

无源定位观测方程的两类伪线性化方法及渐近最优闭式解

王 鼎¹, 张瑞杰², 吴 瑛¹

(1. 解放军信息工程大学信息工程学院, 河南郑州 450000; 2. 解放军信息工程大学四院, 河南郑州 450000)

摘 要: 为避免无源定位中的迭代运算, 该文针对两类特殊的无源定位(非线性)观测方程, 分别提出将其进行伪线性化处理, 从而实现目标位置闭式解算的理论分析框架. 首先, 在不限定具体物理观测量的前提下, 归纳总结出两类将非线性观测方程转化为伪线性观测方程的数学模型, 并推导出用于目标定位的加权线性最小二乘闭式解. 接着, 利用一阶误差分析方法定量分析两类闭式解的理论定位方差, 并证明其参数估计性能均能够达到相应的克拉美罗界(在门限效应发生前), 从而证明闭式解的渐近最优性. 最后, 文中以 AOA/TOA 联合定位和 AOA/TDOA/FDOA 联合定位为算例, 分别阐述两类伪线性化无源定位方法的具体应用, 并通过仿真实验验证文中理论分析的有效性.

关键词: 无源定位; 伪线性方程; 最优闭式解; 理论框架; 克拉美罗界

中图分类号: TN911.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2015)04-0722-08

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.3969/j.issn.0372-2112.2015.04.014

Two Pseudo-Linearization Processing Methods and the Asymptotically Optimal Closed-Form Solutions for Passive Location

WANG Ding¹, ZHANG Rui-jie², WU Ying¹

(1. Institute of Information Systems Engineering, Information Engineering University of PLA, Zhengzhou, Henan 450000, China;

2. The Fourth Institute of Information Engineering University of PLA, Zhengzhou, Henan 450000, China)

Abstract: In order to avoid the iterative computations in passive location, two theoretical analysis frameworks used to solve two kinds of location equations are presented via converting the nonlinear measurement equations into the pseudo-linear equalities. First, two kinds of mathematical model for the pseudo-linearization of two nonlinear measurement equations are formulated, which are not limited to specific physical measurements, and then the corresponding weighted linear least squares (WLS) solutions are derived. Subsequently, the theoretical estimation variances of the two analytical solutions are derived through first-order perturbation analysis methodology, and their theoretical location performances are proved to be able to attain the corresponding Cramér-Rao bound (CRB) before the threshold effect occurs and, hence, the asymptotical optimality of the two pseudo-linearization location methods are verified. Finally, the AOA/TOA location and AOA/TDOA/FDOA location are taken as examples to describe the application of the two pseudo-linearization location methods, and the simulation experiments are conducted to corroborate the effectiveness of the theoretical analysis in this paper.

Key words: passive location; pseudo-linear equation; optimal closed-form solution; theoretical framework; Cramér-Rao bound (CRB)

1 引言

无源定位是通过观测站接收来自目标的无线电信号, 并从信号中挖掘出用于定位的观测量. 最典型的观测量包括: 接收信号强度 (Received Signal Strength, RSS)^[1], 到达时间 (Time of Arrival, TOA)^[2], 到达时间差

(Time Difference of Arrival, TDOA)^[3~7], 到达角度 (Angle of Arrival, AOA)^[8,9], 到达频率差 (Frequency Difference of Arrival, FDOA)^[10~16]等. 根据上述观测信息均能够建立关于目标位置或速度与观测站位置或速度之间的(非线性)方程, 再通过优化求解该方程即可获得关于目标位置或速度的参数信息.

近些年来,基于上述观测量的目标定位算法已相继提出,其中包括 Taylor 级数迭代算法^[8,13]、总体最小二乘(Total Least Squares, TLS)算法^[12]、约束加权最小二乘(Constrained Weighted Least Squares, CWLS)算法^[17]、约束总体最小二乘(Constrained Total Least Squares, CTLS)算法^[7,14]、结构总体最小二乘(Structured Total Least Squares, STLS)算法^[9]、基于凸优化的定位算法^[5,16]等.然而,上述算法大都需要迭代运算,这除了带来较复杂的运算量外,还会出现迭代发散和局部收敛等问题.为避免迭代运算,相关学者提出一系列著名闭式算法^[1~4,6,10,11,15],这些算法均能够直接给出目标位置或速度的闭式公式.最具代表性的算法是文献[3]提出的基于 TDOA 的两步加权线性最小二乘定位算法(学界称为 Chan 氏算法).基于 Chan 氏算法思想,文献[1,2,4,6,10,11,15]分别提出基于 RSS、基于 TOA、联合 TDOA/FDOA 的两步解算公式.

值得一提的是,文献[1~4,6,10,11,15]中定位闭式解的推导及其理论性能分析都是针对某些特定观测方程所进行,因此缺乏系统性的理论框架.事实上,这些定位算法背后都可用统一的理论框架来描述和分析,从而便于推广于更多的定位场景.笔者通过研究现有无源定位系统中的观测方程,总结归纳出两类将非线性观测方程转化为伪线性方程的代数处理模式:第一类是直接将原定位方程通过等价代数变换得到与之具有相同维数的线性方程,并且两种方程的未知参量保持不变(即单步定位模式);第二类虽然无法直接转化为线性方程,但通过引入中间辅助变量可获得关于新参量的线性方程,根据新参量与原参量之间的闭式关系即可确定第二个线性方程(即两步定位模式).

针对上述两类伪线性化处理模型,该文在不限定具体观测量的前提下,分别推导出用于目标定位的加权线性最小二乘闭式解,随后利用一阶误差分析方法定量推导其理论估计方差,并证明两类伪线性化处理方法的定位性能均能够达到克拉美罗界(Cramér-Rao Bound, CRB)(在门限效应发生前,即观测噪声方差大于阈值而使一阶误差分析方法失效前),从而定量证明闭式解的渐近最优性.最后,本文以两个算例分别阐述两类伪线性化无源定位方法的具体应用.

2 无源定位观测方程及最小方差估计器

假设通过某些测量方式可获得关于目标位置状态的时域、空域或频域参量,于是可建立如下观测模型

$$\mathbf{z} = \mathbf{f}(\mathbf{s}) + \mathbf{n} \quad (1)$$

式中 $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^{p \times 1}$ 表示观测向量, $\mathbf{s} \in \mathbf{R}^{q \times 1}$ ($q \leq p$) 为目标位置状态向量, $\mathbf{f}(\cdot)$ 表示某非线性观测方程(这里不限制特定观测量), $\mathbf{n} \in \mathbf{R}^{p \times 1}$ 为加性观测噪声,假设它服从零

均值高斯分布,协方差矩阵为 $\text{cov}(\mathbf{n}) = \mathbf{E}[\mathbf{n}\mathbf{n}^T]$.

无源定位问题就是根据观测向量 \mathbf{z} 估计目标位置状态向量 \mathbf{s} ,一种可获得渐近最优性能的估计器为

$$\hat{\mathbf{s}}_{\text{opt}} = \arg \min_{\mathbf{s} \in \mathbf{R}^{q \times 1}} (\mathbf{z} - \mathbf{f}(\mathbf{s}))^T \text{cov}^{-1}(\mathbf{n}) (\mathbf{z} - \mathbf{f}(\mathbf{s})) \quad (2)$$

上述估计器的估计方差矩阵等于 CRB,即有

$$\text{cov}(\hat{\mathbf{s}}_{\text{opt}}) = (\mathbf{F}^T(\mathbf{s}) \text{cov}^{-1}(\mathbf{n}) \mathbf{F}(\mathbf{s}))^{-1} = \text{CRB}(\mathbf{s}) \quad (3)$$

式中 $\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{s}^T}$ 表示函数向量 $\mathbf{f}(\mathbf{s})$ 的 Jacobi 矩阵.

3 两类观测方程的伪线性化及渐近最优闭式解

3.1 第一类伪线性化处理及其渐近最优闭式解

3.1.1 第一类伪线性化处理过程及其加权线性最小二乘闭式解

定义 $\mathbf{z}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{s})$,对于某些定位模型可将该非线性等式转化为如下等价的并具有相同维数的伪线性等式

$$\mathbf{a}(\mathbf{z}_0) = \mathbf{B}(\mathbf{z}_0) \mathbf{s} \quad (4)$$

其中 $\mathbf{a}(\mathbf{z}_0) \in \mathbf{R}^{p \times 1}$ 和 $\mathbf{B}(\mathbf{z}_0) \in \mathbf{R}^{p \times q}$ 分别为关于 \mathbf{z}_0 的向量和矩阵函数.在实际计算中,函数 $\mathbf{a}(\cdot)$ 和 $\mathbf{B}(\cdot)$ 的形式都已知,但 \mathbf{z}_0 不可获知,只能用 \mathbf{z} 代替.显然,若用 \mathbf{z} 直接代替 \mathbf{z}_0 ,式(4)已无法成立,会产生如下误差向量

$$\mathbf{e} = \mathbf{a}(\mathbf{z}) - \mathbf{B}(\mathbf{z}) \mathbf{s} \quad (5)$$

为合理估计 \mathbf{s} ,需分析误差向量 \mathbf{e} 的统计特性,根据一阶 Taylor 级数展开可得

$$\mathbf{e} \approx (\mathbf{A}(\mathbf{z}_0) - [\dot{\mathbf{B}}_1(\mathbf{z}_0) \mathbf{s} \quad \dot{\mathbf{B}}_2(\mathbf{z}_0) \mathbf{s} \quad \cdots \quad \dot{\mathbf{B}}_p(\mathbf{z}_0) \mathbf{s}]) \mathbf{n} = \mathbf{E}(\mathbf{s}, \mathbf{z}_0) \mathbf{n} \quad (6)$$

式中 $\dot{\mathbf{B}}_k(\mathbf{z}_0) = \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{z}_0)}{\partial \langle \mathbf{z}_0 \rangle_k}$ 和 $\mathbf{A}(\mathbf{z}_0) = \frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{z}_0)}{\partial \mathbf{z}_0^T}$,而且

$$\mathbf{E}(\mathbf{s}, \mathbf{z}_0) = \mathbf{A}(\mathbf{z}_0) - [\dot{\mathbf{B}}_1(\mathbf{z}_0) \mathbf{s} \quad \dot{\mathbf{B}}_2(\mathbf{z}_0) \mathbf{s} \quad \cdots \quad \dot{\mathbf{B}}_p(\mathbf{z}_0) \mathbf{s}] \quad (7)$$

根据式(6)可知 \mathbf{e} 服从零均值高斯分布,其协方差阵为

$$\text{cov}(\mathbf{e}) = \mathbf{E}(\mathbf{s}, \mathbf{z}_0) \text{cov}(\mathbf{n}) \mathbf{E}^T(\mathbf{s}, \mathbf{z}_0) \quad (8)$$

联合式(5)和式(8)可得到加权线性最小二乘闭式解

$$\hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}} = (\mathbf{B}^T(\mathbf{z}) \text{cov}^{-1}(\mathbf{e}) \mathbf{B}(\mathbf{z}))^{-1} \mathbf{B}^T(\mathbf{z}) \text{cov}^{-1}(\mathbf{e}) \mathbf{a}(\mathbf{z}) \quad (9)$$

需要指出, $\text{cov}(\mathbf{e})$ 表达式中 \mathbf{z}_0 和 \mathbf{s} 均无法获知,其中 \mathbf{z}_0 只能用 \mathbf{z} 来代替,而 \mathbf{s} 可用任意渐近无偏估计值 $\hat{\mathbf{s}}_{\text{ue}}$ (通过非加权线性最小二乘估计获得)来代替,它满足 $\lim_{\text{cov}(\mathbf{n}) \rightarrow 0} \hat{\mathbf{s}}_{\text{ue}} = \mathbf{s}$.此时 $\text{cov}(\mathbf{e})$ 用 $\hat{\text{cov}}(\mathbf{e})$ 来表示,于是有

$$\hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}} = (\mathbf{B}^T(\mathbf{z}) \hat{\text{cov}}^{-1}(\mathbf{e}) \mathbf{B}(\mathbf{z}))^{-1} \mathbf{B}^T(\mathbf{z}) \hat{\text{cov}}^{-1}(\mathbf{e}) \mathbf{a}(\mathbf{z}) \quad (10)$$

下节的理论分析表明式(10)是无偏估计并具有渐近最优性,即其具有最小的估计方差.

3.1.2 加权线性最小二乘闭式解的渐近最优性分析

本小节将推导 $\hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}}$ 的理论性能.根据式(10)可知

$$\begin{aligned}
& \mathbf{B}^T(\mathbf{z}) \hat{\mathbf{a}} \mathbf{v}^{-1}(\mathbf{e}) \mathbf{B}(\mathbf{z}) \hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}} = \mathbf{B}^T(\mathbf{z}) \hat{\mathbf{a}} \mathbf{v}^{-1}(\mathbf{e}) \mathbf{a}(\mathbf{z}) \\
& \Rightarrow \left(\begin{aligned} & \mathbf{B}^T(\mathbf{z}_0) \mathbf{cov}^{-1}(\mathbf{e}) \mathbf{B}(\mathbf{z}_0) + \delta \mathbf{B}^T(\mathbf{z}_0) \mathbf{cov}^{-1}(\mathbf{e}) \mathbf{B}(\mathbf{z}_0) \\ & + \mathbf{B}^T(\mathbf{z}_0) \delta \mathbf{cov}^{-1}(\mathbf{e}) \mathbf{B}(\mathbf{z}_0) + \mathbf{B}^T(\mathbf{z}_0) \mathbf{cov}^{-1}(\mathbf{e}) \delta \mathbf{B}(\mathbf{z}_0) \end{aligned} \right) \\
& \times (\mathbf{s} + \delta \mathbf{s}_{\text{wls}}) \approx \mathbf{B}^T(\mathbf{z}_0) \mathbf{cov}^{-1}(\mathbf{e}) \mathbf{a}(\mathbf{z}_0) + \delta \mathbf{B}^T(\mathbf{z}_0) \mathbf{cov}^{-1}(\mathbf{e}) \mathbf{a}(\mathbf{z}_0) \\
& + \mathbf{B}^T(\mathbf{z}_0) \delta \mathbf{cov}^{-1}(\mathbf{e}) \mathbf{a}(\mathbf{z}_0) + \mathbf{B}^T(\mathbf{z}_0) \mathbf{cov}^{-1}(\mathbf{e}) \delta \mathbf{a}(\mathbf{z}_0) \\
& \Rightarrow \mathbf{B}^T(\mathbf{z}_0) \mathbf{cov}^{-1}(\mathbf{e}) \mathbf{B}(\mathbf{z}_0) \delta \mathbf{s}_{\text{wls}} \approx \mathbf{B}^T(\mathbf{z}_0) \mathbf{cov}^{-1}(\mathbf{e}) \mathbf{e}
\end{aligned} \quad (11)$$

式中

$$\begin{cases} \delta \mathbf{B}(\mathbf{z}_0) = \mathbf{B}(\mathbf{z}) - \mathbf{B}(\mathbf{z}_0), \delta \mathbf{a}(\mathbf{z}_0) = \mathbf{a}(\mathbf{z}) - \mathbf{a}(\mathbf{z}_0) \\ \delta \mathbf{s}_{\text{wls}} = \hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}} - \mathbf{s}, \delta \mathbf{cov}^{-1}(\mathbf{e}) = \hat{\mathbf{cov}}^{-1}(\mathbf{e}) - \mathbf{cov}^{-1}(\mathbf{e}) \end{cases} \quad (12)$$

于是有

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}}) = \mathbf{s} + \mathbf{E}[\delta \mathbf{s}_{\text{wls}}] = \mathbf{s} \\ \mathbf{cov}(\hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}}) = (\mathbf{B}^T(\mathbf{z}_0) \mathbf{cov}^{-1}(\mathbf{e}) \mathbf{B}(\mathbf{z}_0))^{-1} \end{cases} \quad (13)$$

式(13)中第一式表明 $\hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}}$ 是 \mathbf{s} 的无偏估计, 而由第二式可证明 $\hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}}$ 是 \mathbf{s} 的渐近最优估计, 具体可见如下命题.

命题 1 $\mathbf{cov}(\hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}}) = \mathbf{CRB}(\mathbf{s})$.

证明 将等式 $\mathbf{z}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{s})$ 代入式(4)可得

$$\mathbf{a}(\mathbf{f}(\mathbf{s})) = \mathbf{B}(\mathbf{f}(\mathbf{s})) \mathbf{s} \quad (14)$$

计算式(14)两边 Jacobi 矩阵可得

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{z}_0) \mathbf{F}(\mathbf{s}) &= [\dot{\mathbf{B}}_1(\mathbf{z}_0) \mathbf{s} \quad \dot{\mathbf{B}}_2(\mathbf{z}_0) \mathbf{s} \quad \cdots \quad \dot{\mathbf{B}}_p(\mathbf{z}_0) \mathbf{s}] \mathbf{F}(\mathbf{s}) \\
&+ \mathbf{B}(\mathbf{z}_0) \Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{s}, \mathbf{z}_0) \mathbf{F}(\mathbf{s}) = \mathbf{B}(\mathbf{z}_0)
\end{aligned} \quad (15)$$

将式(8)和式(15)代入式(13)中可得

$$\begin{aligned}
\mathbf{cov}(\hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}}) &= (\mathbf{F}^T(\mathbf{s}) \mathbf{E}^T(\mathbf{s}, \mathbf{z}_0) \mathbf{cov}^{-1}(\mathbf{e}) \mathbf{E}(\mathbf{s}, \mathbf{z}_0) \mathbf{F}(\mathbf{s}))^{-1} \\
&= (\mathbf{F}^T(\mathbf{s}) \mathbf{cov}^{-1}(\mathbf{n}) \mathbf{F}(\mathbf{s}))^{-1}
\end{aligned} \quad (16)$$

又由式(3)可知 $\mathbf{cov}(\hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}}) = \mathbf{CRB}(\mathbf{S})$, 即命题得证.

3.2 第二类伪线性化处理及其渐近最优闭式解

3.2.1 第二类伪线性化处理过程及其两步加权线性最小二乘闭式解

定义无观测误差条件的观测量 $\mathbf{z}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{s})$, 对于某些定位模型可将该非线性等式转化为如下伪线性等式

$$\bar{\mathbf{a}}(\mathbf{z}_0) = \bar{\mathbf{B}}(\mathbf{z}_0) \mathbf{h}(\mathbf{s}) = \bar{\mathbf{B}}(\mathbf{z}_0) \bar{\mathbf{s}} \quad (17)$$

式中 $\bar{\mathbf{a}}(\mathbf{z}_0) \in \mathbf{R}^{p \times 1}$ 和 $\bar{\mathbf{B}}(\mathbf{z}_0) \in \mathbf{R}^{p \times q}$ ($p \geq q > 0$) 分别为关于 \mathbf{z}_0 的向量和矩阵函数, $\bar{\mathbf{s}} = \mathbf{h}(\mathbf{s}) \in \mathbf{R}^{q \times 1}$ 是关于 \mathbf{s} 的非线性向量函数. 虽然式(17)并不是关于 \mathbf{s} 的线性方程, 但却是关于 $\bar{\mathbf{s}}$ 的线性方程, 因此第一步可先求解 $\bar{\mathbf{s}}$, 再利用 $\bar{\mathbf{s}}$ 和 \mathbf{s} 之间的闭式关系估计 \mathbf{s} .

类似于式(4)的求解过程, 这里同样用 \mathbf{z} 代替式(17)中的 \mathbf{z}_0 , 并定义误差向量

$$\bar{\mathbf{e}} = \bar{\mathbf{a}}(\mathbf{z}) - \bar{\mathbf{B}}(\mathbf{z}) \bar{\mathbf{s}} \quad (18)$$

为了合理估计 $\bar{\mathbf{s}}$, 需要分析误差向量 $\bar{\mathbf{e}}$ 的统计特性, 根据一阶 Taylor 级数展开可得

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{e}} &\approx (\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{z}_0) - [\dot{\bar{\mathbf{B}}}_1(\mathbf{z}_0) \bar{\mathbf{s}} \quad \dot{\bar{\mathbf{B}}}_2(\mathbf{z}_0) \bar{\mathbf{s}} \quad \cdots \quad \dot{\bar{\mathbf{B}}}_p(\mathbf{z}_0) \bar{\mathbf{s}}]) \mathbf{n} \\
&= \bar{\mathbf{E}}(\bar{\mathbf{s}}, \mathbf{z}_0) \mathbf{n}
\end{aligned} \quad (19)$$

式中 $\dot{\bar{\mathbf{B}}}_k(\mathbf{z}_0) = \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}(\mathbf{z}_0)}{\partial \langle \mathbf{z}_0 \rangle_k}$ 和 $\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{z}_0) = \frac{\partial \bar{\mathbf{a}}(\mathbf{z}_0)}{\partial \mathbf{z}_0^T}$, 而且

$$\bar{\mathbf{E}}(\bar{\mathbf{s}}, \mathbf{z}_0) = \bar{\mathbf{A}}(\mathbf{z}_0) - [\dot{\bar{\mathbf{B}}}_1(\mathbf{z}_0) \bar{\mathbf{s}} \quad \dot{\bar{\mathbf{B}}}_2(\mathbf{z}_0) \bar{\mathbf{s}} \quad \cdots \quad \dot{\bar{\mathbf{B}}}_p(\mathbf{z}_0) \bar{\mathbf{s}}] \quad (20)$$

根据式(19)可知 $\bar{\mathbf{e}}$ 服从零均值高斯分布, 其协方差矩阵为

$$\mathbf{cov}(\bar{\mathbf{e}}) = \bar{\mathbf{E}}(\bar{\mathbf{s}}, \mathbf{z}_0) \mathbf{cov}(\mathbf{n}) \bar{\mathbf{E}}^T(\bar{\mathbf{s}}, \mathbf{z}_0) \quad (21)$$

联合式(18)和式(21)建立如下加权线性最小二乘模型

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}} &= \arg \min_{\bar{\mathbf{s}} \in \mathbf{R}^{q \times 1}} (\bar{\mathbf{a}}(\mathbf{z}) - \bar{\mathbf{B}}(\mathbf{z}) \bar{\mathbf{s}})^T \mathbf{cov}^{-1}(\bar{\mathbf{e}}) (\bar{\mathbf{a}}(\mathbf{z}) - \bar{\mathbf{B}}(\mathbf{z}) \bar{\mathbf{s}}) \\
&= (\bar{\mathbf{B}}^T(\mathbf{z}) \mathbf{cov}^{-1}(\bar{\mathbf{e}}) \bar{\mathbf{B}}(\mathbf{z}))^{-1} \bar{\mathbf{B}}^T(\mathbf{z}) \mathbf{cov}^{-1}(\bar{\mathbf{e}}) \bar{\mathbf{a}}(\mathbf{z})
\end{aligned} \quad (22)$$

类似地, $\mathbf{cov}(\bar{\mathbf{e}})$ 表达式中的 \mathbf{z}_0 和 $\bar{\mathbf{s}}$ 均无法获知, 其中 \mathbf{z}_0

只能用 \mathbf{z} 来代替, 而 $\bar{\mathbf{s}}$ 可用其任意无偏估计值 $\hat{\mathbf{s}}_{\text{ue}}$ (通过非加权线性最小二乘估计获得) 来代替, 它满足 $\lim_{\mathbf{cov}(\mathbf{n}) \rightarrow 0} \hat{\mathbf{s}}_{\text{ue}} = \bar{\mathbf{s}}$. 此时 $\mathbf{cov}(\bar{\mathbf{e}})$ 用 $\hat{\mathbf{cov}}(\bar{\mathbf{e}})$ 来表示, 于是有

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}} &= (\bar{\mathbf{B}}^T(\mathbf{z}) \hat{\mathbf{cov}}^{-1}(\bar{\mathbf{e}}) \bar{\mathbf{B}}(\mathbf{z}))^{-1} \bar{\mathbf{B}}^T(\mathbf{z}) \hat{\mathbf{cov}}^{-1}(\bar{\mathbf{e}}) \bar{\mathbf{a}}(\mathbf{z}) \\
&= \bar{\mathbf{s}}
\end{aligned} \quad (23)$$

类似于第 3.1.2 小节中的理论分析可知 $\hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}}$ 是 $\bar{\mathbf{s}}$ 的无偏估计, 其协方差矩阵为

$$\mathbf{cov}(\hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}}) = (\bar{\mathbf{B}}^T(\mathbf{z}_0) \mathbf{cov}^{-1}(\bar{\mathbf{e}}) \bar{\mathbf{B}}(\mathbf{z}_0))^{-1} \quad (24)$$

下面考虑从 $\hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}}$ 中估计 \mathbf{s} . 显然, 若直接根据 $\bar{\mathbf{s}}$ 和 \mathbf{s} 之间的非线性关系 $\bar{\mathbf{s}} = \mathbf{h}(\mathbf{s})$ 求解 \mathbf{s} , 需要求解非线性优化问题, 此时需要迭代运算. 幸运的是, 对于某些定位模型, $\bar{\mathbf{s}}$ 和 \mathbf{s} 之间还满足如下等价关系

$$\mathbf{t}(\bar{\mathbf{s}}) = \mathbf{Q}(\bar{\mathbf{s}}) \mathbf{g}(\mathbf{s}) = \mathbf{Q}(\bar{\mathbf{s}}) \bar{\mathbf{s}} \quad (25)$$

式中 $\mathbf{t}(\bar{\mathbf{s}}) \in \mathbf{R}^{q \times 1}$ 和 $\mathbf{Q}(\bar{\mathbf{s}}) \in \mathbf{R}^{q \times q}$ 分别为关于 $\bar{\mathbf{s}}$ 的向量和矩阵函数, $\bar{\mathbf{s}} = \mathbf{g}(\mathbf{s}) \in \mathbf{R}^{q \times 1}$ 是关于 \mathbf{s} 的非线性向量函数. 函数 $\mathbf{g}(\cdot)$ 与 $\mathbf{h}(\cdot)$ 的不同处在于, $\mathbf{g}(\cdot)$ 的反函数 $\mathbf{g}^{-1}(\cdot)$ 的形式可直接获得, 于是利用 $\bar{\mathbf{s}}$ 可直接估计出 $\mathbf{s} = \mathbf{g}^{-1}(\bar{\mathbf{s}})$.

下面基于式(25)估计 $\bar{\mathbf{s}}$, 类似于式(4)和式(17)的求解过程, 这里需要利用估计向量 $\hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}}$ 代替式(25)中的 $\bar{\mathbf{s}}$, 并定义新的误差向量

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{t}(\hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}}) - \mathbf{Q}(\hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}}) \bar{\mathbf{s}} \quad (26)$$

类似地, 为了合理估计 $\bar{\mathbf{s}}$, 需要分析误差向量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的统计特性, 根据一阶 Taylor 级数展开可得

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon} &\approx (\mathbf{T}(\bar{\mathbf{s}}) - [\dot{\mathbf{Q}}_1(\bar{\mathbf{s}}) \bar{\mathbf{s}} \quad \dot{\mathbf{Q}}_2(\bar{\mathbf{s}}) \bar{\mathbf{s}} \quad \cdots \quad \dot{\mathbf{Q}}_q(\bar{\mathbf{s}}) \bar{\mathbf{s}}]) \delta \bar{\mathbf{s}}_{\text{wls}} \\
&= \boldsymbol{\Phi}(\bar{\mathbf{s}}, \bar{\mathbf{s}}) \delta \bar{\mathbf{s}}_{\text{wls}}
\end{aligned} \quad (27)$$

式中 $\delta \bar{\mathbf{s}}_{\text{wls}} = \hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}} - \bar{\mathbf{s}}$ 表示 $\hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}}$ 的估计误差, $\dot{\mathbf{Q}}_k(\bar{\mathbf{s}}) = \frac{\partial \mathbf{Q}(\bar{\mathbf{s}})}{\partial \langle \bar{\mathbf{s}} \rangle_k}$

和 $\mathbf{T}(\bar{\mathbf{s}}) = \frac{\partial \mathbf{t}(\bar{\mathbf{s}})}{\partial \bar{\mathbf{s}}^T}$, 而且

$$\boldsymbol{\Phi}(\bar{\mathbf{s}}, \bar{\mathbf{s}}) = \mathbf{T}(\bar{\mathbf{s}}) - [\dot{\mathbf{Q}}_1(\bar{\mathbf{s}}) \bar{\mathbf{s}} \quad \dot{\mathbf{Q}}_2(\bar{\mathbf{s}}) \bar{\mathbf{s}} \quad \cdots \quad \dot{\mathbf{Q}}_q(\bar{\mathbf{s}}) \bar{\mathbf{s}}] \quad (28)$$

根据式(27)可知向量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 服从零均值高斯分布,其协方差矩阵为

$$\text{cov}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\Phi}(\bar{\mathbf{s}}, \bar{\mathbf{s}}) \text{cov}(\hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}}) \boldsymbol{\Phi}^T(\bar{\mathbf{s}}, \bar{\mathbf{s}}) \quad (29)$$

联合式(26)和式(29)可得的加权线性最小二乘闭式解

$$\hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}} = (\mathbf{Q}^T(\hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}}) \text{cov}^{-1}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{Q}(\hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}}))^{-1} \mathbf{Q}^T(\hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}}) \text{cov}^{-1}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{t}(\hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}}) \quad (30)$$

$\text{cov}(\boldsymbol{\varepsilon})$ 表达式中 $\bar{\mathbf{s}}$ 和 $\bar{\mathbf{s}}$ 均无法获知,其中 $\bar{\mathbf{s}}$ 只能用向量 $\hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}}$ 来代替,而 $\bar{\mathbf{s}}$ 用任意无偏估计值 $\hat{\mathbf{s}}_{\text{ue}}$ (通过非加权线性最小二乘估计获得)来代替,它满足 $\lim_{\text{cov}(\mathbf{n}) \rightarrow 0} \hat{\mathbf{s}}_{\text{ue}} = \bar{\mathbf{s}}$. 此时 $\text{cov}(\boldsymbol{\varepsilon})$ 不妨用 $\hat{\text{cov}}(\boldsymbol{\varepsilon})$ 来表示,于是有

$$\hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}} = (\mathbf{Q}^T(\hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}}) \hat{\text{cov}}^{-1}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{Q}(\hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}}))^{-1} \mathbf{Q}^T(\hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}}) \hat{\text{cov}}^{-1}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{t}(\hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}}) \quad (31)$$

类似于第 3.1.2 小节中的理论分析可知 $\hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}}$ 是 $\bar{\mathbf{s}}$ 的无偏估计,其协方差矩阵为

$$\text{cov}(\hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}}) = (\mathbf{Q}^T(\bar{\mathbf{s}}) \text{cov}^{-1}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{Q}(\bar{\mathbf{s}}))^{-1} \quad (32)$$

最后,目标位置状态向量 \mathbf{s} 的估计值为

$$\hat{\mathbf{s}}_{\text{ts-wls}} = \mathbf{g}^{-1}(\hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}}) \quad (33)$$

并且其协方差矩阵为

$$\text{cov}(\hat{\mathbf{s}}_{\text{ts-wls}}) = \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{s}) \text{cov}(\hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}}) \mathbf{G}^{-T}(\mathbf{s}) \quad (34)$$

式中 $\mathbf{G}(\mathbf{s}) = \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{s}^T}$.

3.2.2 加权线性最小二乘闭式解的渐近最优性分析

命题 2 $\text{cov}(\hat{\mathbf{s}}_{\text{ts-wls}}) = (\mathbf{H}^T(\mathbf{s}) \text{cov}^{-1}(\hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}}) \mathbf{H}(\mathbf{s}))^{-1}$, 式中 $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{s}^T}$.

证明 首先将式(32)代入式(34)中可得

$$\text{cov}(\hat{\mathbf{s}}_{\text{ts-wls}}) = (\mathbf{G}^T(\mathbf{s}) \mathbf{Q}^T(\bar{\mathbf{s}}) \text{cov}^{-1}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{Q}(\bar{\mathbf{s}}) \mathbf{G}(\mathbf{s}))^{-1} \quad (35)$$

再将式(29)代入式(35)可得

$$\text{cov}(\hat{\mathbf{s}}_{\text{ts-wls}}) = \left(\mathbf{G}^T(\mathbf{s}) \mathbf{Q}^T(\bar{\mathbf{s}}) \boldsymbol{\Phi}^{-T}(\bar{\mathbf{s}}, \bar{\mathbf{s}}) \text{cov}^{-1}(\hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}}) \right)^{-1} \times \boldsymbol{\Phi}^{-1}(\bar{\mathbf{s}}, \bar{\mathbf{s}}) \mathbf{Q}(\bar{\mathbf{s}}) \mathbf{G}(\mathbf{s}) \quad (36)$$

另一方面,将等式 $\bar{\mathbf{s}} = \mathbf{h}(\mathbf{s})$ 代入式(25)中可得

$$\mathbf{t}(\mathbf{h}(\mathbf{s})) = \mathbf{Q}(\mathbf{h}(\mathbf{s})) \mathbf{g}(\mathbf{s}) = \mathbf{Q}(\mathbf{h}(\mathbf{s})) \bar{\mathbf{s}} \quad (37)$$

计算式(37)两边的 Jacobi 矩阵可得

$$\mathbf{T}(\bar{\mathbf{s}}) \mathbf{H}(\mathbf{s}) = [\dot{\mathbf{Q}}_1(\bar{\mathbf{s}}) \bar{\mathbf{s}} \quad \dot{\mathbf{Q}}_2(\bar{\mathbf{s}}) \bar{\mathbf{s}} \quad \cdots \quad \dot{\mathbf{Q}}_q(\bar{\mathbf{s}}) \bar{\mathbf{s}}] \mathbf{H}(\mathbf{s}) + \mathbf{Q}(\bar{\mathbf{s}}) \mathbf{G}(\mathbf{s}) \Rightarrow \mathbf{H}(\mathbf{s}) = \boldsymbol{\Phi}^{-1}(\bar{\mathbf{s}}, \bar{\mathbf{s}}) \mathbf{Q}(\bar{\mathbf{s}}) \mathbf{G}(\mathbf{s}) \quad (38)$$

将式(38)代入式(36)中可得

$$\text{cov}(\hat{\mathbf{s}}_{\text{ts-wls}}) = (\mathbf{H}^T(\mathbf{s}) \text{cov}^{-1}(\hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}}) \mathbf{H}(\mathbf{s}))^{-1} \quad (39)$$

基于命题 2 可得到如下结论.

命题 3 $\text{cov}(\hat{\mathbf{s}}_{\text{ts-wls}}) = \text{CRB}(\mathbf{s})$.

证明 首先将式(24)代入式(39)可得

$$\text{cov}(\hat{\mathbf{s}}_{\text{ts-wls}}) = (\mathbf{H}^T(\mathbf{s}) \bar{\mathbf{B}}^T(\mathbf{z}_0) \text{cov}^{-1}(\bar{\mathbf{e}}) \bar{\mathbf{B}}(\mathbf{z}_0) \mathbf{H}(\mathbf{s}))^{-1} \quad (40)$$

再将式(21)代入式(40)可得

$$\text{cov}(\hat{\mathbf{s}}_{\text{ts-wls}}) = \left(\mathbf{H}^T(\mathbf{s}) \bar{\mathbf{B}}^T(\mathbf{z}_0) \bar{\mathbf{E}}^{-T}(\bar{\mathbf{s}}, \mathbf{z}_0) \text{cov}^{-1}(\mathbf{n}) \right)^{-1} \times \bar{\mathbf{E}}^{-1}(\bar{\mathbf{s}}, \mathbf{z}_0) \bar{\mathbf{B}}(\mathbf{z}_0) \mathbf{H}(\mathbf{s}) \quad (41)$$

另一方面,将等式 $\mathbf{z}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{s})$ 代入式(17)可得

$$\bar{\mathbf{a}}(\mathbf{f}(\mathbf{s})) = \bar{\mathbf{B}}(\mathbf{f}(\mathbf{s})) \mathbf{h}(\mathbf{s}) \quad (42)$$

计算式(42)两边的 Jacobi 矩阵可得

$$\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{z}_0) \mathbf{F}(\mathbf{s}) = [\dot{\bar{\mathbf{B}}}_1(\mathbf{z}_0) \bar{\mathbf{s}} \quad \dot{\bar{\mathbf{B}}}_2(\mathbf{z}_0) \bar{\mathbf{s}} \quad \cdots \quad \dot{\bar{\mathbf{B}}}_p(\mathbf{z}_0) \bar{\mathbf{s}}] \mathbf{F}(\mathbf{s}) + \bar{\mathbf{B}}(\mathbf{z}_0) \mathbf{H}(\mathbf{s}) \Rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{s}) = \bar{\mathbf{E}}^{-1}(\bar{\mathbf{s}}, \mathbf{z}_0) \bar{\mathbf{B}}(\mathbf{z}_0) \mathbf{H}(\mathbf{s}) \quad (43)$$

式(43)代入式(41)可得

$$\text{cov}(\hat{\mathbf{s}}_{\text{ts-wls}}) = (\mathbf{F}^T(\mathbf{s}) \text{cov}^{-1}(\mathbf{n}) \mathbf{F}(\mathbf{s}))^{-1} \quad (44)$$

又由式(3)可知 $\text{cov}(\hat{\mathbf{s}}_{\text{ts-wls}}) = \text{CRB}(\mathbf{s})$, 即命题得证.

4 两种无源定位算例及其渐近最优闭式解

4.1 基于第一类伪线性化处理的无源定位算例

考虑基于 AOA/TOA 的联合定位场景. 假设目标位置向量为 $\mathbf{s} = [u_t \ v_t \ w_t]^T$, 现有 M 个观测站用于定位, 第 m 个观测站位置向量为 $\mathbf{s}_{r,m} = [u_{r,m} \ v_{r,m} \ w_{r,m}]^T$, 现利用 AOA/TOA 进行联合定位, 相应的定位方程为

$$\begin{cases} \theta_m = \arctan \frac{v_t - v_{r,m}}{u_t - u_{r,m}} \\ \beta_m = \arctan \frac{w_t - w_{r,m}}{\sqrt{(u_t - u_{r,m})^2 + (v_t - v_{r,m})^2}} \\ t_m = \frac{1}{c} \sqrt{(u_t - u_{r,m})^2 + (v_t - v_{r,m})^2 + (w_t - w_{r,m})^2} \end{cases} \quad (45)$$

式中 θ_m, β_m 和 t_m 分别表示目标到第 m 个观测站的方位角, 仰角和时间, c 表示光速. 定义无误差的观测向量为 $\mathbf{z}_0 = [\boldsymbol{\theta}^T \ \boldsymbol{\beta}^T \ \mathbf{t}^T]^T$, 其中 $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \cdots \ \theta_M]^T$, $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_M]^T$ 和 $\mathbf{t} = [t_1 \ t_2 \ \cdots \ t_M]^T$.

根据 AOA/TOA 的定位方程特性可以得到如下等价的“伪线性”定位方程

$$\mathbf{a}(\mathbf{z}_0) = \mathbf{B}(\mathbf{z}_0) \mathbf{s} \quad (46)$$

式中

$$\begin{cases} \mathbf{a}(\mathbf{z}_0) = [\mathbf{a}_\theta^T(\mathbf{z}_0) \quad \mathbf{a}_\beta^T(\mathbf{z}_0) \quad \mathbf{a}_t^T(\mathbf{z}_0)]^T \\ \mathbf{B}(\mathbf{z}_0) = [\mathbf{B}_\theta^T(\mathbf{z}_0) \quad \mathbf{B}_\beta^T(\mathbf{z}_0) \quad \mathbf{B}_t^T(\mathbf{z}_0)]^T \end{cases} \quad (47)$$

其中

$$\begin{cases} \mathbf{a}_\theta(\mathbf{z}_0) = \begin{bmatrix} u_{r,1}\sin\theta_1 - v_{r,1}\cos\theta_1 \\ \vdots \\ u_{r,M}\sin\theta_M - v_{r,M}\cos\theta_M \end{bmatrix} \\ \mathbf{a}_\beta(\mathbf{z}_0) = \begin{bmatrix} (u_{r,1}\cos\theta_1 + v_{r,1}\sin\theta_1)\sin\beta_1 - w_{r,1}\cos\beta_1 \\ \vdots \\ (u_{r,M}\cos\theta_M + v_{r,M}\sin\theta_M)\sin\beta_M - w_{r,M}\cos\beta_M \end{bmatrix} \\ \mathbf{a}_t(\mathbf{z}_0) = \begin{bmatrix} (u_{r,1}\cos\theta_1 + v_{r,1}\sin\theta_1)\cos\beta_1 + w_{r,1}\sin\beta_1 + ct_1 \\ \vdots \\ (u_{r,M}\cos\theta_M + v_{r,M}\sin\theta_M)\cos\beta_M + w_{r,M}\sin\beta_M + ct_M \end{bmatrix} \end{cases} \quad (48)$$

$$\begin{cases} \mathbf{B}_\theta(\mathbf{z}_0) = \begin{bmatrix} \sin\theta_1 & -\cos\theta_1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sin\theta_M & -\cos\theta_M & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_\beta(\mathbf{z}_0) = \begin{bmatrix} \cos\theta_1\sin\beta_1 & \sin\theta_1\sin\beta_1 & -\cos\beta_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos\theta_M\sin\beta_M & \sin\theta_M\sin\beta_M & -\cos\beta_M \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_t(\mathbf{z}_0) = \begin{bmatrix} \cos\theta_1\cos\beta_1 & \sin\theta_1\cos\beta_1 & \sin\beta_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos\theta_M\cos\beta_M & \sin\theta_M\cos\beta_M & \sin\beta_M \end{bmatrix} \end{cases} \quad (49)$$

在获得伪线性观测方程(46)的基础上,根据第 3.1 小节中的推导可得到如下目标位置解算方法:

步骤 1 计算 $\hat{\mathbf{s}}_{\text{ue}} = (\mathbf{B}^T(\mathbf{z})\mathbf{B}(\mathbf{z}))^{-1}\mathbf{B}^T(\mathbf{z})\mathbf{a}(\mathbf{z})$;

步骤 2 计算 $\hat{\mathbf{cov}}(\mathbf{e}) = \mathbf{E}(\hat{\mathbf{s}}_{\text{ue}}, \mathbf{z}) \mathbf{cov}(\mathbf{n}) \mathbf{E}^T(\hat{\mathbf{s}}_{\text{ue}}, \mathbf{z})$;

步骤 3 计算 $\hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}} = (\mathbf{B}^T(\mathbf{z})\hat{\mathbf{cov}}^{-1}(\mathbf{e})\mathbf{B}(\mathbf{z}))^{-1} \times \mathbf{B}^T(\mathbf{z})\hat{\mathbf{cov}}^{-1}(\mathbf{e})\mathbf{a}(\mathbf{z})$.

4.2 基于第二类伪线性化处理的无源定位算例

考虑基于 AOA/TDOA/FDOA 的联合定位场景.假设目标是运动的,其位置状态向量为 $\mathbf{s} = [\mathbf{s}^{(1)T} \mathbf{s}^{(2)T}]^T$,其中 $\mathbf{s}^{(1)} = [u_t \ v_t \ w_t]^T$ 为目标位置向量, $\mathbf{s}^{(2)} = [\dot{u}_t \ \dot{v}_t \ \dot{w}_t]^T$ 为目标速度向量,现有 M 个观测站用于目标定位,并且第 1 个观测站为主站,第 m 个观测站的位置状态向量为 $\mathbf{s}_{r,m} = [\mathbf{s}_{r,m}^{(1)T} \mathbf{s}_{r,m}^{(2)T}]^T$,其中 $\mathbf{s}_{r,m}^{(1)} = [u_{r,m} \ v_{r,m} \ w_{r,m}]^T$ 表示观测站位置向量, $\mathbf{s}_{r,m}^{(2)} = [\dot{u}_{r,m} \ \dot{v}_{r,m} \ \dot{w}_{r,m}]^T$ 表示观测站速度向量,现利用 AOA/TDOA/FDOA 进行联合定位,相应的定位方程为

$$\begin{cases} \theta_m = \arctan \frac{v_t - v_{r,m}}{u_t - u_{r,m}} \\ \beta_m = \arctan \frac{w_t - w_{r,m}}{\sqrt{(u_t - u_{r,m})^2 + (v_t - v_{r,m})^2}} \\ \Delta t_n = \frac{1}{c} (\|\mathbf{s}^{(1)} - \mathbf{s}_{r,n}^{(1)}\| - \|\mathbf{s}^{(1)} - \mathbf{s}_{r,1}^{(1)}\|) \\ \Delta f_n = \frac{f_0}{c} \left(\frac{(\mathbf{s}^{(2)} - \mathbf{s}_{r,n}^{(2)})^T (\mathbf{s}^{(1)} - \mathbf{s}_{r,n}^{(1)})}{\|\mathbf{s}^{(1)} - \mathbf{s}_{r,n}^{(1)}\|} - \frac{(\mathbf{s}^{(2)} - \mathbf{s}_{r,1}^{(2)})^T (\mathbf{s}^{(1)} - \mathbf{s}_{r,1}^{(1)})}{\|\mathbf{s}^{(1)} - \mathbf{s}_{r,1}^{(1)}\|} \right) \end{cases} \quad (50)$$

式中 θ_m 和 β_m 分别表示目标到第 m 个观测站的方位角

和仰角, Δt_n 和 Δf_n 分别表示目标到第 n 个观测站与第 1 个观测站的时间差和频率差, f_0 表示信号频率.定义无误差条件下的观测向量为 $\mathbf{z}_0 = [\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\beta}^T \Delta \mathbf{t}^T \Delta \mathbf{f}^T]^T$,其中 $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \ \theta_2 \cdots \theta_M]^T$, $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1 \ \beta_2 \cdots \beta_M]^T$, $\Delta \mathbf{t} = [\Delta t_2 \ \Delta t_3 \cdots \Delta t_M]^T$ 和 $\Delta \mathbf{f} = [\Delta f_2 \ \Delta f_3 \cdots \Delta f_M]^T$.

根据 AOA/TDOA/FDOA 的定位方程特性可以得到如下等价的“伪线性”定位方程

$$\bar{\mathbf{a}}(\mathbf{z}_0) = \bar{\mathbf{B}}(\mathbf{z}_0) \mathbf{h}(\mathbf{s}) = \bar{\mathbf{B}}(\mathbf{z}_0) \bar{\mathbf{s}} \quad (51)$$

式中

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{a}}(\mathbf{z}_0) = [\bar{\mathbf{a}}_\theta^T(\mathbf{z}_0) \ \bar{\mathbf{a}}_\beta^T(\mathbf{z}_0) \ \bar{\mathbf{a}}_{\Delta t}^T(\mathbf{z}_0) \ \bar{\mathbf{a}}_{\Delta f}^T(\mathbf{z}_0)]^T \\ \bar{\mathbf{B}}(\mathbf{z}_0) = [\bar{\mathbf{B}}_\theta^T(\mathbf{z}_0) \ \bar{\mathbf{B}}_\beta^T(\mathbf{z}_0) \ \bar{\mathbf{B}}_{\Delta t}^T(\mathbf{z}_0) \ \bar{\mathbf{B}}_{\Delta f}^T(\mathbf{z}_0)]^T \\ \bar{\mathbf{s}} = \mathbf{h}(\mathbf{s}) = [\mathbf{s}^{(1)T} \ \rho^{(1)} \ \mathbf{s}^{(2)T} \ \rho^{(2)}]^T \end{cases} \quad (52)$$

其中

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{a}}_\theta(\mathbf{z}_0) = \begin{bmatrix} u_{r,1}\sin\theta_1 - v_{r,1}\cos\theta_1 \\ \vdots \\ u_{r,M}\sin\theta_M - v_{r,M}\cos\theta_M \end{bmatrix}, \\ \bar{\mathbf{a}}_\beta(\mathbf{z}_0) = \begin{bmatrix} (u_{r,1}\cos\theta_1 + v_{r,1}\sin\theta_1)\sin\beta_1 - w_{r,1}\cos\beta_1 \\ \vdots \\ (u_{r,M}\cos\theta_M + v_{r,M}\sin\theta_M)\sin\beta_M - w_{r,M}\cos\beta_M \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{a}}_{\Delta t}(\mathbf{z}_0) = \begin{bmatrix} c^2\Delta t_2^2 - \|\mathbf{s}_{r,2}^{(1)}\|_2^2 + \|\mathbf{s}_{r,1}^{(1)}\|_2^2 \\ \vdots \\ c^2\Delta t_M^2 - \|\mathbf{s}_{r,M}^{(1)}\|_2^2 + \|\mathbf{s}_{r,1}^{(1)}\|_2^2 \end{bmatrix}, \\ \bar{\mathbf{a}}_{\Delta f}(\mathbf{z}_0) = \begin{bmatrix} 2(c^2\Delta t_2\Delta f_2/f_0 - \mathbf{s}_{r,2}^{(2)T}\mathbf{s}_{r,2}^{(1)} + \mathbf{s}_{r,1}^{(2)T}\mathbf{s}_{r,1}^{(1)}) \\ \vdots \\ 2(c^2\Delta t_M\Delta f_M/f_0 - \mathbf{s}_{r,M}^{(2)T}\mathbf{s}_{r,M}^{(1)} + \mathbf{s}_{r,1}^{(2)T}\mathbf{s}_{r,1}^{(1)}) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (53)$$

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{B}}_\theta(\mathbf{z}_0) = \begin{bmatrix} \sin\theta_1 & -\cos\theta_1 & \mathbf{O}_{1 \times 6} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sin\theta_M & -\cos\theta_M & \mathbf{O}_{1 \times 6} \end{bmatrix}, \\ \bar{\mathbf{B}}_\beta(\mathbf{z}_0) = \begin{bmatrix} \cos\theta_1\sin\beta_1 & \sin\theta_1\sin\beta_1 & -\cos\beta_1 & \mathbf{O}_{1 \times 5} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos\theta_M\sin\beta_M & \sin\theta_M\sin\beta_M & -\cos\beta_M & \mathbf{O}_{1 \times 5} \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{B}}_{\Delta t}(\mathbf{z}_0) = \begin{bmatrix} -2(\mathbf{s}_{r,2}^{(1)} - \mathbf{s}_{r,1}^{(1)})^T & -2c\Delta t_2 & \mathbf{O}_{1 \times 4} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -2(\mathbf{s}_{r,M}^{(1)} - \mathbf{s}_{r,1}^{(1)})^T & -2c\Delta t_M & \mathbf{O}_{1 \times 4} \end{bmatrix}, \\ \bar{\mathbf{B}}_{\Delta f}(\mathbf{z}_0) = \begin{bmatrix} -2(\mathbf{s}_{r,2}^{(2)} - \mathbf{s}_{r,1}^{(2)})^T & -2c\Delta f_2/f_0 & -2(\mathbf{s}_{r,2}^{(1)} - \mathbf{s}_{r,1}^{(1)})^T & -2c\Delta t_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -2(\mathbf{s}_{r,M}^{(2)} - \mathbf{s}_{r,1}^{(2)})^T & -2c\Delta f_M/f_0 & -2(\mathbf{s}_{r,M}^{(1)} - \mathbf{s}_{r,1}^{(1)})^T & -2c\Delta t_M \end{bmatrix} \end{cases} \quad (54)$$

$$\rho^{(1)} = \|\mathbf{s}^{(1)} - \mathbf{s}_{r,1}^{(1)}\|, \rho^{(2)} = \frac{(\mathbf{s}^{(2)} - \mathbf{s}_{r,1}^{(2)})^T (\mathbf{s}^{(1)} - \mathbf{s}_{r,1}^{(1)})}{\|\mathbf{s}^{(1)} - \mathbf{s}_{r,1}^{(1)}\|} \quad (55)$$

另一方面,根据向量 $\bar{\mathbf{s}}$ 中的元素之间的闭式关系

可以建立如下方程

$$\mathbf{t}(\bar{\mathbf{s}}) = \mathbf{Q}(\bar{\mathbf{s}}) \mathbf{g}(\mathbf{s}) = \mathbf{Q}(\bar{\mathbf{s}}) \bar{\mathbf{s}} \quad (56)$$

式中

$$\begin{cases} \mathbf{t}(\bar{\mathbf{s}}) = \begin{bmatrix} (\bar{\mathbf{s}}(1:3) - \mathbf{s}_{r,1}^{(1)}) \cdot (\bar{\mathbf{s}}(1:3) - \mathbf{s}_{r,1}^{(1)}) \\ \bar{\mathbf{s}}^2(4) \\ (\bar{\mathbf{s}}(1:3) - \mathbf{s}_{r,1}^{(1)}) \cdot (\bar{\mathbf{s}}(5:7) - \mathbf{s}_{r,1}^{(2)}) \\ \bar{\mathbf{s}}(4)\bar{\mathbf{s}}(8) \end{bmatrix}, \mathbf{Q}(\bar{\mathbf{s}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{O}_{3 \times 3} \\ \mathbf{I}_{1 \times 3} & \mathbf{O}_{1 \times 3} \\ \mathbf{O}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{O}_{1 \times 3} & \mathbf{I}_{1 \times 3} \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{s}} = \mathbf{g}(\mathbf{s}) = \begin{bmatrix} (\mathbf{s}^{(1)} - \mathbf{s}_{r,1}^{(1)}) \cdot (\mathbf{s}^{(1)} - \mathbf{s}_{r,1}^{(1)}) \\ (\mathbf{s}^{(1)} - \mathbf{s}_{r,1}^{(1)}) \cdot (\mathbf{s}^{(2)} - \mathbf{s}_{r,1}^{(2)}) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (57)$$

在获得伪线性观测方程(51)和式(56)的基础上,根据第 3.2 小节中的推导可得到如下目标位置解算方法:

步骤 1 计算 $\hat{\mathbf{s}}_{\text{ue}} = (\bar{\mathbf{B}}^T(\mathbf{z})\bar{\mathbf{B}}(\mathbf{z}))^{-1}\bar{\mathbf{B}}^T(\mathbf{z})\bar{\mathbf{a}}(\mathbf{z})$;

步骤 2 计算 $\hat{\mathbf{cov}}(\bar{\mathbf{e}}) = \bar{\mathbf{E}}(\hat{\mathbf{s}}_{\text{ue}}, \mathbf{z}) \mathbf{cov}(\mathbf{n}) \bar{\mathbf{E}}^T(\hat{\mathbf{s}}_{\text{ue}}, \mathbf{z})$;

步骤 3 计算 $\hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}} = (\bar{\mathbf{B}}^T(\mathbf{z})\hat{\mathbf{cov}}^{-1}(\bar{\mathbf{e}})\bar{\mathbf{B}}(\mathbf{z}))^{-1} \times \bar{\mathbf{B}}^T(\mathbf{z})\hat{\mathbf{cov}}^{-1}(\bar{\mathbf{e}})\bar{\mathbf{a}}(\mathbf{z})$;

步骤 4 计算 $\hat{\mathbf{s}}_{\text{ue}} = (\mathbf{Q}^T(\hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}})\mathbf{Q}(\hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}}))^{-1} \times \mathbf{Q}^T(\hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}})\mathbf{t}(\hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}})$;

步骤 5 计算 $\hat{\mathbf{cov}}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \Phi(\hat{\mathbf{s}}_{\text{ue}}, \hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}})\hat{\mathbf{cov}}(\hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}}) \times \Phi^T(\hat{\mathbf{s}}_{\text{ue}}, \hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}})$;

步骤 6 计算 $\hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}} = (\mathbf{Q}^T(\hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}})\hat{\mathbf{cov}}^{-1}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{Q}(\hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}}))^{-1} \times \mathbf{Q}^T(\hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}})\hat{\mathbf{cov}}^{-1}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{t}(\hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}})$;

步骤 7 计算

$$\hat{\mathbf{s}}_{\text{is-wls}} = \left[\left(\begin{bmatrix} \mathbf{I} \sqrt{\hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}}(1:3)} \\ + \mathbf{s}_{r,1}^{(1)} \end{bmatrix} \right)^T \left(\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}}(4:6) \\ + \mathbf{s}_{r,1}^{(2)} \end{bmatrix} \right) / \left(\begin{bmatrix} \mathbf{I} \sqrt{\hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}}(1:3)} \\ + \mathbf{s}_{r,1}^{(2)} \end{bmatrix} \right)^T \right]^T$$

其中 $\mathbf{I} = \text{diag}[\text{sgn}(\hat{\mathbf{s}}_{\text{wls}}(1:3) - \mathbf{s}_{r,1}^{(1)})]$.

5 仿真实验

5.1 联合 AOA/TOA 信息的定位仿真实验

假设共有 6 个观测站,其坐标见表 1,目标坐标设置为两种情况,第一种情况为远场源情况,其坐标为(2500m,2200m,2000m),第二种情况为近场源情况,其坐标为(800m,800m,800m).假设 AOA 和 TOA 的估计误差为独立同分布的斯噪声,首先固定 TOA 估计误差标准差为 $\sigma_{\text{TOA}} = 150/c$,图 1 给出目标定位均方根误差随着 σ_{AOA} (按弧度计)的变化曲线;接着固定 AOA 估计误差标准差为 $\sigma_{\text{AOA}} = 8 \times 10^{-3}$,图 2 给出目标定位均方根误差随着 σ_{TOA} 的变化曲线。

从图 1 和图 2 中可以看出,文中闭式解的定位性能与 CRB 以及 Taylor 级数迭代法(初始值设为目标真实值)的性能基本重合,从而说明第 3.1 小节理论分析的

正确性,但相比 Taylor 级数迭代法,闭式解算方法无需迭代运算,因此不用考虑设置和发散等问题.另一方面,文中闭式解的定位性能要明显优于 TLS 定位算法,尤其在近场源条件下.最后还需要指出,在相同条件下,各种定位算法对近场源的定位精度优于对远场源的定位精度。

表 1 观测站三维坐标的数值列表(单位:m)

观测站序号	1	2	3	4	5	6
x	300	400	300	350	-100	200
y	100	50	500	200	-100	-300
z	150	100	200	100	-100	-200

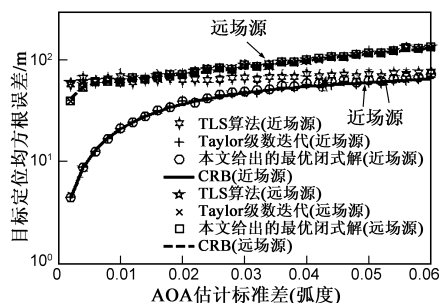


图 1 目标定位均方根误差随着 AOA 估计误差标准差的变化曲线

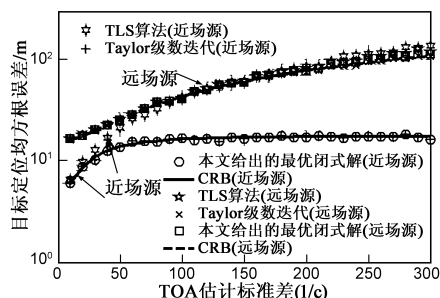


图 2 目标定位均方根误差随着 TOA 估计误差标准差的变化曲线

5.2 联合 AOA/TDOA/FDOA 信息的定位仿真实验

假设共有 6 个运动观测站,其坐标见表 1,速度数值见表 2.目标处于运动状态,其速度为 $(-20\text{m/s}, 15\text{m/s}, 40\text{m/s})$,坐标设置同第 5.1 小节.假设 AOA、TDOA 和 FDOA 的估计误差为独立同分布的高斯噪声,首先固定 TDOA 和 FDOA 估计误差标准差为 $\sigma_{\text{TDOA}} = 3 \times 10^{-1}/c$ 和 $\sigma_{\text{FDOA}} = 3 \times 10^{-2} \times f_0/c$,图 3 和图 4 分别给出目标定位均方根误差和速度估计均方根误差随着 σ_{AOA} (按弧度计)的变化曲线;接着固定 AOA 和 FDOA 估计误差标准差为 $\sigma_{\text{AOA}} = 10^{-3}$ 和 $\sigma_{\text{FDOA}} = 3 \times 10^{-2} \times f_0/c$,图 5 和图 6 分别给出目标定位均方根误差和速度估计均方根误差随着 σ_{TDOA} 的变化曲线;最后固定 AOA 和 TDOA 估计误差标准差为 $\sigma_{\text{AOA}} = 10^{-3}$ 和 $\sigma_{\text{TDOA}} = 3 \times 10^{-1}/c$,图 7 和图 8 分别给出目标定位均方根误差和速度估计均方根误差随着 σ_{FDOA} 的变化曲线。

表 2 观测站瞬时三维速度的数值列表(单位:m/s)

观测站序号	1	2	3	4	5	6
\dot{x}	30	-30	10	10	-20	20
\dot{y}	-20	10	-20	20	10	-10
\dot{z}	20	20	10	30	10	10

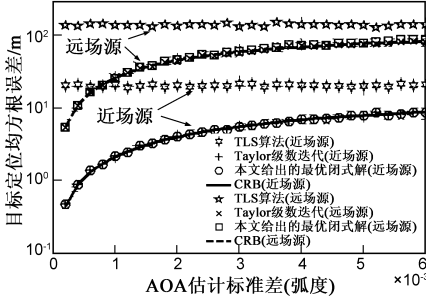


图3 目标定位均方根误差随着AOA估计误差标准差的变化曲线

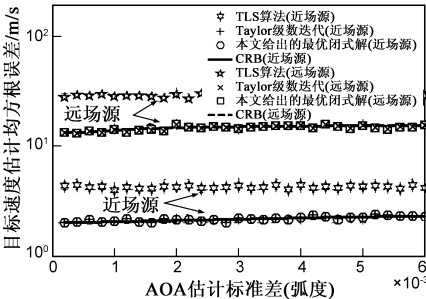


图4 目标速度估计均方根误差随着AOA估计误差标准差的变化曲线

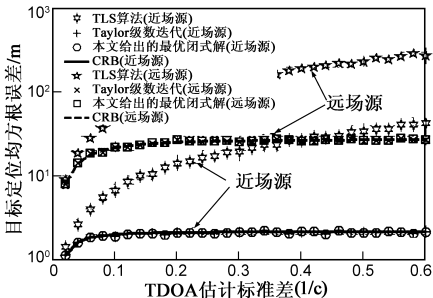


图5 目标定位均方根误差随着TDOA估计误差标准差的变化曲线

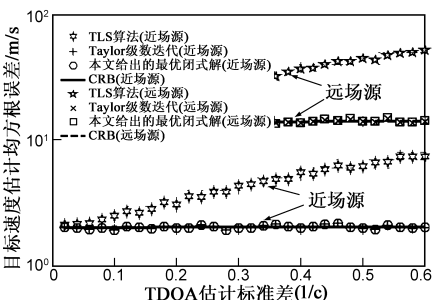


图6 目标速度估计均方根误差随着TDOA估计误差标准差的变化曲线

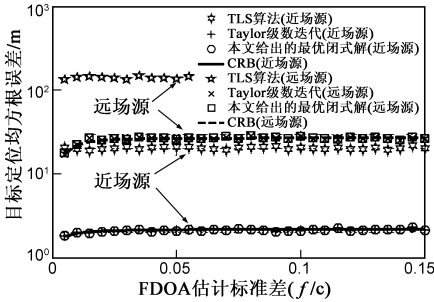


图7 目标定位均方根误差随着FDOA估计误差标准差的变化曲线

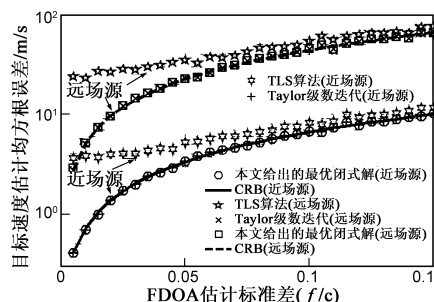


图8 目标速度估计均方根误差随着FDOA估计误差标准差的变化曲线

从图3至图8中可以得到类似图1和图2中的结论.另一方面,从图中还可以看出,目标速度估计误差受FDOA估计误差的影响较大,而受AOA和TDOA估计误差的影响较小,这是因为目标的速度只作用于FDOA的观测方程中.

6 结论

该文提出两种将非线性观测方程进行伪线性化处理,并实现目标位置(闭式)解算的理论模型与分析框架.文中的理论分析框架不限定具体物理观测量,只要定位观测方程可转化为文中两种伪线性方程即可.另一方面,该文还利用一阶误差分析方法定量推导伪线性化方法的理论估计方差,并证明其定位性能能够达到CRB,从而证明闭式解的渐近最优性.最后,该文以AOA/TOA联合定位和AOA/TDOA/FDOA联合定位为算例,分别阐述两类伪线性化无源定位方法的具体应用,并通过仿真验证理论分析的有效性.最后,本文的理论分析框架可推广应用于观测站位置状态存在扰动的情況,相关的分析将在今后的研究中完成.

参考文献

[1] Ho K C, Sun M. An accurate algebraic closed-form solution for energy-based source localization[J]. IEEE Transactions on Audio, Speech and Language Processing, 2007, 15(8): 2542 - 2550.

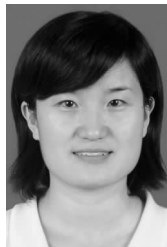
- [2] Ma Z H, Ho K C. TOA localization in the presence of random sensor position errors[A]. Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing[C]. Prague, Czech: IEEE Press, 2011. 2468 – 2471.
- [3] Chan Y T, Ho K C. A simple and efficient estimator by hyperbolic location[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1994, 42(4): 1905 – 1915.
- [4] Ho K C, Parikh K H. Source localization using TDOA with erroneous receiver positions[A]. Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems[C]. Vancouver, Canada: IEEE Press, 2004. 453 – 456.
- [5] Yang K H, Wang G, Luo Z Q. Efficient convex relaxation methods for robust target localization by a sensor network using time differences of arrivals[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2009, 57(7): 2775 – 2784.
- [6] Yang L, Ho K C. An approximately efficient TDOA localization algorithm in closed-form for locating multiple disjoint sources with erroneous sensor positions[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2009, 57(12): 4598 – 4615.
- [7] Yang K, An J P, Bu X Y, et al. Constrained total least-squares location algorithm using time-difference-of-arrival measurements[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2010, 59(3): 1558 – 1562.
- [8] Lu X N, Ho K C. Taylor-series technique for source localization using AOAs in the presence of sensor location errors[A]. Proceedings of the Fourth IEEE Workshop on Sensor Array and Multichannel Processing[C]. Waltham, MA: IEEE Press, 2006. 190 – 194.
- [9] Wang D, Zhang L, Wu Y. The structured total least squares algorithm for passive location based on angle information[J]. Sci China Ser F-Inf Sci, 2009, 52(6): 1043 – 1054.
- [10] Ho K C, Xu W. An accurate algebraic solution for moving source location using TDOA and FDOA measurements[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2004, 52(9): 2453 – 2463.
- [11] Ho K C, Lu X, Kovavisaruch L. Source localization using TDOA and FDOA measurements in the presence of receiver location errors: analysis and solution[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2007, 55(2): 684 – 696.
- [12] Sun X Y, Li J D, Huang P Y, et al. Total least-squares solution of active target localization using TDOA and FDOA measurements in WSN[A]. Proceedings of the IEEE International Conference on Advanced Information Networking and Applications[C]. Okinawa, Japan: IEEE Press, 2008. 995 – 999.
- [13] Wu H, Su W M, Gu H. A novel Taylor series method for source and receiver localization using TDOA and FDOA measurements with uncertain receiver positions[A]. Proceedings of the IEEE CIE International Conference on Radar[C]. Chengdu, China: IEEE Press, 2011. 1037 – 1044.
- [14] Yu H G, Huang G M, Gao J, Liu B. An efficient constrained weighted least squares algorithm for moving source location using TDOA and FDOA measurements[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2012, 11(1): 44 – 47.
- [15] Sun M, Ho K C. An asymptotically efficient estimator for TDOA and FDOA positioning of multiple disjoint sources in the presence of sensor location uncertainties[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2011, 59(7): 3434 – 3440.
- [16] Yang K H, Jiang L Z, Luo Z Q. Efficient semidefinite relaxation for robust geolocation of unknown emitter by a satellite cluster using TDOA and FDOA measurements[A]. Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing[C]. Prague, Czech: IEEE Press, 2011. 2584 – 2587.
- [17] Cheung K W, So H C, Ma W K, Chan Y T. A constrained least squares approach to mobile positioning: algorithms and optimality[J]. EURASIP Journal on Applied Signal Processing, 2006, (2006): 1 – 23.

作者简介



王鼎 男, 1982 年生于安徽芜湖, 博士, 现为信息工程大学信息工程学院讲师, 主要从事阵列信号处理、无源定位方面的相关研究。

E-mail: wang_ding814@aliyun.com



张瑞杰 女, 1984 年生于河南郑州, 博士, 现为信息工程大学四院讲师, 主要从事网络舆情分析、图像场景分类与检索、无源定位等方面的相关研究。

E-mail: rjz_wonder@163.com

吴瑛 女, 1960 年生于河南郑州, 硕士, 现为信息工程大学信息工程学院教授, 博士生导师, 主要从事现代信号处理的相关研究。

E-mail: hnwuying22@163.com