逆,只需一次矩阵求逆的运算就可以获得最终的重构结果.而基于 SMV 模型的算法则需要多次的矩阵冗余和求逆计算,造成了大量的计算浪费.

5 仿真与实验

5.1 仿真验证

仿真 1 信号稀疏结构随机变化条件下不同算法重构精度与速度对比

仿真参数设置如下:信号模型为任意稀疏结构的 MMV 模型,量测矩阵为高斯矩阵.测量值 $M = 100$, 信号维度 $N = 200$, 稀疏度 $K = 15$. 向量数为 2~38, 步长为 4. 信噪比为 15dB. 仿真对比 SLO、OMP、MSLO 与 MMVFR 算法的重构精度与重构速度,结果如图 1、图 2 所示.

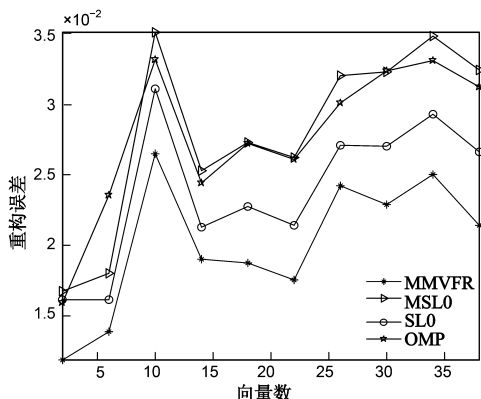


图1 不同算法重构误差对比

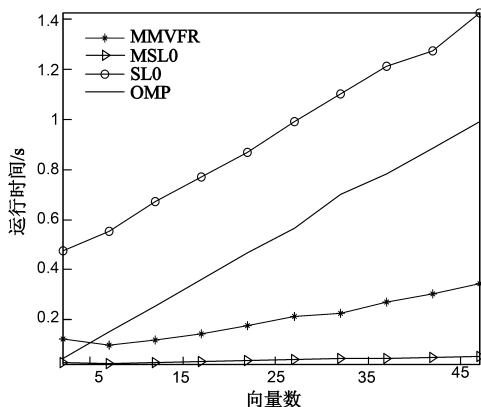


图2 不同算法重构速度对比

从图 1 可以看出,MMVFR 算法由于采用了支撑集的贝叶斯检验,剔除了虚假的重构支撑集,所以相比其他重构算法而言精度最高;不同向量数时重构精度不同正是由于信号模型的任意性引起的,与理论符合.从图 2 不同算法运行时间的对比可以看出,随着向量数目的增加,每种算法的运行时间都会相应增加,但是基于

SMV 模型的 SL0 和 OMP 算法需要对多量测向量逐列处理,所需的运行时间最长,且随着向量数目的增加迅速上升;而 MMVFR 和 MSL0 算法采用矩阵形式的处理方法,只需运行一次就可以得到所有的重构结果,因而运行时间明显减少. MMVFR 算法运算时间略高于 MSL0 算法是由于贝叶斯组检验时耗费了一定时间. 从图 1、2 中可以看出,本文算法在重构精度和运算速度上都具有很大的优势.

仿真 2 不同信噪比条件下算法重构精度对比

为考察噪声对算法精度的影响,定义输入信噪比为

$$SNR_{in} = E \left[20 \log \left[\left(\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M |Y_m|^2 \right) / \sigma^2 \right] \right] \quad (26)$$

其中, σ^2 为高斯噪声方差. 输入信噪比为所有量测的输入信噪比均值. 仿真时取输入信噪比为 4 ~ 20dB, 分别取向量为 1 和 10 时不同算法的重构精度对比, 其他条件与仿真一相同, 仿真结果如图 3、图 4 所示.

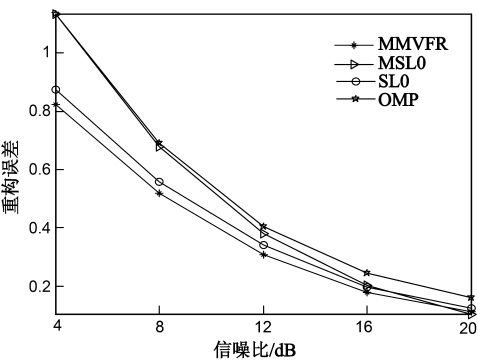


图3 D=1时重构误差对比

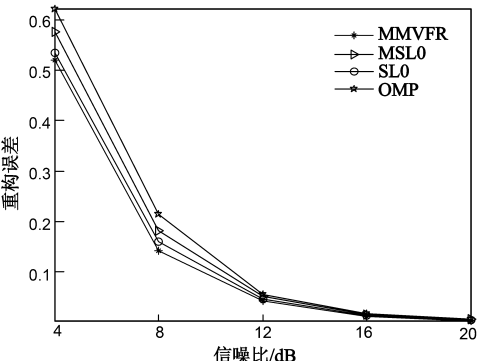


图4 D=10时重构误差对比

从图 3、图 4 中可以看出,随着信噪比的提高,各类算法的重构误差呈现递减趋势. 从总体趋势看,OMP 算法受噪声影响最大,其次是 MSL0 算法,然后是 SL0 算法,MMVFR 算法受噪声影响最小. 说明 MMVFR 算法在经过支撑集剔除步骤之后,用于重构的支撑集数目最少,且近似等于信号的真实稀疏度,而其他算法在重构时都是主观估计的稀疏度,往往比真实值要大很多,造

成重构的支撑集中冗余过多,影响了算法的重构的精度.

仿真 3 不同算法用于 ISAR 成像效果对比

为了验证本文所提算法的优势,将算法用于 ISAR 成像,对比不同算法的成像质量和成像效率. 仿真时采用 34 点飞机模型,发射信号为 LFM 信号,其时宽为 $10\mu s$,带宽为 400MHz,载频为 10GHz,采样率为 400MHz,飞机为匀速飞行,速度为 300m/s,目标飞机散射模型如图 5 所示.

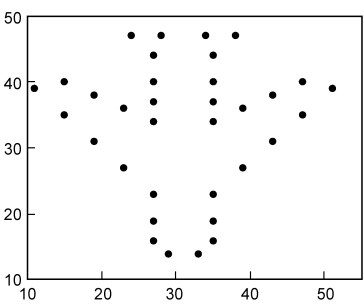


图5 目标模型

回波脉冲个数取 256,量测值个数为 $M = 128$,距离单元数对应多重向量的向量数,这里取 $D = 141 > M$,信噪比为 20dB. 采用运行时间和图像熵值对比不同算法的成像效果,结果如图 6 和表 2 所示.

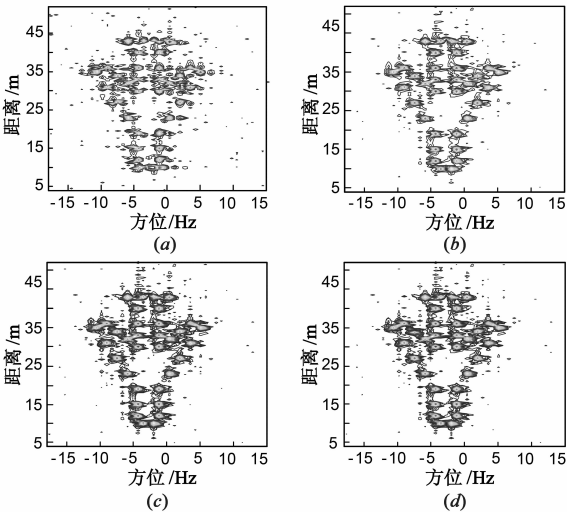


图6 (a)、(b)、(c)、(d)分别为SMV-OMP、SMV-SL0、MSL0、MMVFR算法得到的ISAR成像结果

表 2 不同算法的运行时间和图像熵值

算法	运算时间/s	图像熵值
MMVFR	3.5828	5.5428
MSL0	2.2178	6.1150
SMV-SL0	24.8600	6.0125
SMV-OMP	10.1868	6.3467

从图 6 和表 2 的对比可以看出,由于本文算法采用了统一参数框架下并行重构的思路,运算时间远低于 SMV-OMP、SMV-SL0 算法,与 MSLO 算法运行时间相当;同时由于本文算法对支撑集的贝叶斯检验,与其他算法相比具有最好的成像效果.仿真验证了本文算法的重构速度与重构精度的优势.

5.2 实测数据验证

采用实测数据,相关的雷达参数如下:雷达为边扫描边跟踪、宽窄带结合的脉冲体制雷达,发射信号为 LFM 信号,信号带宽为 100MHz,工作频段为 S 波段,目标距雷达 121km,实际信噪比约为 20dB.不同算法得到的成像结果如图 7 和表 3 所示.

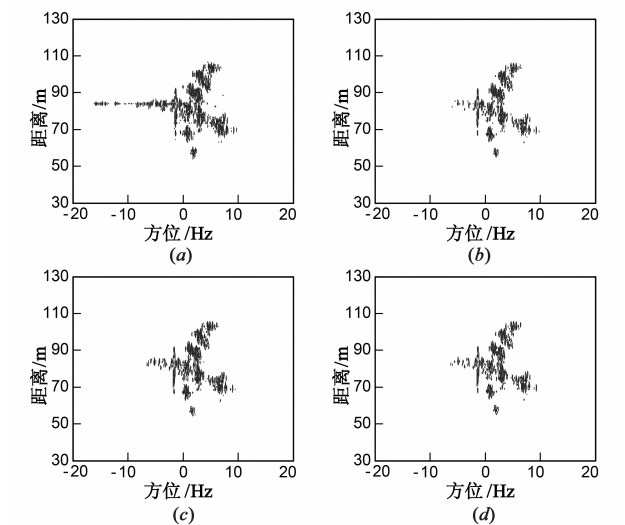


图7 (a)、(b)、(c)、(d)分别为实测数据条件下SMV-OMP、SMV-SL0、MSLO、MMVFR算法得到的ISAR成像结果

表 3 不同算法的运行时间和图像熵值

算法	运算时间/s	图像熵值
MMVFR	200.8696	2.89871
MSLO	155.0767	3.0562
SMV-SL0	2386.7	3.0143
SMV-OMP	285.8428	3.4659

从图 7 与表 3 的对比中可以看出,在机翼、机尾、机头位置,本文算法具有比其他三种算法更高的方位分辨率,拥有更精细的散射点信息,因此成像效果最好.从运行时间的对比来看,本文算法由于采用了贝叶斯检验,因而运算时间有一定程度的增加,但是远低于基于 SMV 的算法,实测数据处理结果也验证了本文所提算法的高效性.

6 结论

本文针对目前的稀疏重构算法求解 MMV 时将 MMV 分为多个 SMV,造成计算复杂度高以及任意稀疏

结构的 MMV 重构困难等问题,提出 MMVFR 重构算法.该算法充分利用 MSLO 算法的高效性以及贝叶斯组检验对冗余支撑集的剔除能力,不但实现了任意稀疏结构 MMV 问题的高效重构,而且保证了算法的重构精度,并对噪声具有一定的鲁棒性,最后将算法用于 ISAR 成像验证了所提算法的有效性.实现量测值个数的自适应估计将是下一步的研究重点.

参考文献

[1] Y Z Jin, B D Rao. Support recovery of sparse signals in the presence of multiple measurement vectors[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2013, 59(5): 3139 – 3157.

[2] Z S He, A Cichocki, R Zdunek, et al. Improved FOCUS method with conjugate gradient iterations[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2009, 57(1): 399 – 404.

[3] Z B Xu, X Y Chang, F M Xu, et al. L1/2 regularization: a thresholding representation theory and a fast solver[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2012, 23(7): 1013 – 1027.

[4] D L Donoho. Compressed sensing[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4): 1289 – 1306.

[5] E J Candès, J Romberg, T Tao. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(2): 489 – 509.

[6] G Gui, A Mehdodniya, Q Wan, F Adachi. Sparse signal recovery with OMP algorithm using sensing measurement matrix[J]. IEICE Electronics Express, 2011, 8(5): 285 – 290.

[7] S F Cotter, B D Rao, K Engan, K Kreutz-Delgado. Sparse solutions to linear inverse problems with multiple measurement vectors[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2005, 53(7): 2477 – 2488.

[8] 李少东, 杨军, 马晓岩. 基于压缩感知的 ISAR 高分辨成像算法[J]. 通信学报, 2013, 34(9): 150 – 157.

Li Shao-dong, Yang Jun, Ma Xiao-yan. High resolution ISAR imaging algorithm based on compressive sensing[J]. Journal on Communications, 2013, 34(9): 150 – 157 (in Chinese).

[9] 王伟伟, 廖桂生, 张磊, 等. 一种基于压缩感知的稀疏孔径 SAR 成像方法[J]. 电子学报, 2012, 40(12): 2487 – 2494.

Wang wei-wei, Liao Gui-sheng, Zhang Lei, et al. An imaging method based on compressive sensing for sparse aperture of SAR[J]. Acta Electronica Sinica, 2012, 40(12): 2487 – 2494. (in Chinese)

[10] J Chen, X M Huo. Theoretical results on sparse representations of multiple-measurement vectors[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54(12): 4634 – 4643.

[11] Y C Eldar, H Rauhut. Average case analysis of multichannel sparse recovery using convex relaxation[J]. IEEE Transactions

on Information Theory, 2010, 56(1): 505 – 519.

- [12] 王法松, 张林让, 周宇. 压缩感知的多重测量向量模型与算法分析[J]. 信号处理, 2012, 28(6): 785 – 792.
Wang Fa-song, Zhang Lin-rang, Zhou Yu. Multiple measurement vectors for compressed sensing: model and algorithms analysis[J]. Signal Processing, 2012, 28(6): 785 – 792. (in Chinese)
- [13] 李少东, 杨军, 胡国旗. 一种改进的压缩感知信号重构算法[J]. 信号处理, 2012, 28(5): 743 – 749.
Li Shao-dong, Yang Jun, Hu Guo-qi. A modified signal reconstruction algorithm via compressive sensing[J]. Signal Processing, 2012, 28(5): 743 – 749. (in Chinese)
- [14] 甘伟, 许录平, 苏哲, 等. 基于贝叶斯假设检验的压缩感知重构[J]. 电子与信息学报, 2011, 33(11): 2640 – 2646.
Gan Wei, Xu Lu-ping, Su Zhe, et al. Bayesian hypothesis testing based recovery for compressed sensing[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2011, 33(11): 2640 – 2646. (in Chinese)
- [15] G H Mohimani, M B Zadeh, C Jutten. A fast approach for over-complete sparse decomposition based on smoothed L0 norm[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2009, 57(1): 289 – 301.
- [16] D Wei, O Milenkovic. Subspace pursuit for compressive sensing signal reconstruction[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2009, 55(5): 2230 – 2249.
- [17] 赵树杰, 赵建勋. 信号检测与估计理论[M]. 北京: 清华大学出版社, 2009. 66 – 148.

作者简介



李少东 男, 1987 年出生于河北保定. 空军预警学院博士生. 主要研究方向为压缩感知在 ISAR 中的应用、雷达成像.
E-mail: liying198798@126.com



陈文峰 男, 1989 年出生于新疆伊犁. 空军预警学院硕士生. 主要研究方向为雷达成像、压缩感知.
E-mail: chenwf925@163.com

杨军 男, 1973 年出生于云南大理. 空军预警学院副教授、硕士生导师. 主要研究方向为雷达系统、雷达信号处理与检测理、SAR/ISAR 成像等.

马晓岩 男, 1962 年出生于湖北赤壁. 空军预警学院教授、博士生导师, 主要研究方向为雷达系统、雷达信号处理与检测理、现代信号处理及其应用.