

基于面片拼接的等几何分析方法求解 波导本征值问题

王 峰¹, 林 皋¹, 刘 俊^{1,2}, 李建波¹

(1. 大连理工大学水利工程学院, 辽宁大连 116024; 2. 南京水利科学研究所水文水资源与水利工程科学国家重点实验室, 江苏南京 210098)

摘 要: 基于 NURBS 的等几何分析方法集成了计算机辅助设计(CAD)和有限元方法的优点, CAD 模型、网格划分和数值仿真均采用同样的几何描述. 然而, 由于单个 NURBS 曲面片拓扑的局限性, 单片等几何分析方法难以处理介质分布不均匀以及截面形式复杂的多连通区域问题. 本文基于面片拼接, 将等几何分析方法用来求解此类问题的波导本征值. 细分前后, NURBS 曲面片拼接处的控制点和网格必须匹配. 通过 Galerkin 法来离散波导本征值问题的 Helmholtz 控制方程, 计算结果表明该方法具有自由度消耗小、精度高、收敛速度快等优点.

关键词: 波导本征值; 等几何分析; NURBS; 面片拼接; 介质分布不均匀; 多连通区域

中图分类号: TN814 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2016)01-0200-06

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.3969/j.issn.0372-2112.2016.01.029

Isogeometric Analysis for the Waveguide Eigenvalue Problem Based on the NURBS Patch Splicing Technique

WANG Feng¹, LIN Gao¹, LIU Jun^{1,2}, LI Jian-bo¹

(1. School of Hydraulic Engineering, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, China;

2. State Key Laboratory of Hydrology-Water Resources and Hydraulic Engineering, Nanjing Hydraulic Research Institute, Nanjing, Jiangsu 210098, China)

Abstract: Isogeometric analysis (IGA) based on the non-uniform rational B-splines (NURBS) has integrated the advantages of Computer Aided Design (CAD) and the finite element method (FEM). The main feature of IGA is the usage of one common geometry representation for creating CAD models, for meshing, and for numerical simulation. However, IGA based on one single NURBS patch is difficult to deal with the inhomogeneous mediums and complex multiply connected domains because of the limitation of the NURBS patch topology. In this paper, IGA based on the patch splicing is used to solve the waveguide eigenvalue problem of this kind. The control points and meshes of different patches must coincide on the interface, even after refinement. The Helmholtz governing equation can be discretized using the Galerkin procedure. Numerical examples are presented to show that IGA possesses the advantages of better convergence on a per-degree-of-freedom and high accuracy.

Key words: waveguide eigenvalue; isogeometric analysis; NURBS; patch splicing; inhomogeneous mediums; multiply connected domains

1 引言

波导^[1]是一种在微波或可见光波段中传输电磁波的装置, 常用于无线电通讯、雷达、导航等无线电领域, 其常用的截面形状有矩形波导、圆形波导、椭圆波导和环形波导^[2]. 按照电磁波在传输方向上有没有电场和磁场分量, 可以分为横磁波 (Transverse Magnetic, TM)、

横电波 (Transverse Electric, TE)、横电磁波 (TEM). 其中波导本征值问题是微波理论中最关键问题之一, 因为它不仅与不同模式的电磁波传输特性有关, 而且还是许多微波部件分析优化的基础.

求解波导本征值问题的方法主要有解析法和数值解法两类. 解析法能求解的实例比较少, 且截面形状较为简单正规, 介质均匀规则. 除了均匀波导外, 不均匀

收稿日期: 2014-05-12; 修回日期: 2014-07-30; 责任编辑: 李勇锋

基金项目: 国家自然科学基金重点项目 (No. 51138001); 国家自然科学基金委创新研究群体基金 (No. 51121005); 国家重大科技专项 (No. 2011ZX06002-10, No. 2013ZX06002001-09); 水文水资源与水利工程科学国家重点实验室开放研究基金 (No. 2012491611); 上海交通大学海洋工程国家重点实验室开放基金 (No. 1202); 中国博士后科学基金 (No. 2013M530919, No. 2014T70251)

波导元件目前已经大量的应用于微波系统^[3]中,如可变移相器、抗匹配器等。

对于介质分布不均匀和截面复杂的波导,只能通过数值解法来求解。随着计算机科学技术的发展,出现了许多求解波导本征值问题的数值解法,如有限元方法^[4-7],边界元方法^[8],无网格法^[9,10],比例边界有限元方法^[11,12]。

等几何分析方法(Isogeometric Analysis,简称IGA)是 Hughes^[13]于 2005 年提出来的,其将 NURBS(Non-Uniform Rational B-spline)基函数引入到等参有限元中。该方法可以有效衔接计算机辅助设计(Computer Aided Design, CAD)和有限元方法(Finite Element Method, FEM),将分析计算建立在精确的几何模型之上,消除了计算模型与几何模型之间的非一致性问题。它同时兼备了 FEM 和无网格方法的优点,其基本思想是,几何模型和网格计算模型采用相同的基函数空间。该方法具有以下独特的优势:(1)避免了 FEM 分段多项式逼近问题域所产生的误差;(2)由于 NURBS 的几何精确特性,即使是稀疏的参数网格也保留了模型的几何信息,同时细分过程中无需访问原 CAD 模型,这便于实现网格的自适应保形细分,节省了工作量。

目前该方法已经被用于电磁学问题^[14-16],张勇^[17]将其与比例边界有限元(Scaled Boundary Finite Element Method, SBFEM)耦合来求解波导本征值问题。然而由于 NURBS 曲面片是定义在矩形参数域中的,受制于拓扑的局限性,单片等几何分析方法尚且难于处理介质分布不均匀以及截面形式复杂的波导本征值问题。由于 NURBS 曲面片的张量积特性,可以通过多面片拼接^[18]的等几何分析方法来处理上述问题,即对 NURBS 曲面片进行“加法”操作,这充分借鉴了子结构法的基本思想^[19]。由于等几何分析方法采用等参元的思想,电场或磁场纵向分量用 NURBS 基函数来构造, Helmholtz 控制方程的弱形式通过 Galerkin 变分原理来实现,最后施加不同的边界条件,便可得横磁波(TM)和横电波(TE)的等几何分析方程,本文通过三个算例来验证其有效性。

2 等几何分析基本思想

2.1 NURBS 基函数

NURBS 基函数是通过 B 样条基函数的有理化来实现的^[20],令 $\Xi = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ 是一个参数空间中的单调不减的坐标序列,即 $\xi_i \leq \xi_{i+1}, i = 0, 1, \dots, n+p$ 。其中 ξ_i 是节点, Ξ 为节点矢量, $n+1$ 和 p 分别是 B 样条基函数的个数和次数。对应于节点矢量 Ξ 的各阶基函数可由 de Boor-Cox 公式递归得到,即

$$\begin{cases} N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi_i \leq \xi \leq \xi_{i+1} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi), p \geq 1 \end{cases} \quad (1)$$

当节点矢量 Ξ 端点的重复度等于 $p+1$ 时,这样的节点矢量是开放型的,开放型节点矢量是 CAD 标准的,其定义的 B 样条基函数在端点处等于 1,通常把节点矢量定义在标准区间 $[0,1]$ 中。在等几何分析中,单元的细分有三种方法,即节点插入的 h 细分、基函数升阶的 p 细分和结合两者而成的 k 细分方法。图 1 给出了节点矢量为 $\Xi = \{0,0,0,0.2,0.4,0.6,0.8,1,1,1\}$ 的基函数图形。

赋给每个 B 样条基函数 $N_{i,p}(\xi)$ 权值 w_i ($0 < w_i \leq 1$),并进行加权平均,就得到 NURBS 基函数

$$R_{i,p}(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi) w_i}{\sum_{j=0}^n N_{j,p}(\xi) w_j} \quad (2)$$

若权值相等,则 NURBS 基函数退化为 B 样条基函数。二维 NURBS 基函数可通过一维 NURBS 基函数张量积得到,即

$$R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{ij}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{ij}} \quad (3)$$

给出控制点 P_i ,便可构造 NURBS 曲线,即

$$C(\xi) = \sum_{i=0}^n R_{i,p}(\xi) P_i \quad (4)$$

式中 P_i 是 NURBS 控制点。图 2 给出了一 NURBS 曲线,其采用的基函数如图 1 所示。

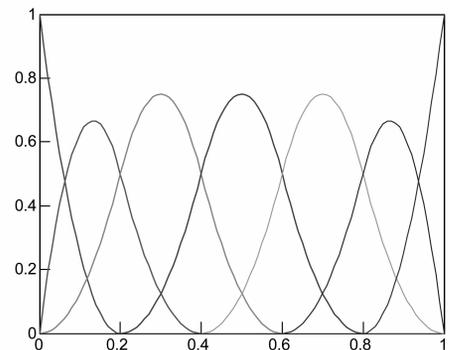


图 1 二次 B 样条基函数

对于 NURBS 曲面也有类似的表达,且为

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) P_{ij} \quad (5)$$

2.2 波导本征值问题的变分方程

在等几何分析中, NURBS 基函数将节点矢量所张成的参数域 Ω 映射为控制点所在的物理域 Ω ,即

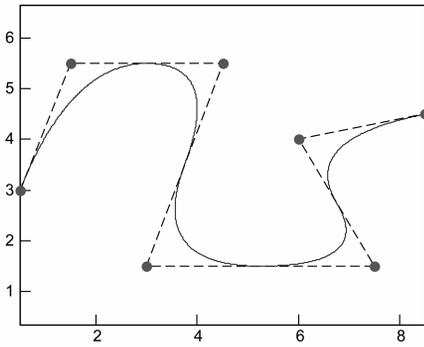


图2 二次NURBS曲线

$$F: \Omega \rightarrow \Omega \tag{6}$$

$$\mathbf{x} = F(\xi) = \sum_{k=1}^{NC} N_k(\xi) \mathbf{P}_k$$

其中: N_k 为 NURBS 基函数, \mathbf{P}_k 为控制点, NC 为控制点个数, 也是基函数的个数, $\mathbf{x} = (x, y)$ 为笛卡尔坐标, $\xi = (\xi, \eta)$ 为参数坐标. 等几何分析采用等参元思想, 即场变量 $u^h(\mathbf{x})$ 与几何形状 \mathbf{x} 的近似采用相同的 NURBS 基函数, 则任意场变量可近似表示为

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{NC} N_k(\xi) \mathbf{u}_k = \mathbf{N} \mathbf{u} \tag{7}$$

式中: \mathbf{u}_k 是与控制点 \mathbf{P}_k 对应的控制点变量.

问题域 Ω 的网格可由节点矢量和参数域中的节点区间映射生成. 设节点矢量为 $\xi_{\xi} = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_i\}$ 和 $\xi_{\eta} = \{\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_m\}$, 从两个方向节点矢量中去除重复节点可得子矢量 ξ_{ξ}' 和 ξ_{η}' , 定义参数域中的节点区间 $Q^{i,j} = [\xi_i^k, \xi_{i+1}^k] \times [\eta_j^k, \eta_{j+1}^k]$, 通过式(6)可映射成物理域上的一个剖分. 可以看出, 网格的生成和细化均可以自动实现, 且自动生成的网格能够准确描述计算物理域, 不会引入离散误差, 这实现了几何设计和数值分析的无缝连接.

波导内电磁场量满足的控制微分方程为

$$\nabla^2 u + k_c^2 u = 0 \tag{8}$$

式中: ∇^2 为 Laplace 算子; 对于 TM 波, u 表示为纵向电场分量, 即 $u = E_z$; 对于 TE 波, u 表示为纵向磁场分量, 即 $u = H_z$. k_c 为截止波数, $k_c^2 = k^2 - \beta^2 = \omega^2 \mu \epsilon - \beta^2$, ω 为频率, μ 为磁导率, ϵ 为介电常数, β 为相位常数.

不同波型满足的边界条件为

$$\text{TM 波: } u|_{\partial\Omega} = 0 \tag{9}$$

$$\text{TE 波: } \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0 \tag{10}$$

式中: $\partial\Omega$ 为问题域 Ω 的边界线, \mathbf{n} 为外法线方向.

由 Galerkin 变分原理, 上述问题可推得如下代数方程

$$(\mathbf{K} - k_c^2 \mathbf{M}) \mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{11}$$

这里, $\mathbf{K} = \sum_{i,j} \mathbf{K}_{ij}$ 和 $\mathbf{M} = \sum_{i,j} \mathbf{M}_{ij}$ 分别为集成的总体系数矩阵.

$$\mathbf{K}_{ij} = \int_{\xi_i^k}^{\xi_{i+1}^k} \int_{\eta_j^k}^{\eta_{j+1}^k} \mathbf{B}(\xi, \eta)^T \mathbf{B}(\xi, \eta) |J| d\xi d\eta \tag{12}$$

$$\mathbf{M}_{ij} = \int_{\xi_i^k}^{\xi_{i+1}^k} \int_{\eta_j^k}^{\eta_{j+1}^k} \mathbf{N}(\xi, \eta)^T \mathbf{N}(\xi, \eta) |J| d\xi d\eta \tag{13}$$

其中:

$$\mathbf{N}(\xi, \eta) = \{N_1(\xi, \eta) \quad N_2(\xi, \eta) \quad \dots \quad N_n(\xi, \eta)\}$$

$$\mathbf{B}(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2(\xi, \eta)}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial N_n(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2(\xi, \eta)}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial N_n(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

由于 NURBS 基函数具有局部支撑性和非负性, 只有少量 NURBS 基函数在边界上非零. 对于 TM 波, 边界上为零的基函数为 N_i^z , 不为零的基函数为 N_i^m , 则有

$$\sum N_i^z u_i^z + \sum N_i^m u_i^m = 0 \tag{14}$$

由 NURBS 基函数的单位分解特性可知

$$u_i^m = 0 \tag{15}$$

2.3 NURBS 曲面片的拼接

在实际的波导装置中, 波导横截面往往需要多个 NURBS 曲面片来共同描述, 例如介质分布不均匀和截面形式复杂的波导. 然而由于 NURBS 曲面片的分片连续性及其有理形式, NURBS 曲面片实现光滑拼接出现了瓶颈, 这里我们只研究交接处 C_0 连续下的 NURBS 曲面片的拼接问题.

多片等几何分析的基本思想为: 求出每块 NURBS 曲面片的系数矩阵, 然后再通过连通数组 (connectivity arrays) 组装成波导横截面的总体系数矩阵. 这里我们以两个 B 样条曲面片拼接为例来说明, 如图 3 所示, 下标 f 代表交接处的控制点, 下标 n 代表面片其他处的控制点.

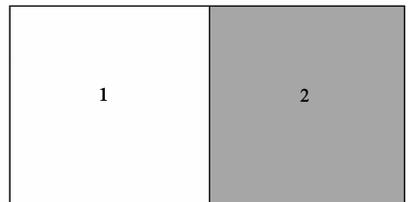


图3 两块面片拼接示意图

$$\mathbf{P}^1 = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_n^1 \\ \mathbf{P}_f^1 \end{pmatrix}, \mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_n^2 \\ \mathbf{P}_f^2 \end{pmatrix} \tag{16}$$

其中

$$\mathbf{P}_f^2 = \mathbf{P}_f^1 \tag{17}$$

如图 4 所示, 如果对面片 2 进行节点插入的 h 细分方法, 我们可以得到一组新的控制点.

$$\tilde{\mathbf{P}}^2 = \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{T}}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{T}}_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_n^2 \\ \mathbf{P}_f^2 \end{pmatrix} \tag{18}$$

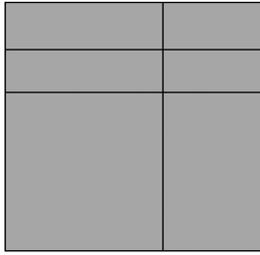


图4 h 细分面片2

其中: \tilde{T} 为延拓算子. 连接式 (17) 和 (18), 可以得到 C^0 连续的关系式

$$\tilde{P}_f^2 = \tilde{T}_j P_f^1 \quad (19)$$

设片 1 和片 2 的控制点变量为

$$\mathbf{u}^1 = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_n^1 \\ \mathbf{u}_f^1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_n^2 \\ \mathbf{u}_f^2 \end{pmatrix} \quad (20)$$

交接处解满足 C^0 连续

$$\mathbf{u}_f^2 = \tilde{T}_j \mathbf{u}_f^1 \quad (21)$$

3 数值算例

本节应用多片等几何分析方法求解波导本征值问题, 为了面片拼接的实施, 这里我们选取齐次控制点

$$\mathbf{P}_i = (X_i, Y_i, w_i) = (w_i x_i, w_i y_i, w_i) \quad (22)$$

同时为了验证方法的有效性, 我们选取非均匀矩形波导、均匀弯曲型 L 形金属波导和均匀十字形金属波导进行求解, 定义数值解的相对误差为

$$e_r = \frac{\| \mathbf{u}^{\text{num}} - \mathbf{u}^{\text{exact}} \|}{\| \mathbf{u}^{\text{exact}} \|} \quad (23)$$

3.1 非均匀介质的矩形波导

为了验证多片等几何分析方法的有效性, 本文选取如图 5 所示的波导模型, 相关材料参数为 $\epsilon_1 = 1.0, \epsilon_2 = 1.5, \mu_1 = \mu_2 = \mu_0$. 表 1 给出了通过多片等几何分析方法和有限元方法计算的前三阶模态的截止波数, 通过与解析解对比可以看出, 在采用更少自由度的情况下, 等几何分析方法可以求得更准确的 TE、TM 波截止波数. 图 6 给出了 TE11 模态的相对误差随自由度变化的收敛图, 很明显, 随着自由度的增加, 等几何分析方法

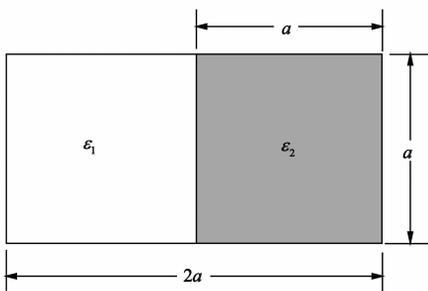


图5 非均匀介质的矩形波导

和有限元方法均能收敛于解析解, 但是等几何分析方法误差小、收敛速度快. 同时可以看出, 等几何分析方法在 1039 个自由度的情况下, TE11 模态的相对误差是 0.14%, 而有限元方法在 2197 个自由度的情况下, 其相对误差为 1.39%.

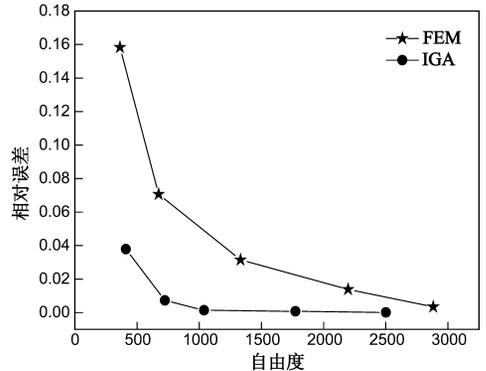


图6 TE11的相对误差比较

表 1 截止波数 ($k_c a$) 对比

模式	准确值	IGA, $p = 3$		FEM	
		($d. o. f = 1039$)	误差	($d. o. f = 1322$)	误差
TE	1.3981	1.3982	0.0000	1.4299	0.0395
	2.8514	2.8543	0.0010	2.8797	0.0278
	3.0731	3.0775	0.0014	3.2366	0.0315
TM	2.7181	2.7182	0.0000	2.7891	0.0199
	3.2767	3.2791	0.0007	3.3837	0.0199
	4.0137	4.0180	0.0011	4.3508	0.0303

表 2 计算自由度、计算内存占用和计算时间比较

网格数	自由度数		计算内存/Mb		计算 CPU 时间/s	
	FEM	IGA	FEM	IGA	FEM	IGA
400	2562	924	696	390	60.25	17.06

为了与 FEM 在计算内存占用和计算时间作对比, 本文选用同样的 400 个网格剖分, 其对应的计算自由度数、计算内存占用和计算时间见表 2. 在此网格剖分的情况下, IGA 计算得到的 TE11 模态的相对误差是 0.16%, 而 FEM 计算得到的 TE11 模态的相对误差是 1.22%. 这里很明显可以看出, IGA 中的 NURBS 等参元之间可以共享更多的自由度, 从而节省了自由度消耗, 降低了计算所用的空间存储.

3.2 均匀弯曲型 L 形金属波导

考虑弯曲型金属波导, 其界面形式如图 7 所示, 它通过两个 NURBS 曲面片来构造其图形, 其齐次控制点见表 3. 表 4 给出了等几何分析方法和有限元方法计算的 TE 波前五阶模态的截止波数, 通过与参考解对比可以看出, 在自由度差不多的情况下, 等几何分析方法求得的 TE 波截止波数误差远小于有限元方法得到的误差, 甚至小三个数量级, 这充分说明了等几何分析方法可以通过更少的自由度来求得 TE 波更准确的截止波数.

表3 两个曲面片的齐次控制点

曲面片 1	曲面片 2
$(\cos(\pi/8), \sin(\pi/8), 1)$	$(2, 0, 1)$
$(0.8315, 0.5556, 0.9808)$	$(2.5, 0, 1)$
$(\cos(\pi/4), \sin(\pi/4), 1)$	$(3, 0, 1)$
$(1.5\cos(\pi/8), 1.5\sin(\pi/8), 1)$	$(1.9616, 0.3902, 0.9808)$
$(1.4000, 0.9941, 1)$	$(2.4148, 0.6470, 0.9659)$
$(2\cos(\pi/4), 2\sin(\pi/4), 1)$	$(2.7716, 1.1481, 0.9239)$
$(2\cos(\pi/8), 2\sin(\pi/8), 1)$	$(2\cos(\pi/8), 2\sin(\pi/8), 1)$
$(1.9845, 1.4433, 1)$	$(1.9845, 1.4433, 1)$
$(3\cos(\pi/4), 3\sin(\pi/4), 1)$	$(3\cos(\pi/4), 3\sin(\pi/4), 1)$

表4 截止波数对比

模式	参考值	IGA, $p=3$ ($d.o.f=1800$)	FEM ($d.o.f=1962$)	IGA 误差	FEM 误差
TE	1.8186	1.8155	1.7909	0.0017	0.0152
	3.4906	3.4905	3.5156	0.0000	0.0072
	10.0656	10.0656	10.1530	0.0000	0.0087
	10.1119	10.1116	10.3020	0.0000	0.0188
	12.4355	12.4298	12.7480	0.0005	0.0251

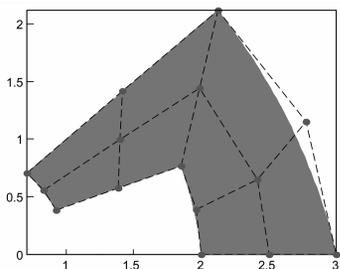


图7 弯曲型L形金属波导控制网格

为了与 FEM 在计算内存占用和计算时间作对比, 本文选用同样的网格剖分, 其对应的计算自由度、计算内存占用和计算时间见表 5。由于 NURBS 等参元之间可以共享更多的自由度, 因此在同样数量单元的情况下, IGA 所花费的计算自由度会少于 FEM。图 8 给出了在第 2 个网格剖分的情况下前 5 阶截止波数相对误差变化趋势图, 可以看出 FEM 相对误差要远远大于 IGA 的计算相对误差, 甚至大两到三个量级。可见, IGA 与传统的 FEM 相比, 具有消耗自由度少、精度高、收敛速度快等优点。

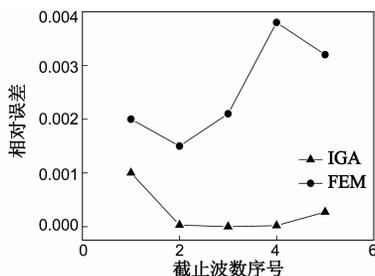


图8 前5阶截止波数的相对误差比较

表5 计算自由度、计算内存占用和计算时间比较

网格	网格数	自由度数		计算内存/Mb		计算 CPU 时间/s	
		FEM	IGA	FEM	IGA	FEM	IGA
1	56	398	331	75	51	2.12	1.39
2	225	1962	1105	726	378	103.36	31.55

3.3 均匀十字形金属波导

十字形金属波导^[5]的截面形式如图 9 所示, 这里可以通过五个 NURBS 曲面片拼接构造。为了与文献 [5] 取得的结果作比较, 只给出了通过等几何分析方法求得的 TE 波第一、第三阶模态的截止波数, 见表 6。

通过与参考解对比可以看出, 在自由度差不多的情况下, 等几何分析方法求得的 TE 波截止波数与有限元方法计算得到的 TE 波截止波数相近, 这验证多片等几何分析方法的有效性。

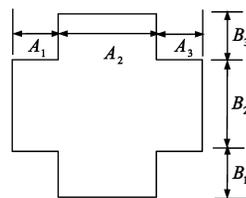


图9 十字形金属波导

表6 TE 波第一、第三阶模态的截止波数对比

参考值	IGA, $p=3$ ($d.o.f=256$)	计算参数 (mm)
0.5027	0.5012	$A_1 = A_3 = 1.778, A_2 = 3.556$
0.7143	0.7115	$B_1 = B_3 = 1.778, B_2 = 3.556$

4 结论

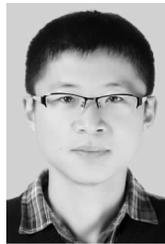
本文通过拼接将等几何分析方法由单片扩展到多片, 并推导了波导本征值问题的等几何分析离散方程。通过对非均匀介质和截面形式复杂的波导求解, 可以看出等几何分析方法具有计算自由度少、收敛速度快、精度高等优点, 而且还具有非常好的细分保形特性。但是面片拼接需要定义多个曲面片, 这不利于解决多孔结构, 因此面片拼接和面片裁剪结合是未来等几何分析方法走向工程应用的关键。

参考文献

- [1] 俎栋林. 电动力学 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2006. 162-246.
Zu Dong-lin. Electrodynamics [M]. Beijing, China: Tsinghua University Press, 2006. 162-246. (in Chinese)
- [2] 冯剑, 张贵新, 刘亮, 等. 一种环形波导微波等离子体装置 [J]. 高电压技术, 2009, 35(1): 48-53.
Feng Jian, Zhang Gui-xin, Liu Liang, et al. A microwave plasma system with ring waveguide [J]. High Voltage Engineering, 2009, 35(1): 48-53. (in Chinese)

- [3] 张克潜,李德杰. 微波与光电子学中的电磁理论[M]. 北京: 电子工业出版社,2001. 179 – 202.
Zhang Ke-qian, Li De-jie. Electromagnetic Theory for Microwaves and Optoelectronics [M]. Beijing, China: Publishing House of Electronics Industry, 2001. 179 – 202. (in Chinese)
- [4] Schiff Bernard, Yosibash Zohar. Eigenvalues for waveguides containing re-entrant corners by a finite-element method with superelements[J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 2000, 48(2): 214 – 220.
- [5] 徐善驾. 波导本征值问题的有限元分析[J]. 电子学通讯, 1982, 4(4): 222 – 234.
Xu Shan-jia. The finite-element analysis of waveguide eigenvalue problem[J]. Journal of Electronics, 1982, 4(4): 222 – 234. (in Chinese)
- [6] 李融林,倪光正,俞集辉. B样条有限元法解波导本征值问题[J]. 电子学报, 1997, 25(3): 5 – 9.
Li Rong-lin, Ni Guang-zheng, Yu Ji-hui. B-spline finite element solution of waveguide eigenvalue problems [J]. Acta Electronica Sinica, 1997, 25(3): 5 – 9. (in Chinese)
- [7] 李建兵. 基于有限元法的填充非均匀介质脊波导传输特性研究[D]. 兰州: 兰州交通大学, 2012. 1 – 61.
Li Jian-bing. Research on transmission characteristics of inhomogeneous dielectric loaded ridge waveguide by the finite element method[D]. Lanzhou, China: Lanzhou Jiaotong University, 2012. 1 – 61. (in Chinese)
- [8] 占腊民. 两类电磁场本征值问题的研究[D]. 武汉: 华中科技大学, 2004. 79 – 92.
Zhan La-min. Study on two kinds of electromagnetic field eigenvalue problems [D]. Wuhan, China: Huazhong University of Science and Technology, 2004. 79 – 92. (in Chinese)
- [9] Ooi B L, Zhao G. Element-free method for the analysis of partially-filled dielectric waveguides[J]. Journal of Electromagnetic Waves and Applications, 2007, 21(2): 189 – 198.
- [10] 张淮清,俞集辉. 波导本征值问题的径向基函数方法[J]. 电子学报, 2008, 36(12): 2433 – 2438.
Zhang Huai-qing, Yu Ji-hui. Radial basis function method for the eigen analysis of waveguide[J]. Acta Electronica Sinica, 2008, 36(12): 2433 – 2438. (in Chinese)
- [11] Lin G, Liu J, Li J B, et al. Scaled boundary finite element approach for waveguide eigenvalue problem [J]. IET Microwaves, Antennas & Propagation, 2011, 5(12): 1508 – 1515.
- [12] 林皋,刘俊. 波导本征值问题的比例边界有限元方法[J]. 计算力学学报, 2013, 30(1): 1 – 9.
Lin Gao, Liu Jun. Scaled boundary finite element method for the eigen analysis of waveguide[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2013, 30(1): 1 – 9. (in Chinese)
- [13] Hughes T J R, Cottrell J A, Bazilevs Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2005, 194(39): 4135 – 4195.
- [14] Buffa A, Sangalli G, Vázquez R. Isogeometric analysis in electromagnetics: B-splines approximation [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2010, 199(17): 1143 – 1152.
- [15] Zhang Y, Lin G, Hu Z Q, et al. Isogeometric analysis for elliptical waveguide eigenvalue problems[J]. Journal of Central South University, 2013, 20(1): 105 – 113.
- [16] 张勇,林皋,刘俊,等. 波导本征值问题的等几何分析方法[J]. 应用力学学报, 2012, 29(2): 113 – 119.
Zhang Yong, Lin Gao, Liu Jun, et al. The isogeometric analysis for eigen problem of waveguide[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2012, 29(2): 113 – 119. (in Chinese)
- [17] 张勇,林皋,胡志强. 比例边界等几何分析方法I:波导本征问题[J]. 力学学报, 2012, 44(2): 382 – 392.
Zhang Yong, Lin Gao, Hu Zhi-qiang. Scaled boundary isogeometric analysis and its application I: eigenvalue problem of waveguide[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2012, 44(2): 382 – 392. (in Chinese)
- [18] Cottrell J A, Hughes T J R, Bazilevs Y. Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA [M]. New York: Wiley, 2009. 87 – 92.
- [19] 张亚辉,林家浩. 结构动力学基础[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 2007. 217 – 227.
Zhang Ya-hui, Lin Jia-hao. Fundamentals of Structural Dynamics [M]. Dalian, China: Dalian University of Technology Press, 2007. 217 – 227. (in Chinese)
- [20] Piegl L, Tiller W. The NURBS Book [M]. Berlin: Springer Verlag, 1997. 47 – 139.

作者简介



王 峰 男, 1987年5月出生, 山东莱阳人, 大连理工大学水利工程学院博士研究生。主要从事无网格法及等几何分析的研究及其应用于力学和电磁学分析。

E-mail: wangfengdut@gmail.com



林 皋 男, 1929年1月出生, 江西丰城人, 大连理工大学水利工程学院教授, 博士研究生导师, 中国科学院院士。主要从事大坝、核电结构、地下结构地震响应分析与安全评价, 以及等几何分析在力学边值问题中的应用等方面的研究。

E-mail: gaolin@dlut.edu.cn