

二维 DFT 域全相位数字滤波器设计与实现

苏 飞¹, 曹继华², 段宇翔¹

(1. 天津理工大学电信学院, 天津 300384; 2. 天津技术师范大学电子信息工程学院, 天津 300391)

摘 要: 一维全相位数字信号处理已经在谱分析、自适应、模板设计、滤波器组分析与综合等领域得到应用, 但对于二维全相位理论的推导很少而且没有实现的方法. 因此, 本文在一维全相位信号处理方法的基础上, 首先系统地分析二维全相位信号处理模式, 理论推导出无窗、单窗和双窗模式下传输函数表达式; 其次, 首次设计出二维全相位处理的系统实现框图, 并对算法复杂度进行了优化分析; 还有, 对二维全相位信号处理的性质进行了分析; 最后, 借助 MATLAB 实现了 DFT 滤波器设计并画出 3D 特性曲面, 完成设计二维 DFT 全相位滤波器的理论、方法和实验验证.

关键词: 全相位; 基窗; 全相位变换; 核; 线性相位

中图分类号: TN9

文献标识码: A

文章编号: 0372-2112 (2015)11-2172-08

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.3969/j.issn.0372-2112.2015.11.006

Design and Implementation of 2D All-Phase Filter in DFT Domain

SU Fei¹, CAO Ji-hua², DUAN Yu-xiang¹

(1. Institute of Electronic Information Engineering, Tianjin University of Technology, Tianjin 300384, China;

2. Institute of Electronic Engineering, Tianjin Normal Uormal University of Technology, Tianjin 300391, China)

Abstract: 1D all-phase digital processing method has been applied in such fields as spectrum analysis, adaptive processing, template design and filter bank analysis & synthesis. However, the progress of researches on 2D all-phase is so slow that there are no implementation methods yet. Due to the above, this paper firstly analyzes the 2D all-phase signal processing mode to deduce out 2D all-phase filter with convolution windows; Secondly, the implementation structure of 2D all-phase processing is given and the algorithm is optimized as well. Thirdly, 2 important characteristics of 2D all-phase filter are discussed; finally, 3D transmission curves are drawn out based on MATLAB. Summarizedly, this paper completes designing 2D all-phase digital filter theoretically, implementation method and experimental verification.

Key words: all phase; base window; all-phase transformation; kernel; linear phase

1 引言

全相位概念被提出以后, 因其在设计系统传输特性时有效地弱化吉布斯现象, 并通过加窗而极大地减少频谱泄露等良好性能, 在数据内插、谱分析、自适应信号处理等领域不断得到应用^[1~4]. 各种正交变换在不同变换域具有不同的物理意义, 如 DFT 表达了信号空间频率成分, DCT 和 DWT 表达了信号基频分解, 在压缩领域得到较广泛的应用. 全相位与正交变换相结合, 已设计出傅立叶、余弦和沃尔什变换域的全相位数字滤波器并较好地改善滤波器性能^[5~10], 如降低频率取样误差, 基本消除一维信号分段及二维图像分块带来的截断误差等.

目前对全相位的研究主要集中在一维信号而在二维信号处理方面研究较少. 文章[11~13]对二维全相位进行了初步探究, 但对于二维全相位的实现及特性没有进行系统分析, 且建立过程都是从行列两方向分别应用一维全相位来形成二维处理的方式. 这种方法的一个明显缺点是未考虑二维信号在斜向上的相关性, 虽然保持了行和列向上的频率分布, 但无法处理斜向上的细节内容^[14~15]. 本文在理论推导出加窗二维全相位信号处理算术表达式的基础上, 首次给出实现的系统原理图并对算法进行优化分析, 还讨论了二维全相位的两个重要特性. 最后, 借助 MATLAB 实现并画出了三种加窗模式下的传输特性曲面.

2 二维 DFT 全相位算法设计

模拟系统输出与输入之间建立的是一一对应关系,传统数字信号处理则是与输入序列建立多对多关系,而全相位方法是以序列作为输入而产生唯一输出.在一维全相位信号处理时,输入是包含 $x(n)$ 的 N 个向量,可以将其视为以 $x(n)$ 为中心、长度为 $2N-1$ 的准 2

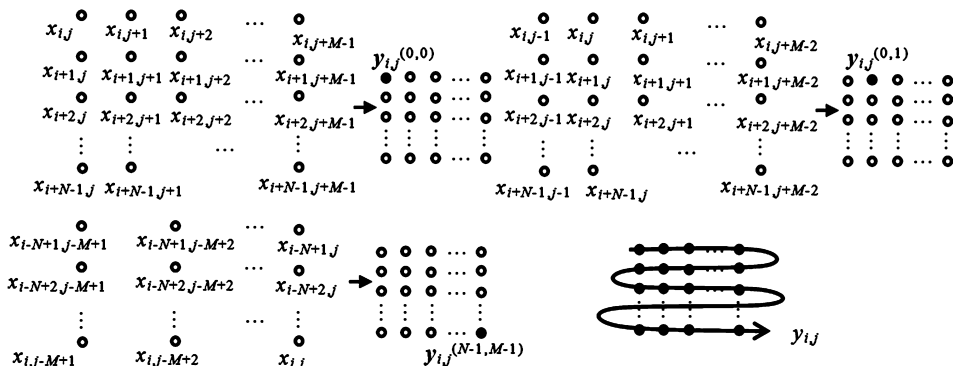


图1 二维全相位处理示意图

假设变换域系统 H 大小为 $N \times N$,对于任意元素 x_{ij} 在原点位置时对应的输入矩阵 $X^{(0,0)}$,定义如下.

$$X^{(0,0)} = \begin{bmatrix} x_{i,j} & x_{i,j+1} & \cdots & x_{i,j+N-1} \\ x_{i+1,j} & x_{i+1,j+1} & \cdots & x_{i+1,j+N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{i+N-1,j} & x_{i+N-1,j+1} & \cdots & x_{i+N-1,j+N-1} \end{bmatrix}_{N \times N} \quad (1)$$

传输特性矩阵 H 定义如下.

$$H = \begin{bmatrix} H_{0,0} & H_{0,1} & \cdots & H_{0,N-1} \\ H_{1,0} & H_{1,1} & \cdots & H_{1,N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{N-1,0} & H_{N-1,1} & \cdots & H_{N-1,N-1} \end{bmatrix}_{N \times N} \quad (2)$$

输出 Y 等于^[16],

$$Y = \beta[(\alpha X^{(0,0)} \alpha^T) \otimes H] \beta^T \quad (3)$$

其中, \otimes 表示对应元素相乘, α, β 是正反正交变换核. 对于输入 $X^{(0,0)}$, 对应 $x_{i,j}$ 的输出是 $(u=0, v=0)$ 位置的 $Y_{i,j}^{(0,0)}$. 二维全相位数字处理的输入是 $x_{i,j}$ 遍历 $N \times N$ 个位置的 N^2 个矩阵, 输出则是对应 $X^{(u,v)}$ 在位置 (u, v) 处 N^2 个输出 $Y_{u,v}^{(u,v)}$ 的和平. 由式(1)可知遍历矩阵 $X^{(u,v)}$ 如下:

$$X^{(u,v)} = \begin{bmatrix} x_{i-u,j-v} & x_{i-u,j-v+1} & \cdots & x_{i-u,j-v+N-1} \\ x_{i-u+1,j-v} & x_{i-u+1,j-v+1} & \cdots & x_{i-u+1,j-v+N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{i-u+N-1,j-v} & x_{i-u+N-1,j-v+1} & \cdots & x_{i-u+N-1,j-v+N-1} \end{bmatrix}_{N \times N} \quad (4)$$

所以,二维全相位信号处理输出如下.

倍延拓,也可看作 N 个向量构成的矩阵.对于 $M \times N$ 二维信号的全相位处理,如果分别在 N 个长度为 M 的行信号上进行,虽然在行方向上实现截断效应的改善,但列方向上由于忽略相关性而没有得到充分处理.二维的全相位信号处理应从纵横空间域上同时进行即分块重叠方式,用图 1 示意图说明.

$$y = \frac{1}{N^2} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} Y_{u,v} = \frac{1}{N^2} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} \left[\sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} \left(\sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_{m,p} \alpha_{n,q} \beta_{u,m} \beta_{v,n} H_{m,n} \right) X_{p,q}^{(u,v)} \right] \quad (5)$$

观察式(4)易知,

$$X_{p,q}^{(u,v)} = x_{i+p-u, j+q-v} \quad (6)$$

令,

$$T_{p,q}^{(u,v)} = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_{m,p} \alpha_{n,q} \beta_{u,m} \beta_{v,n} H_{m,n} \quad (7)$$

把式(6)和(7)代入到式(5)得,

$$y = \frac{1}{N^2} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} \left[\sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} T_{p,q}^{(u,v)} x_{i+p-u, j+q-v} \right] \quad (8)$$

$$= \frac{1}{N^2} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} \left[\sum_{r=-u}^{N-1-u} \sum_{c=-v}^{N-1-v} T_{r+c, c}^{(u,v)} x_{i+r, j+c} \right]$$

分别交换 r 与 x 和 c 与 y 的求和顺序后得,

$$y = \frac{1}{N^2} \left(\sum_{r=1}^{N-1} \sum_{u=0}^{N-1-r} \sum_{v=0}^{N-1} \right) \left(\sum_{c=1}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1-c} \sum_{u=0}^{N-1} \right) T_{r+u, c+v}^{(u,v)} x_{i+r, j+c} \\ = \frac{1}{N^2} \left(\sum_{r=1}^{N-1} \sum_{c=1}^{N-1-r} \sum_{u=0}^{N-1-c} \sum_{v=0}^{N-1} \right) T_{r+u, c+v}^{(u,v)} x_{i+r, j+c} \\ + \frac{1}{N^2} \left(\sum_{r=-N+1}^0 \sum_{c=1}^{N-1} \sum_{u=0}^{N-1-c} \sum_{v=0}^{N-1} \right) T_{r+u, c+v}^{(u,v)} x_{i+r, j+c} \\ = \frac{1}{N^2} \left[\sum_{r=1}^{N-1} \sum_{c=1}^{N-1-r} \left(\sum_{u=0}^{N-1-c} \sum_{v=0}^{N-1} T_{r+u, c+v}^{(u,v)} \right) + \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{c=-N+1}^0 \left(\sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=-c}^{N-1} T_{r+u, c+v}^{(u,v)} \right) \right] \\ + \frac{1}{N^2} \left[\sum_{r=-N+1}^0 \sum_{c=1}^{N-1} \left(\sum_{u=-r}^{N-1-c} \sum_{v=0}^{N-1} T_{r+u, c+v}^{(u,v)} \right) + \sum_{r=-N+1}^0 \sum_{c=-N+1}^0 \left(\sum_{u=-r}^{N-1} \sum_{v=-c}^{N-1} T_{r+u, c+v}^{(u,v)} \right) \right] \cdot x_{i+r, j+c} \quad (9)$$

观察式(7),矩阵 T 是由正交变换正反核与特性矩阵共同定义,它是数据 $x_{i,j}$ 移动到 (u, v) 时对应输入 X 的加

权,称 \mathbf{T} 为二维全相位变换核. 观察上式(9),对于不同区间的 (r, c) ,定义变量如下.

$$\mathbf{A}_{r,c} = \begin{cases} \mathbf{A}^{++} = \frac{1}{N^2} \sum_{u=0}^{N-1-r} \sum_{v=0}^{N-1-c} \mathbf{T}_{r+u, c+v}^{(u,v)}, & 1 \leq r \leq N-1, 1 \leq c \leq N-1 \\ \mathbf{A}^{+-} = \frac{1}{N^2} \sum_{u=0}^{N-1-r} \sum_{v=-c}^{N-1} \mathbf{T}_{r+u, c+v}^{(u,v)}, & 1 \leq r \leq N-1, -N+1 \leq c \leq 0 \\ \mathbf{A}^{-+} = \frac{1}{N^2} \sum_{u=-r}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1-c} \mathbf{T}_{r+u, c+v}^{(u,v)}, & -N+1 \leq r \leq 0, 1 \leq c \leq N-1 \\ \mathbf{A}^{--} = \frac{1}{N^2} \sum_{u=-r}^{N-1} \sum_{v=-c}^{N-1} \mathbf{T}_{r+u, c+v}^{(u,v)}, & -N+1 \leq r \leq 0, -N+1 \leq c \leq 0 \end{cases} \quad (10)$$

由式(10)可看出,矩阵 \mathbf{A} 是通过在不同区间的全相位变换核求和得到,它包含四个子矩阵即 \mathbf{A}^{++} 、 \mathbf{A}^{+-} 、 \mathbf{A}^{-+} 和 \mathbf{A}^{--} ,其物理意义是数据 $x_{i,j}$ 由 $(0,0)$ 位置逐点移动到 $(N-1, N-1)$ 过程中,以数据 $x_{i,j}$ 划分的 \mathbf{T} 的四个区间内各自数据之和即得到 \mathbf{A} 的四个子矩阵,形成过程如图2所示.

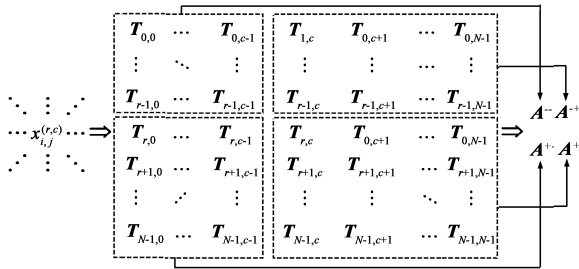


图2 矩阵 \mathbf{A} 形成过程

四个子矩阵 \mathbf{A}^{++} 、 \mathbf{A}^{+-} 、 \mathbf{A}^{-+} 和 \mathbf{A}^{--} 的维数分别是 $N \times N$ 、 $N \times (N-1)$ 、 $(N-1) \times N$ 和 $(N-1) \times (N-1)$,所以矩阵 \mathbf{A} 的维数是 $(2N-1) \times (2N-1)$.把式(10)代入到(9)得,

$$y = \left[\sum_{r=1}^{N-1} \sum_{c=1}^{N-1} + \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{c=-N+1}^0 + \sum_{r=-N+1}^0 \sum_{c=1}^{N-1} + \sum_{r=-N+1}^0 \sum_{c=-N+1}^0 \right] \cdot \mathbf{A}_{r,c} x_{i+r, j+c} = \sum_{r=-N+1}^{N-1} \sum_{c=-N+1}^{N-1} \mathbf{A}_{r,c} x_{i+r, j+c} \quad (11)$$

式(11)表明,二维全相位信号处理对应 $x_{i,j}$ 的输出等于在行列方向上以 $x_{i,j}$ 为中心的共 $(2N-1)^2$ 个以 \mathbf{A} 为加权的数据总和.式(11)称为二维全相位变换, \mathbf{A} 是全相位变换基矩阵.对于二维傅立叶变换 $\alpha = \mathbf{F}_N$, $\beta = \mathbf{F}_N^*$,代入到式(7)得,

$$\mathbf{T}_{p,q}^{(u,v)} = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{F}_{m,p} \mathbf{F}_{n,q}^* \mathbf{F}_{u,m}^* \mathbf{F}_{v,n}^* \mathbf{H}_{m,n} \quad (12)$$

注意到,

$$\mathbf{F}_{m,p} = \mathbf{W}_N^{mp} = (\mathbf{W}^*)^{-mp} = (\mathbf{W}_N^{-mp})^* = \mathbf{F}_{m,-p}^* \quad (13)$$

$$\mathbf{F}_{n,q} = \mathbf{W}_N^{nq} = (\mathbf{W}^*)^{-nq} = (\mathbf{W}_N^{-nq})^* = \mathbf{F}_{n,-q}^*$$

把式(13)代入到式(12)并整理得,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{p,q}^{(u,v)} &= \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{F}_{(u-p),m}^* \mathbf{H}_{m,n} \mathbf{F}_{n,(v-q)}^* \\ &= \mathbf{h}(u-p, v-q) \end{aligned} \quad (14)$$

显然,矩阵 \mathbf{h} 以 N 为周期.把式(14)结果代入到式(10)得到全相位基的四个子矩阵.

$$\mathbf{A}_{r,c} = \begin{cases} \mathbf{A}^{++} = \frac{1}{N^2} \sum_{u=0}^{N-1-r} \sum_{v=0}^{N-1-c} h(-\gamma, -c) \\ \quad = \frac{(N-r)(N-c)}{N^2} h(-r, -c), \\ \quad 1 \leq r \leq N-1, 1 \leq c \leq N-1 \\ \mathbf{A}^{+-} = \frac{1}{N^2} \sum_{u=0}^{N-1-r} \sum_{v=-c}^{N-1} h(-\gamma, -c) \\ \quad = \frac{(N-r)(N+c)}{N^2} h(-r, -c), \\ \quad 1 \leq r \leq N-1, -N+1 \leq c \leq 0 \\ \mathbf{A}^{-+} = \frac{1}{N^2} \sum_{u=-r}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1-c} h(-\gamma, -c) \\ \quad = \frac{(N+r)(N-c)}{N^2} h(-r, -c), \\ \quad -N+1 \leq r \leq 0, 1 \leq c \leq N-1 \\ \mathbf{A}^{--} = \frac{1}{N^2} \sum_{u=-r}^{N-1} \sum_{v=-c}^{N-1} h(-\gamma, -c) \\ \quad = \frac{(N+r)(N+c)}{N^2} h(-r, -c), \\ \quad -N+1 \leq r \leq 0, -N+1 \leq c \leq 0 \end{cases} \quad (15)$$

因此,只要给出系统传输特性序列 \mathbf{H} 就可以按照式(15)求出全相位基矩阵 \mathbf{A} ,按照式(11)就可以得到二维全相位处理结果.

通过加窗可以改善二维全相位处理效果^[17],正变换前和反变换后加二维窗的示意图如图3所示:

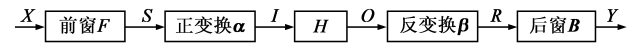


图3 带基窗的二维正交变换处理

假定系统维度为 $N \times N$,输入 \mathbf{X} 是 $x_{i,j}$ 遍历 N^2 位置时的全部输入矩阵, \mathbf{Y} 是对应元素 $x_{i,j}$ 位置的输出矩阵,前后窗函数定义如下:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_{0,0} & F_{0,1} & \cdots & F_{0,N-1} \\ F_{1,0} & F_{1,1} & \cdots & F_{1,N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{N-1,0} & F_{N-1,1} & \cdots & F_{N-1,N-1} \end{bmatrix}_{N \times N}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_{0,0} & B_{0,1} & \cdots & B_{0,N-1} \\ B_{1,0} & B_{1,1} & \cdots & B_{1,N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{N-1,0} & B_{N-1,1} & \cdots & B_{N-1,N-1} \end{bmatrix}_{N \times N} \quad (16)$$

则由图3可得,

$$\begin{aligned}
S_{p,q} &= X_{p,q}^{(u,v)} \cdot F_{p,q}, \\
Y_{u,v} &= R_{u,v} \cdot B_{u,v}, \\
I_{m,n} &= \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} \alpha_{m,p} \alpha_{n,q} S_{p,q} = \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} \alpha_{m,p} \alpha_{n,q} F_{p,q} X_{p,q}^{(u,v)}, \\
O_{m,n} &= I_{m,n} H_{m,n} = \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} \alpha_{m,p} \alpha_{n,q} H_{m,n} F_{p,q} X_{p,q}^{(u,v)}
\end{aligned} \quad (17)$$

可得输出如下.

$$\begin{aligned}
Y_{u,v} &= B_{u,v} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} \beta_{u,m} \beta_{v,n} O_{m,n} = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} \beta_{u,m} \beta_{v,n} \\
&\cdot \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} \alpha_{m,p} \alpha_{n,q} H_{m,n} F_{p,q} B_{u,v} X_{p,q}^{(u,v)} \\
&= \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} \left(\sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_{m,p} \alpha_{n,q} \beta_{u,m} \beta_{v,n} H_{m,n} F_{p,q} B_{u,v} \right) X_{p,q}^{(u,v)}
\end{aligned} \quad (18)$$

所以,加双窗的全相位信号处理输出等于,

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{N^2} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} Y_{u,v} = \frac{1}{N^2} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} \\
&\cdot \left[\sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} \left(\sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_{m,p} \alpha_{n,q} \beta_{u,m} \beta_{v,n} H_{m,n} F_{p,q} B_{u,v} \right) X_{p,q}^{(u,v)} \right]
\end{aligned} \quad (19)$$

对于 DFT 域带双窗的二维全相位变换(简记为 ap^{2d} DFT),根据式(15)及式(19),可得对应的全相位变换基如下.

$$\begin{aligned}
A_{r,c}^{(d)} &= \frac{h_e(-r, -c)}{N^2} \\
&\cdot \otimes [B(-r, -c) * F(r, c)] \\
&= h_e(-r, -c) \otimes C_{r,c}^{(d)}
\end{aligned} \quad (20)$$

其中,归一化卷积窗 $C_{r,c}^{(d)} = B(-r, -c) * F(r, c)/N^2$. 上式(20)表明 N 阶 ap^{2d} DFT 基矩阵等于前后窗卷积再点乘系统冲激响应矩阵后除以 N^2 .

3 二维 DFT 全相位信号处理的实现

二维全相位信号处理可以按照行或者列优先的方式来实现,下面以行优先为例给出实现原理图.行方向上块处理方式如图 4 所示.输入是按照行方向 1 像素/次移动的大小为 $N \times N$ 的数据块,假设待处理图像大小为 $M \times L$,且进行边界扩展成 $(M+2N-1) \times (L+2N-1)$ 以保证输出图像大小不变. Z_c 是行方向移动的单位延迟.上图 4 工作方式是:按照间隔 Z_c 顺序输入的 N 个起始方块经过正交变换、 H 加权和反变换后依次进入延迟分别为 iZ_c ($i = N-1, N-2, \dots, 0$) 的缓存器中, $X^{(0, N-1)}$ 处理后的 N 个数据块同时进入加法器上方的单位延迟缓存器并断开各路开关.后续的 $X^{(0, N)}$ 即对应 $x_{i,j+1}$ 的输入处理结果将直接进入最左边直通过路而顺序产生 M 个对应输出 $y(0, v)$, 并把 $M+N-1$ 个处理

结果存入缓存中以作为列方向 N 次处理参考使用,封装如图 5 所示.

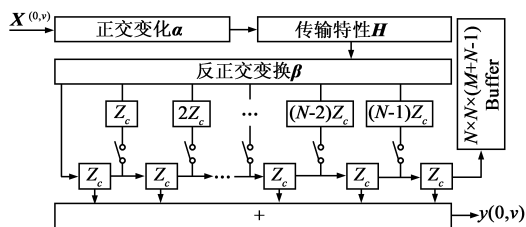


图4 二维全相位行信号处理框图

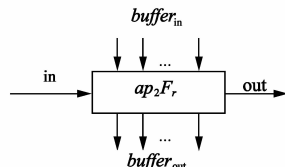


图5 二维全相位行信号处理封装模块

其中 $\text{buffer}_{\text{out}}$ 是本模块处理的所有中间结果, $\text{buffer}_{\text{in}}$ 是下一行模块处理的所有中间结果作为当前模块处理时初始状态值,存入加法器上方的 N 个单位延迟缓存器中.这样,与 $x_{i,j}$ 相关的 N 行并行处理系统可设计成如图 6 所示结构.

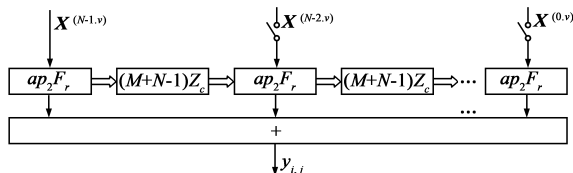


图6 二维全相位信号处理系统图

图 6 工作流程是:初始 N 个数据块输入后,断开所有开关. N 列并行处理,经过 $(M+N-1)Z_c$ 时间后,所有行均完成处理并输出 N 个结果,这样对应 $x_{i,j}$ 的 N^2 个数据和即为输出 $y_{i,j}$. 以上是按照式(19)的实现过程,与其等价的式(11)实现方式只需全相位变换基按照行或列优先逐点移动处理来完成.一种直接方式如图 7 所示.

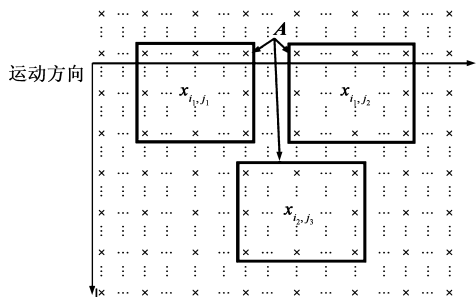


图7 全相位基滑动处理图

由图 7 处理过程可以看出,通过滑动全相位基矩阵 A 来对准某像素 $x_{i,j}$ 后按照式(11)即得到对应输出 $y_{i,j}$.

考虑到图像信号的空间相关性以及为充分利用相邻行或列的重复部分,可做进一步优化处理.对于同行的相邻点 $x_{i,j}$ 和 $x_{i,j+1}$,由式(11)可知对应输出 $y_{i,j}$ 和 $y_{i,j+1}$ 具有如下关系.

$$\begin{aligned}\Delta y_{i,j}^{(c)} &= y_{i,j+1} - y_{i,j} = \sum_{r=-N+1c=-N+1}^{N-1} \sum_{c=1}^{N-1} \mathbf{A}_{r,c} (x_{i+r,j+1+c} - x_{i+r,j+c}) \\ &= \sum_{r=-N+1c=-N+1}^{N-1} \sum_{c=1}^{N-1} \mathbf{A}_{r,c} \Delta x_{i+r,j+c}\end{aligned}\quad (21)$$

即相邻像素的全相位处理输出差分正比于对应输入块 \mathbf{X} 的差分.由此,同一行的任意点输出等于,

$$\begin{aligned}y_{i,j} &= y_{i,0} + \sum_{j=1}^{N-1} \Delta y_{i,j}^{(c)} \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{r=-N+1c=-N+1}^{N-1} \sum_{c=1}^{N-1} \mathbf{A}_{r,c} \Delta x_{i+r,j+c}\end{aligned}\quad (22)$$

对于同列相邻点 $x_{i,j}$ 和 $x_{i+1,j}$,由式(11)可知对应输出 $y_{i,j}$ 和 $y_{i+1,j}$ 具有如下关系.

$$\begin{aligned}\Delta y_{i,j}^{(r)} &= y_{i+1,j} - y_{i,j} \\ &= \sum_{r=-N+1c=-N+1}^{N-1} \sum_{c=1}^{N-1} \mathbf{A}_{r,c} x_{i+1+j+c} \\ &\quad - \sum_{r=-N+1c=-N+1}^{N-1} \sum_{c=1}^{N-1} \mathbf{A}_{r,c} x_{i+r,j+c} \\ &= \sum_{r'=-N+2c=-N+1}^{N-1} \sum_{c=1}^{N-1} \mathbf{A}_{r'-1,c} x_{i+r',j+c} - \sum_{r=-N+1c=-N+1}^{N-1} \sum_{c=1}^{N-1} \mathbf{A}_{r,c} x_{i+r,j+c} \\ &= \sum_{c=-N+1}^{N-1} (A_{N-1,c} x_{i+N,j+c} - A_{-N+1,c} x_{i-N+1,j+c}) \\ &\quad + \sum_{r=-N+2c=-N+1}^{N-1} \sum_{c=1}^{N-1} (\mathbf{A}_{r-1,c} - \mathbf{A}_{r,c}) x_{i+r,j+c} \\ \Rightarrow y_{i+1,j} &= y_{i,j} + \sum_{c=-N+1}^{N-1} (A_{N-1,c} x_{i+N,j+c} - A_{-N+1,c} x_{i-N+1,j+c}) \\ &\quad - \sum_{r=-N+1c=-N+1}^{N-1} \sum_{c=1}^{N-1} \Delta \mathbf{A}_{r,c} x_{i+r,j+c} \\ &= \sum_{c=-N+1}^{N-1} A_{N-1,c} x_{i+N,j+c} + \sum_{r=-N+2c=-N+1}^{N-1} \sum_{c=1}^{N-1} \mathbf{A}_{r,c} x_{i+r,j+c} \\ &\quad - \sum_{r=-N+2c=-N+1}^{N-1} \sum_{c=1}^{N-1} \Delta \mathbf{A}_{r,c} x_{i+r,j+c} \\ A_{N-1,c} &= \Delta A_{N,c} \\ &= \sum_{r=-N+2c=-N+1}^{N-1} \sum_{c=1}^{N-1} \Delta \mathbf{A}_{r,c} x_{i+r,j+c} + \sum_{r=-N+2c=-N+1}^{N-1} \sum_{c=1}^{N-1} \mathbf{A}_{r,c} x_{i+r,j+c}\end{aligned}\quad (23)$$

式(23)表明,隔行的输出由两部分组成,第一部分是新增行对于全相位基行的差分与 $\mathbf{X}^{(i+1,j)}$ 加权和,第二部分是上一行元素全相位基与 $\mathbf{X}^{(i,j)}$ 加权求和后除去第一行.其中第二部分已经在上一行处理中计算出来,因此可重复利用.此外,利用全相位基的对称性可进一步优化计算过程.

4 二维 DFT 全相位处理的两个特性

二维全相位在各种正交变换的基础上进行了全相位信号处理,一方面扩展了输入信号信息,另一方面对

于不同相位信号进行不同权值的加权,从而使二维全相位信号处理在保留传统分块固有性质的同时也具备了一些特殊性质,主要有以下两个.

性质 1 N 阶 ap^2DFT 系统具有线性相位的充要条件是: $\mathbf{H}(k) = \mathbf{H}(N-k)$, 且对于单窗系统要求非矩形窗中心对称,对于双窗系统要求 $\mathbf{F} = \mathbf{B}$ 或者前后基窗均中心对称.

证明 由式(11)可知二维全相位系统传输特性如下.

$$\begin{aligned}H(j\omega_r, j\omega_c) &= \sum_{r=-N+1c=-N+1}^{N-1} \sum_{c=1}^{N-1} \mathbf{A}_{r,c}^{(d)} e^{-j(\tau\omega_r + \tau_c\omega_c)} \\ &= A_{0,0}^{(d)} + \sum_{c=1}^{N-1} (A_{0,c}^{(d)} e^{-j\tau\omega_c} + A_{0,-c}^{(d)} e^{j\tau\omega_c}) \\ &\quad + \sum_{r=1}^{N-1} (\mathbf{A}_{r,0}^{(d)} e^{-j\tau\omega_r} + \mathbf{A}_{-r,0}^{(d)} e^{j\tau\omega_r}) \\ &\quad + \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{c=1}^{N-1} [\mathbf{A}_{r,-c}^{(d)} e^{-j(\tau\omega_r - \tau_c\omega_c)} + \mathbf{A}_{-r,c}^{(d)} e^{j(\tau\omega_r - \tau_c\omega_c)} \\ &\quad + \mathbf{A}_{r,c}^{(d)} e^{-j(\tau\omega_r + \tau_c\omega_c)} + \mathbf{A}_{-r,-c}^{(d)} e^{j(\tau\omega_r + \tau_c\omega_c)}]\end{aligned}\quad (24)$$

当全相位基满足如下条件时,特性具有线性相位.

$$\mathbf{A}_{r,-c}^{(d)} = \mathbf{A}_{r,c}^{(d)} \quad (25)$$

假设 ap^2 线性相位如下.

$$\varphi(\omega) = -\tau_r\omega_r - \tau_c\omega_c \quad (26)$$

把式(24)展开求得相位并整理如下.

$$\begin{aligned}\varphi(\omega) &= -\arg \tan \frac{\sum_{r=-N+1c=-N+1}^{N-1} \sum_{c=1}^{N-1} [A_{r,c} \sin(\tau\omega_r + \tau_c\omega_c)]}{\sum_{r=-N+1c=-N+1}^{N-1} \sum_{c=1}^{N-1} [A_{r,c} \cos(\tau\omega_r + \tau_c\omega_c)]} \\ &= -\tau_r\omega_r - \tau_c\omega_c \\ \Rightarrow \sum_{r=-N+1c=-N+1}^{N-1} \sum_{c=1}^{N-1} \{A_{r,c} \sin[(r - \tau_r)\omega_r + (c - \tau_c)\omega_c]\} &= 0\end{aligned}\quad (27)$$

由式(27)可看出, $\tau_r = \tau_c = 0$ 时正弦部分关于 $(0,0)$ 奇对称,上式(27)恒成立的条件是 $A_{r,c}$ 关于原点对称,从而得式(25)结论,系统具有严格零相位.

性质 2 N 阶 ap^2DFT 系统频率响应函数等于频率采样向量 \mathbf{H} 与卷积窗 \mathbf{C} 的离散卷积.频率响应函数可通过频率采样序列内插实现,其内插函数为卷积窗谱函数.

证明 把式(20)代入式(11)得系统频率响应如下.

$$\begin{aligned}q\mathbf{H}(j\omega_r, j\omega_c) &= \sum_{r=-N+1c=-N+1}^{N-1} \sum_{c=1}^{N-1} \mathbf{C}_{r,c} \mathbf{h}(-r, -c) e^{-j(\tau\omega_r + \tau_c\omega_c)} \\ &= \sum_{r=-N+1c=-N+1}^{N-1} \sum_{c=1}^{N-1} \mathbf{C}_{r,c} \left[\frac{1}{N^2} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} \mathbf{H}_{u,v} e^{-j(2\pi u r/N + 2\pi v c/N)} \right] e^{-j(\tau\omega_r + \tau_c\omega_c)} \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} \mathbf{H}_{u,v} \left[\sum_{r=-N+1c=-N+1}^{N-1} \sum_{c=1}^{N-1} \mathbf{C}_{r,c} e^{-j(\omega_r + 2\pi u r/N) r - j(\omega_c + 2\pi v c/N) c} \right]\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{N^2} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} \mathbf{H}_{u,v} \Phi[\mathbf{j}(\omega_r + 2u\pi/N), \mathbf{j}(\omega_c + 2v\pi/N)] \quad (28)$$

上式(28)中, $\Phi(\omega_r, \omega_c)$ 是卷积窗 \mathbf{C} 的谱, 由式(20)知, $\Phi(\omega_r, \omega_c)$ 等于前基窗谱和后基窗共轭谱乘积。

$$\Phi(\mathbf{j}\omega_r, \mathbf{j}\omega_c) = F(\mathbf{j}\omega_r, \mathbf{j}\omega_c) \cdot B^*(\mathbf{j}\omega_r, \mathbf{j}\omega_c) \quad (29)$$

对于无窗 ap²DFT, 前后窗谱如下。

$$F(\mathbf{j}\omega_r, \mathbf{j}\omega_c) = B(\mathbf{j}\omega_r, \mathbf{j}\omega_c) = e^{-\mathbf{j}(N-1)(\omega_r + \omega_c)/2} \cdot \frac{\sin(N\omega_r/2)}{N\sin(\omega_r/2)} \frac{\sin(N\omega_c/2)}{N\sin(\omega_c/2)} \quad (30)$$

所以, ap²DFT 系统频率响应函数等于,

$$apH(\mathbf{j}\omega_r, \mathbf{j}\omega_c) = \frac{1}{N^2} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} \mathbf{H}_{u,v} \Phi[\mathbf{j}(\omega_r + 2u\pi/N), \mathbf{j}(\omega_c + 2v\pi/N)]$$

$$\begin{aligned} & \omega_{r(c')} = \omega_{r(c)} + 2u(v)\pi/N \\ & = \frac{1}{N^2} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} \mathbf{H}_{u,v} \left[\frac{\sin(N\omega_{r'}/2)}{N\sin(\omega_{r'}/2)} \right]^2 \cdot \left[\frac{\sin(N\omega_{c'}/2)}{N\sin(\omega_{c'}/2)} \right]^2 \\ & \omega_{r(c')} = \omega_{r(c)} - 2\pi(N-u(v))/N \\ & = \frac{1}{N^2} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} \mathbf{H}_{u,v} \left[\frac{\sin(N\omega_{r'}/2 - N\pi)}{N\sin(\omega_{r'}/2 - \pi)} \right]^2 \cdot \left[\frac{\sin(N\omega_{c'}/2 - N\pi)}{N\sin(\omega_{c'}/2 - \pi)} \right]^2 \\ & = \frac{1}{N^2} \sum_{u'=1}^N \sum_{v'=1}^N \mathbf{H}_{N-u', N-v'} \left[\frac{\sin(N\omega_{r'}/2)}{N\sin(\omega_{r'}/2)} \right]^2 \left[\frac{\sin(N\omega_{c'}/2)}{N\sin(\omega_{c'}/2)} \right]^2, \\ & u'(v') = N - u(v) \end{aligned} \quad (31)$$

从式(31)可看出, 插值函数 $\Phi(\omega_r, \omega_c)$ 只有在 $r = u'$ 和 $c = v'$ 时有非零值 1, 所以, 线性 ap²DFT 系统频率响应函数在 $(2r\pi/N, 2c\pi/N)$ 的取样值等于,

$$\begin{aligned} apH(\mathbf{j}\omega_r, \mathbf{j}\omega_c) |_{r=u', c=v'} &= \frac{1}{N^2} \sum_{u'=1}^N \sum_{v'=1}^N \mathbf{H}_{N-r, N-c} \\ &= \frac{N^2}{N^2} \mathbf{H}_{r,c} = \mathbf{H}_{r,c} \end{aligned} \quad (32)$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 2 \\ 1 & 2 & \cdots & N/2-1 & N/2-1 & N/2-1 & N/2-1 & \cdots & 2 & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & N/2-1 & N/2 & N/2 & N/2-1 & \cdots & 2 & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & N/2-1 & N/2 & N/2 & N/2-1 & \cdots & 2 & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & N/2-1 & N/2-1 & N/2-1 & N/2-1 & \cdots & 2 & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

图8 中心对称三角基窗

式(32)表示 ap²DFT 系统频率响应函数经过 \mathbf{H} 每个采样点。

5 实验

在满足条件(25)的情况下, 具有线性相位的 ap²DFT 的传输函数如下:

$$\begin{aligned} H(\mathbf{j}\omega_r, \mathbf{j}\omega_c) &= \mathbf{A}_{0,0}^{(d)} + 2 \sum_{c=1}^{N-1} \mathbf{A}_{0,c}^{(d)} \cos(\alpha\omega_c) + 2 \sum_{r=1}^{N-1} \mathbf{A}_{r,0}^{(d)} \cos(\pi\omega_r) \\ &+ 2 \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{c=1}^{N-1} [\mathbf{A}_{r,-c}^{(d)} \cos(\pi\omega_r - \alpha\omega_c) + \mathbf{A}_{r,c}^{(d)} \cos(\pi\omega_r + \alpha\omega_c)] \end{aligned} \quad (33)$$

这样, 设计 ap²DFT 的步骤如下。

(1) 选择基窗 \mathbf{F}/\mathbf{B} , 使其满足性质 1 而使传输特性具有线性相位。

(2) 根据应用选择二维传输特性矩阵 \mathbf{H} 且满足性质 1 即中心对称。

(3) 按照式(20)构造全相位基矩阵 \mathbf{A} 。

(4) 带入式(33)求得传输特性 $\mathbf{H}(\mathbf{j}\omega_r, \mathbf{j}\omega_c)$ 。

实验中, 选择中心对称的二维三角窗为基窗和二维低通传输矩阵 \mathbf{H} , 分别设计 $N = 8$ 时无窗、单窗和双窗 ap²DFT, 实验结果如下。

8 阶低通滤波特性 \mathbf{H} 定义如下。

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (34)$$

三角窗定义及 3D 图如图 8 所示。

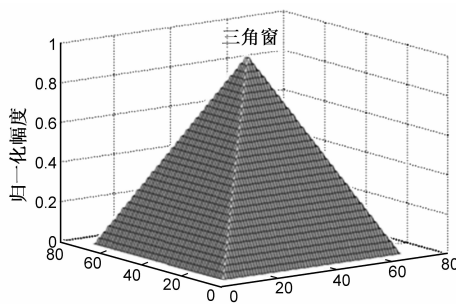


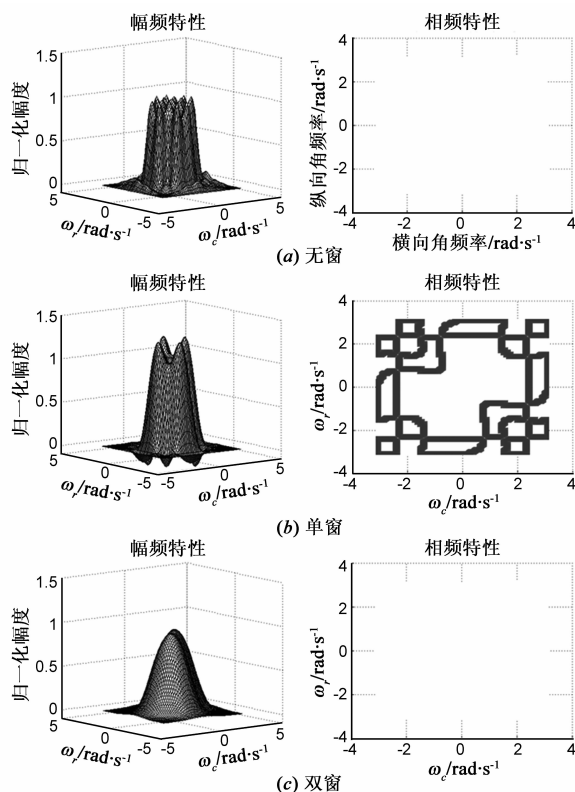
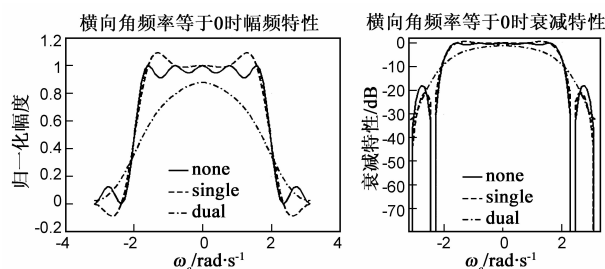
图8 中心对称三角基窗

无窗、单窗和双窗 ap²DFT 的处理特性如图 9 所示。

可看出, 单窗和双窗曲面的波峰和波谷数量明显小于无窗, 双窗的平滑性又优于单窗; 双窗和无窗的相位恒为零, 单窗出现 180 度的相位。由于特性具有中心对称性, 下面给出幅频特性 XZ 面投影图。如图 10 所

示。

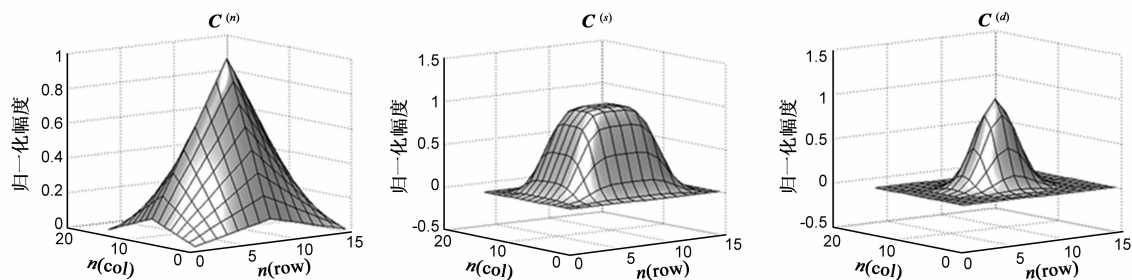
双窗的幅频特性由于采用与无窗和单窗相同的归一化方法而未达到 1, 可看出其完全消除波纹, 但过渡带宽度最大; 单窗的波纹相比无窗数量减少, 在衰减性方面没有明显区别。上面的结果与选取窗的形状有关,

图9 二维无窗、单窗和双窗 ap^2DFT 特性图10 无窗、单窗和双窗 ap^2DFT 特性 XZ 平面图

通过调节或者设计新窗体可进一步改善处理特性.上面实验的三种卷积窗曲面如图 11 所示.

6 小结

基于一维全相位信号处理模式,本文理论推导出二维加窗 DFT 域全相位算术表达式.首次实现了二维全相位信号处理的系统原理图,并对算法复杂度进行了初步分析,得到逐行复用的简化算法.分析并证明了二维全相位的线性性和频率采样定理,由此得到无窗、单窗和双窗条件下二维 ap^2DFT 的传输特性函数.最后,借助 MATLAB 设计实现了无窗、单窗和双窗全相位信号处理特性和 3D 曲面图,为基于全相位的二维信号处理提供了重要参考.

图11 无窗、单窗和双窗 ap^2DFT 的卷积窗 C 曲面图

参考文献

- [1] Wang Chengyou, Xie Songzhao, Jiang Baochen. APBT-based image coding at low bit rates with down-sampling and all phase DCT interpolation[J]. Journal of Information and Computational Science, 2013, 10(12): 3899 – 3906.
- [2] 侯正信, 刘建忠, 宋占杰, 等. 全相位多维多抽样率滤波器设计[J]. 天津大学学报, 2011, 44(4): 331 – 338.
Hou Zhengxin, Liu Jianzhong, Song Zhanjie, et al. Design of all phase multidimensional multirate digital filter[J]. Journal of Tianjin University Science and Technology, 2011, 44(4): 331 – 338. (in Chinese)
- [3] Tan Siwei, Ren Zhiliang, Sun Changcun. Improvement of phase

difference correcting spectrum method based on all-phase FFT [J]. Systems Engineering and Electronics, 2013, 35(1): 34 – 39.

- [4] Huang Xiangdong, Cui Haitao, Wang Zhaohua. Mechanical fault diagnosis based on all-phase FFT parameters estimation [A]. Proceedings of 2010 IEEE 10th International Conference on signal processing[C]. Beijing: 2010. 307 – 310.
- [5] 侯正信, 胡莹莹, 杨爱萍, 等. 全相位 DCT 自适应算法[J]. 计算机工程与应用 2012, 48(6): 162 – 165.
Hou Zhengxin, Hu Yingying, Yang Aiping, et al. All-phase DCT adaptive algorithm[J]. Computer Engineering and Application, 2012, 48(6): 162 – 165. (in Chinese)
- [6] 李莉, 侯正信, 王成优, 等. 基于全相位 DCT/IDCT 内插的

- 去马赛克算法[J]. 光电工程, 2008, 35(12): 96 – 100.
- Li Li, Hou Zhengxin, Wang Chengyou, et al. Demosaicing algorithm based on all-phase DCT/IDCT interpolation[J]. Optoelectronic Engineering, 2008, 35(12): 96 – 100. (in Chinese)
- [7] Yang Dongkai, Yao Yanxin, Guo Jia. GPS multipath signal estimation based on all-phase DFT[J]. Chinese Journal of Electronics, 2010, 19 (2): 369 – 372.
- [8] Zhang Yonghui, Chen Xi, Zhang Xiyuan. Power quality analysis based on all-phase FFT[A]. 2010 International Conference on Intelligent System Design and Engineering Application[C]. Changsha, 2010. 69 – 72.
- [9] 奚吉, 赵晓玲, 张煜东. 改进的沃尔什滤波的图像插值算法[J]. 计算机工程, 2010, 36(22): 211 – 213.
- Xi Ji, Zhao Xiaoling, Zhang Yudong. Improved image interpolation algorithm of WALSH filter[J]. Computer Engineering, 2010, 36(22): 211 – 213. (in Chinese)
- [10] 张煜东, 吴乐南, 王水花. 改进的沃尔什图像插值方法[J]. 计算机工程与应用, 2011, 47(9): 156 – 159.
- Zhang Yudong, Wu Lenan, Wang Shuihua. Improved WALSH image interpolation method[J]. Computer Engineering and Application, 2011, 47(9): 156 – 159. (in Chinese)
- [11] 杨雪玲, 徐妮妮, 王静. 纯二维全相位 IDCT 小波滤波器组的设计与实现[J]. 天津工业大学学报, 2011, 30(6): 58 – 62.
- Yang Xueling, Xu Nini, Wang Jing. Design and implementation of true 2D APIDCT filter banks[J]. Journal of Tianjin Polytechnic University, 2011, 30(6): 58 – 62. (in Chinese)
- [12] 陈忠泽, 黄国玉. 二维加窗全相位图像卷积滤波模板的设计[J]. 计算机工程与应用, 2008, 44(27): 180 – 183.
- Chen Zhongze, Huang Guoyu. Design of 2D windowed all-phase image filtering template[J]. Computer Engineering and Application, 2008, 44(27): 180 – 183. (in Chinese)
- [13] 侯正信, 李莉, 王成优, 何凯. 全相位方向滤波器组设计与应用[J]. 天津大学学报, 2009, 42(4): 362 – 367.
- Hou Zhengxin, Li Li, Wang Chengyou, He Kai. Design and application of all-phase directional filter banks[J]. Journal of Tianjin University, 2009, 42(4): 362 – 367. (in Chinese)
- [14] Shekhar Chandra and Imants Svalbe. A fast number theoretic finite radon transform[A]. 2009 Digital Image Computing: Techniques and Applications[C]. Melbourne: 2009. 361 – 368.
- [15] Onchis, Darian M. Signal reconstruction in multi-windows spline-spaces using the dual-system[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2012, 19(11): 729 – 732.
- [16] 王兆华, 黄翔东. 数字信号全相位谱分析与滤波技术[M]. 北京: 电子工业出版社, 2009(02): 257 – 261.
- Wang Zhaohua, Huang Xiangdong. All-Phase Spectrum Analysis and Filtering Technology on Digital Signal[M]. Beijing: Electronic Industry Press, 2009(02): 257 – 261. (in Chinese)
- [17] Gu Chao, Zhao Jiaxiang, Xu Wei, et al. Design of linear-phase notch filters based on the OMP scheme and the chebyshev window[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II, 2012, 59(9): 592 – 596.

作者简介



苏 飞 男, 1975 年 12 月出生, 安徽宿州人. 2001 年 3 月和 2004 年 3 月毕业于天津大学电信学院分别获得硕士和博士学位, 2004 年 4 月 2013 年 7 月在天津三星电子从事数字电视软件开发任研发部副部长, 2013 年 7 月进入天津理工大学电子工程系任教, 从事数字信号方面的研究.

E-mail: sufei@tjut.edu.cn



曹继华 男, 1964 年 10 月出生. 中国电子学会高级会员, 2001 年毕业于天津大学获博士学位, 2002 ~ 2004 年在清华大学电子工程系从事博士后研究工作, 1998 至今在天津技术师范大学任教, 教授, 主要从事图像、视频信号处理, 图像分析, 图像理解和盲信号处理.

E-mail: caojihua@sina.com